

Univerzita Pardubice  
Fakulta ekonomicko-správní

Modelování extrémních škod v pojišťovnictví  
Bc. Zuzana Žáčková

Diplomová práce  
2018

Univerzita Pardubice  
Fakulta ekonomicko-správní  
Akademický rok: 2017/2018

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Zuzana Žáčková**  
Osobní číslo: **E16659**  
Studijní program: **N6209 Systémové inženýrství a informatika**  
Studijní obor: **Pojistné inženýrství: Management finančních rizik**  
Název tématu: **Modelování extrémních škod v pojišťovnictví**  
Zadávající katedra: **Ústav matematiky a kvantitativních metod**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Cílem práce je zmapovat metody pro modelování pravděpodobnostního rozdělení extrémních škod a možnosti zabezpečení pojišťovny proti těmto škodám

Osnova:

- Úloha pojišťovnictví.
- Vliv extrémních škod na hospodaření pojišťovny.
- Metody modelování rozdělení pravděpodobnosti výšky extrémních škod.
- Možnosti zabezpečení proti extrémním škodám.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy: cca 50 stran

Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

BOLAND, J. P. Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science. Chapman & Hall/CRC, 2007.

CIPRA, T. Pojistná matematika: teorie a praxe. 2. aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, c2006. 411 s. ISBN 80-86929-11-6.

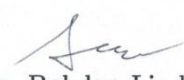
CIPRA, T. Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví. 1. vydání. Praha: Grada, 2004. 260 s. ISBN 80-247-0838-8.

ČESKÁ POJIŠŤOVNA A. S. Fakta o kalamitách. [online] [akt. 2017] [cit. 2017-06- 27] URL:

<<https://www.ceskapojistovna.cz/kalamity/fakta-o-kalamitach>>.

PACÁKOVÁ, V. Aplikovaná poistná statistika. 3., přeprac. a dopl. vyd. Bratislava: Iura Edition, 2004. 261 s. ISBN 80-8078-004-8.

Vedoucí diplomové práce:

  
doc. RNDr. Bohdan Linda, CSc.

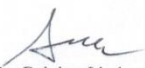
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: 1. září 2017

Termín odevzdání diplomové práce: 30. dubna 2018

  
doc. Ing. Romana Provaníková, Ph.D.  
děkanka

L.S.

  
doc. RNDr. Bohdan Linda, CSc.  
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 1. září 2017

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 9/2012, bude práce zveřejněna v Univerzitní knihovně a prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 25. 4. 2018

Zuzana Žáčková

## **PODĚKOVÁNÍ**

Tímto bych ráda poděkovala svému vedoucímu práce doc. RNDr. Bohdanu Lindovi, CSc. za jeho odbornou pomoc, cenné rady a poskytnuté materiály, které mi pomohly při zpracování diplomové práce. Dále bych chtěla poděkovat paní prof. RNDr. Vieri Pacákové Ph.D. za odborné rady, které mi pomohly při zpracování aplikační části práce. Také bych chtěla poděkovat své rodině a přátelům za podporu a pochopení.

## **ANOTACE**

Cílem této práce je zmapovat metody pro modelování pravděpodobnostního rozdělení extrémních škod a možnosti zabezpečení pojišťovny proti těmto škodám. Teoretická část se zabývá úlohou pojišťovnictví, vlivem extrémních škod na hospodaření pojišťovny, možnostmi pojišťoven zabezpečit se proti extrémním škodám a metodami modelování výšky pojistných plnění a souvisejících pojmů. Praktická část je zaměřena na hledání vhodného rozdělení pravděpodobnosti výšky individuálních škod, modelování extrémních hodnot a jejich simulace.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Pojištění, pojišťovnictví, extrémní škoda, modelování výšky pojistných plnění, testy dobré shody, simulace extrémních škod

## **TITLE**

Modelling of extreme values in insurance.

## **ANNOTATION**

The goal of this thesis is mapping of methods of distribution fitting of extreme losses and possibilities for insurance company how to secure before these losses. The theoretic part focuses on insurance role, affect of extreme losses on insurance company economy, possibilities for insurance company how to secure before these losses and methods for model amounts of losses and related terms. In the application part I apply distribution fitting for individual losses, model of extreme values and their simulation.

## **KEYWORDS**

Insurance, extreme loss, modelling of amount of losses, goodness of fit tests, simulating of extreme values

# OBSAH

<b>Seznam obrázků .....</b>	<b>9</b>
<b>Seznam tabulek .....</b>	<b>10</b>
<b>Seznam zkratk .....</b>	<b>11</b>
<b>Úvod .....</b>	<b>12</b>
<b>1 Úloha pojišťovnictví .....</b>	<b>13</b>
1.1 Význam pojištění .....	13
1.2 Členění pojištění .....	13
1.3 Význam pojišťovnictví .....	13
1.4 Regulace pojišťovnictví v ČR.....	15
1.5 Pojistný trh.....	15
1.5.1 Vývoj světového pojistného trhu .....	16
1.5.2 Vývoj českého pojistného trhu .....	17
<b>2 Vliv extrémních škod na hospodaření pojišťovny .....</b>	<b>21</b>
<b>3 Možnosti zabezpečení proti extrémním škodám.....</b>	<b>24</b>
3.1 Zajištění .....	24
3.1.1 Význam zajištění.....	24
3.1.2 Formy zajištění .....	25
3.1.3 Typy zajištění.....	26
3.1.4 Vybrané typy zajištění .....	26
3.2 Alternativní přenos rizik .....	27
3.3 Vyrovňovací rezerva .....	28
3.4 Předcházení extrémním škodám v průběhu upisování rizik.....	29
3.4.1 Katastrofické modely.....	30
3.4.2 Spoluúčast.....	30
3.4.3 Diferenciace netto pojistného .....	31
<b>4 Modelování rozdělení pravděpodobnosti výšky škod.....</b>	<b>32</b>
4.1 Rozdělení výšky pojistných plnění .....	32
4.1.1 Exponenciální rozdělení .....	32

4.1.2	Paretovo rozdělení .....	33
4.1.3	Weibullovo rozdělení.....	33
4.1.4	Lognormální rozdělení.....	34
4.1.5	Loglogistické rozdělení.....	35
4.2	Metody grafické analýzy .....	35
4.3	Metody odhadu parametrů rozdělení .....	36
4.4	Testy dobré shody .....	37
4.5	Metody modelování extrémních škod.....	37
4.5.1	Metoda blokového maxima .....	39
4.5.2	Metoda excedentů přes vysoký práh.....	41
4.6	Simulace extrémních hodnot pomocí kvantilových funkcí .....	43
4.6.1	Simulace pomocí kvantilových funkcí .....	43
4.6.2	Simulace extrémních hodnot .....	45
<b>5</b>	<b>Aplikace metod modelování extrémních škod.....</b>	<b>47</b>
5.1	Základní informace o datech.....	47
5.2	Hledání vhodného rozdělení .....	49
5.3	Metoda excedentů přes vysoký práh.....	53
5.4	Simulace extrémních škod .....	57
	<b>Závěr .....</b>	<b>59</b>
	<b>Použitá literatura .....</b>	<b>60</b>
	<b>Přílohy.....</b>	<b>63</b>



## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Vývoj růstu globálního předeepsaného pojistného v letech 1980 – 2016.....	16
Obrázek 2: Vývoj předeepsaného pojistného v ČR v letech 2013-2017 .....	18
Obrázek 3: Meziroční změny předeepsaného pojistného .....	19
Obrázek 4 Vývoj počtu pojistných smluv v letech 1997-2016 .....	20
Obrázek 5: Realizace náhodného pojistně technického rizika.....	21
Obrázek 6: Vývoj předeepsaného pojistného v období 1998-2016.....	29
Obrázek 7: Hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení.....	32
Obrázek 8: Hustota pravděpodobnosti Paretova rozdělení .....	33
Obrázek 9: Hustota pravděpodobnosti Weibullova rozdělení .....	34
Obrázek 10: Hustota pravděpodobnosti lognormálního rozdělení.....	34
Obrázek 11: Hustota pravděpodobnosti loglogistického rozdělení .....	35
Obrázek 12: Hustota pravděpodobnosti Fréchetova rozdělení .....	40
Obrázek 13: Hustota pravděpodobnosti Weibullova rozdělení .....	40
Obrázek 14: Hustota pravděpodobnosti Gumbelova rozdělení .....	41
Obrázek 15: Graf individuálních pojistných plnění .....	47
Obrázek 16: Box plot výšky pojistných plnění .....	48
Obrázek 17: Histogram výšky pojistných plnění .....	49
Obrázek 18: Grafické porovnání shody dat s loglogistickým rozdělením.....	52
Obrázek 19: Kvantilový graf empirických údajů a loglogistického rozdělení .....	54
Obrázek 20: Grafické porovnání shody s Paretovým rozdělením .....	55
Obrázek 21: Grafické porovnání shody s Paretovým rozdělením .....	56
Obrázek 22: Grafický výstup simulace 5 nejvyšších škod.....	58

## SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Celková pojištěnost.....	17
Tabulka 2: Vývoj předepsaného smluvního pojistného dle metodiky ČAP .....	17
Tabulka 3: Meziroční přírůstky předepsaného pojistného .....	18
Tabulka 4: Výběrové charakteristiky výšky škod.....	48
Tabulka 5: K-S test, exponenciální rozdělení .....	50
Tabulka 6: K-S test, Paretovo rozdělení .....	50
Tabulka 7: K-S test, Weibullovo rozdělení.....	51
Tabulka 8: K-S test, lognormální rozdělení .....	51
Tabulka 9: K-S test, loglogistické rozdělení .....	51
Tabulka 10: K-S test, tříparametrické loglogistické rozdělení.....	52
Tabulka 11: Loglogistické rozdělení s odhadnutými parametry.....	53
Tabulka 12: Percentily .....	53
Tabulka 13: Výstup Kolmogorovova-Smirnovova testu pro jednotlivá rozdělení .....	54
Tabulka 14: Paretovo rozdělení s odhadnutými parametry .....	55
Tabulka 15: Výstup Kolmogorovova-Smirnovova testu pro jednotlivá rozdělení .....	56
Tabulka 16: Paretovo rozdělení s odhadnutými parametry .....	56
Tabulka 17: Průběh simulace .....	57
Tabulka 18: Kvantily vybrané pořadové statistiky .....	57

## SEZNAM ZKRATEK

ART	Alternativní přenos rizik
ČAP	Česká asociace pojišťoven
ČP	Česká pojišťovna, a.s.
ČR	Česká republika
EGAP	Exportní garanční a pojišťovací společnost, a.s.
EU	Evropská unie
EVT	Extreme value theory (Teorie extrémních hodnot)
GEV	Generalised Extreme Value Distribution (Zobecněné rozdělení extrémních hodnot)
GPD	Generalised Pareto Distribution (Zobecněné Paretovo rozdělení)
HDP	Hrubý domácí produkt
K-S test	Kolmogorovovův-Smirnovův test
USA	Spojené státy americké
USD	Americký dolar

# ÚVOD

Cílem této práce je zmapovat metody pro modelování pravděpodobnostního rozdělení extrémních škod a možnosti zabezpečení pojišťovny proti těmto škodám. Modelování extrémních škod je pro pojišťovnu velmi důležité, protože k těmto škodám nedochází příliš často, nicméně mají na pojišťovnu závažný finanční dopad. Zároveň je pro pojišťovnu podstatné umět tyto škody predikovat, aby se proti nim mohla v budoucnu chránit.

V minulosti docházelo ve světě k extrémním událostem, které měly významný ekonomický dopad. Z výskytu těchto událostí vyplynula potřeba lidí se proti těmto škodám bránit a využít tedy služeb pojišťovnictví. V posledních desetiletích navíc docházelo ke zvýšení počtu a závažnosti extrémních událostí. Zejména v případě přírodních katastrof je zaznamenáván rostoucí trend. Po roce 2000 došlo k několika významným přírodním katastrofám, jmenovat lze například zemětřesení a tsunami v Indickém oceánu z roku 2004 nebo zemětřesení na Haiti z roku 2010. S těmito katastrofami souvisí vysoká ekonomická ztráta, z níž je určitý podíl škod pojištěný, a ztráty na lidských životech.

Kromě přírodních katastrof se setkáváme také se škodami způsobenými člověkem. Příkladem může být útok z 11. září 2001 v New Yorku, nebo i zřícení střechy kostela v Nigérii, které si vyžádalo 160 lidských životů. Dalšími příklady mohou být pády letadel, havárie lodí apod.

Z těchto celkových škod je pojištěna pouze část. Nicméně od roku 1991 do roku 2016 podíl pojištěných škod na celkových škodách vzrostl o 4,6 %. Z toho je patrné, že roste zájem o pojištění. [16]

V první části této práce je popsána úloha pojištění a pojišťovnictví spolu s vývojem světového a českého pojistného trhu v posledních letech. Jsou zde také popsány jednotlivé druhy pojištění, význam pojišťovnictví a s ním související regulace pojišťovnictví v ČR.

Další část se zabývá vlivem extrémních škod na hospodaření pojišťovny. Popsáno zde je pojistně technické riziko, dále vliv extrémních škod na hospodaření pojišťovny v souvislosti s růstem jejích výdajů a technickými rezervami. Dále jsou zde popsány některé konkrétní události, které měly v minulosti velký vliv na pojišťovny po celém světě.

Ve třetí části jsou popsány možnosti, kterými se může pojišťovna proti těmto škodám chránit. Je zde popsáno zajištění, jako klasický nástroj, dále některé netradiční nástroje, vyrovnávací rezerva a možnosti promítnutí predikce škod již v průběhu upisování rizik.

V předposlední části jsou popsány metody modelování a analýzy výšky pojistných plnění, metody modelování extrémních škod a simulace nejvyšších škod.

V poslední části jsou tyto metody prakticky ukázány na individuálních pojistných plněních.

# 1 ÚLOHA POJIŠŤOVNICTVÍ

## 1.1 Význam pojištění

Pojištěním rozumíme ochranu proti pojistným rizikům – pojištěný přenesl rizika, jejichž možné negativní důsledky jsou pro něho neúnosné, na pojistitele. Slouží tedy pro finanční eliminaci negativních důsledků nahodilých jevů. Z toho vyplývá, že pojištění se zabývá pouze nahodilými jevy, jejichž potenciálním důsledkem je vznik nějaké škody. Náhradou vzniklé škody rozumíme výhradně finanční náhradu. Náhradu v jiné formě nelze od pojišťovny očekávat. Motiv pro potřebu pojištění je přirozený, protože klient bude raději hradit pravidelně pojistné v pro něho únosné výši, než aby pak v případě vzniku škody byl nucen uhradit velmi vysokou částku, která by pro něho byla neúnosná.

## 1.2 Členění pojištění

Pojištění členíme na *soukromé (komerční) pojištění, sociální pojištění a zdravotní pojištění*. Z právního hlediska pak rozlišujeme pojištění *dobrovolné a povinné*, které se dále dělí na *povinné smluvní pojištění a zákonné pojištění*.

Dalším členěním je členění na pojištění životní a neživotní. Do *životního pojištění* řadíme pojištění pro případ smrti, pro případ dožití, smíšené pojištění a důchodové pojištění. *Neživotní pojištění* pak obsahuje majetková pojištění, ať už se jedná o majetek občanů nebo právnických osob, pojištění odpovědnosti za škody, úrazové pojištění a soukromé zdravotní pojištění.

## 1.3 Význam pojišťovnictví

Pojišťovnictvím rozumíme specifické odvětví ekonomiky, zabývající se snižováním finančních dopadů rizik, která ovlivňují činnost lidí. V České republice chápeme pojem pojišťovnictví jako specifické odvětví ekonomiky, které se zabývá pojišťovací, zajišťovací a zprostředkovatelskou činností v oblasti komerčního pojištění a souvisejících činností. Do předmětu pojišťovnictví řadíme také regulaci pojišťoven, kterou provádí příslušný státní orgán, řízení pojišťoven, kalkulaci pojistného, tvorbu technických rezerv apod. [10]

Pojišťovnictví řadíme mezi finanční služby a mezi jeho úkoly patří zejména:

- zajistit pojistnou ochranu subjektů (např. firmy nebo občana),

- přispět k bezproblémovému chodu ekonomiky,
- spolupráce nebo konkurence s bankovním sektorem.

Rozlišujeme dvě stránky pojišťovnictví:

- etická stránka – princip solidarity (při stanovení pojistného se nebere v úvahu konkrétní výše pojistného rizika)
- výdělečná stránka – zejména u životních pojišťoven [2]

Do oblasti pojišťovnictví řadíme tyto instituce:

- pojišťovny a zajišťovny,
- pojišťovací zprostředkovatele (brokery),
- státní dozor nad pojišťovnictvím,
- asociace pojišťoven,
- samostatné likvidátory pojistných událostí,
- ostatní finanční instituce zabývající se pojištěním (např. banky),
- poradenské firmy v oblasti pojišťovnictví.

Pojišťovnou rozumíme finanční instituci, která na sebe přebírá rizika a provozuje pojistné produkty. Lze je klasifikovat na *univerzální pojišťovny*, které se zabývají životním i neživotním pojištěním a *specializované pojišťovny* – např. EGAP, zabývající se úvěrovým pojištěním. Dále rozlišujeme státní pojišťovny, vzájemné pojišťovny a akciové pojišťovny. *Státní pojišťovny* jsou zakládány státem zejména pro nepříliš atraktivní oblasti pojištění. U *vzájemných pojišťoven* nesou pojistné riziko vlastníci, kteří jsou zároveň jejími klienty. *Akciové pojišťovny* jsou nejčastěji používanou formou komerčních pojišťoven. [2]

V současné době může být v ČR založena pojišťovna s právní formou akciové společnosti nebo družstva. Vzhledem k podmínkám na pojistném trhu ČR se ale s pojišťovnamí s právní formou družstva téměř nesetkáváme.

Mezi *činnostmi pojišťoven* řadíme provozování pojistných produktů a činností s nimi spojenými. Pojišťovny provozují tzv. *pojistně technickou činnost*, která zahrnuje navrhování pojistných produktů, kalkulace jejich ceny, kalkulace technických rezerv, činnosti spojené se zajištěním. Činnosti pojišťoven dělíme na obchodní činnost, provozní činnost a likvidační činnost. *Obchodní činnost* se zaměřuje na prodej pojistných produktů, péči o klienta a marketing. Do

*provozní činnosti* patří zpracování sjednaných smluv, jejich evidence, správa pojištění a výběr pojistného. *Likvidační činnosti* rozumíme proces vyřizování pojistných událostí, jejich registraci, prověření a případnou výplatu pojistného plnění. [10]

Právní úpravu pojišťovnictví zajišťuje zejména občanský a obchodní zákoník, zákon o pojišťovnictví, zákon o pojistné smlouvě a další zákony a vyhlášky.

## **1.4 Regulace pojišťovnictví v ČR**

Důvody pro regulaci pojišťovnictví vyplývají přímo z charakteru pojišťovací činnosti – klienti si kupují finanční krytí důsledků událostí s nahodilým charakterem, které mohou nastat v budoucnu, a to za předem placené pojistné. Dochází zde tedy k časovému nesouladu mezi platbami pojistného a náhradou škody. V tomto časovém období ale mohou nastat události, které by mohly omezit nebo znemožnit úhradu závazků pojišťovny vůči klientům. Toto lze zmírňovat pomocí regulace. Dále je třeba vzít v úvahu, že pojišťovací subjekty soustřeďují kapitál ve formě rezerv, ze kterých pak hradí pojistná plnění. Je tedy nutné regulovat hospodaření pojišťoven s těmito rezervami. [10]

Vývoj organizace dohledu nad pojišťovnictvím v ČR:

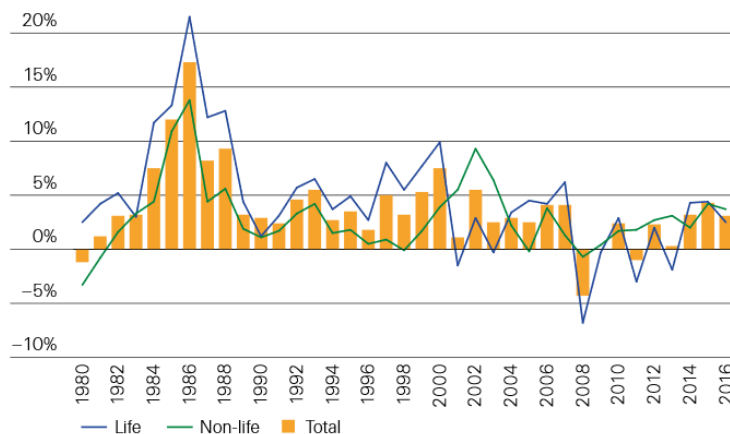
- od roku 1991 – Ministerstvo financí jako orgán státního dozoru,
- od roku 2000 – Úřad státního dozoru v pojišťovnictví a penzijním připojištění na Ministerstvu financí ČR,
- od roku 2006 – Česká národní banka v rámci strukturovaného jednotného dohledu nad finančním trhem,
- od roku 2008 – funkcionální dohled nad finančním trhem vykonávaný ČNB. [10]

## **1.5 Pojistný trh**

Na pojistném trhu se střetává nabídka s poptávkou po pojistných produktech. Pojistný trh chápeme jako systém ekonomických vztahů a institucí, které provádí pojišťovací činnosti včetně investování volných finančních prostředků. Mezi faktory ovlivňující podobu pojistného trhu řadíme obecné ekonomické podmínky, situaci na finančním trhu, legislativní podmínky, situaci na světovém pojistném a zajistném trhu, rozsah rizik krytých státem a další podmínky. [10]

### 1.5.1 Vývoj světového pojistného trhu

V roce 2016 se celkové globální předepsané pojistné očištěné o inflaci navýšilo o 3,1 %. Tempo růstu se však oproti roku 2015 zpomalilo (růst v roce 2015 činil 4,3 %). Vývoj růstu celkového předepsaného pojistného je zobrazen na obrázku 1. [24]



Obrázek 1: Vývoj růstu globálního předepsaného pojistného v letech 1980 – 2016

*Zdroj: Swiss Re Institute*

Důvodem zpomalení růstu bylo snížení růstu ve vyspělých zemích. Největší podíl na růstu předepsaného pojistného měla Čína. Celkové předepsané pojistné ve státech Severní Ameriky a západní Evropy bylo v roce 2016 stejné jako předchozím roce, a to ve výši 1,4 bilionu USD. Výše předepsaného pojistného Číny byla 466 miliard USD, čímž se Čína stala třetím největším pojistným trhem na světě. Druhým největším pojistným trhem je Japonsko s předepsaným pojistným ve výši 471 miliard USD. Na prvním místě pak je USA s výší předepsaného pojistného 1,35 bilionu USD. [24]

Dalším ukazatelem je celková pojištěnost, která vyjadřuje vyspělost daného pojistného trhu. Vyjadřuje se jako podíl předepsaného pojistného (nominálního) na hodnotě HDP (běžné ceny), který je uváděn v procentech z HDP. [24]

Z tabulky 1 je patrné, že největší celková pojištěnost v roce 2016 byla v Severní Americe. Na druhém místě pak je Evropa, dále pak Oceánie a za ní je Asie. Co se životního pojištění týče, byla největší pojištěnost v Evropě, za ní pak následuje Asie a Severní Amerika je zde až na třetím místě. V případě neživotního pojištění je největší pojištěnost v Severní Americe, za kterou následuje Oceánie a Evropa. Pro Českou republiku byly hodnoty následující: celková pojištěnost činila 3,13 %, u životního pojištění 1,18 % a v případě neživotního pojištění 1,95 %. [24]



Tabulka 1: Celková pojištěnost

	Celkem	Životní pojištění	Neživotní pojištění
Severní Amerika	7,32	3,04	4,28
Latinská Amerika a Karibik	3,18	1,35	1,84
Evropa	6,73	3,99	2,73
Asie	5,59	3,74	1,85
Afrika	2,77	1,85	0,92
Oceánie	6,3	2,69	3,61
<b>Svět celkem</b>	<b>6,28</b>	<b>3,47</b>	<b>2,81</b>

Zdroj: Swiss Re Institute

### 1.5.2 Vývoj českého pojistného trhu

V tabulce 2 jsou uvedeny hodnoty předepsaného pojistného<sup>1</sup> v ČR v životním a neživotním pojištění v letech 2013 – 2017. Jedná se o údaje členských pojišťoven České asociace pojišťoven. Hodnoty jsou uváděny v tisících Kč. Hodnoty z této tabulky jsou graficky znázorněny na obrázku 2. Na horizontální ose jsou jednotlivé roky. Sloupce představují výši předepsaného pojistného v životním a neživotním pojištění v tisících Kč.

Tabulka 2: Vývoj předepsaného smluvního pojistného dle metodiky ČAP

	Životní pojištění	Neživotní pojištění
2013	46 442 636	67 543 734
2014	46 118 627	69 076 016
2015	44 526 727	71 589 614
2016	43 661 727	74 840 701
2017	43 692 789	79 248 522

Zdroj: [5]

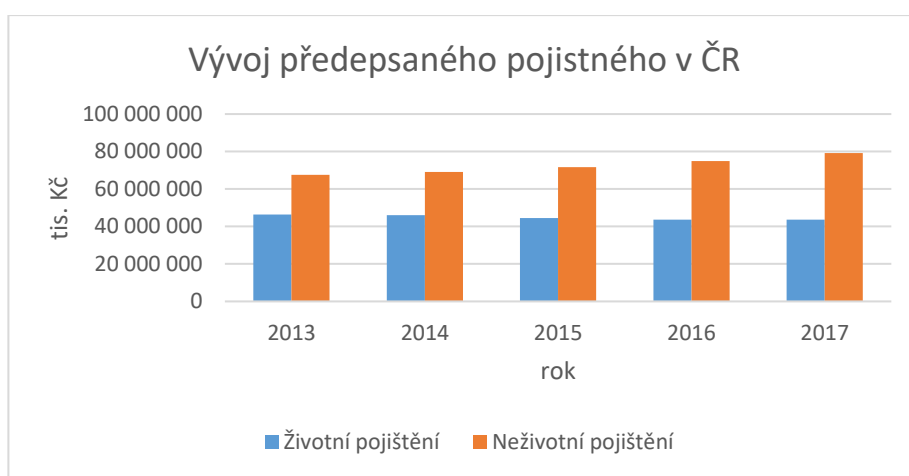
Z tabulky 2 (i z obrázku 2) je patrné, že v případě životního pojištění zaznamenáváme klesající trend, zatímco v případě neživotního objem předepsaného pojistného roste. To může být způsobeno jak rostoucími hodnotami majetku obyvatel, s čímž souvisí navyšování limitů v pojistných smlouvách a navyšování předepsaného pojistného. Dalším důvodem pro rostoucí trend

---

<sup>1</sup> Předepsané pojistné je pojistné, které vyplývá z uzavřených pojistných smluv, a pojišťovna očekává, že ho od klientů obdrží.

v neživotním pojištění může být zvýšení zájmu občanů o pojištění majetku. To může být způsobeno zvyšováním počtu i závažnosti škod způsobených živelními katastrofami nebo teroristickými útoky v minulých letech.

Dalším z důvodů růstu předepsaného pojistného průběhu času může být inflace. S inflací souvisí také růst výšky škod. Důležité je analyzovat, jak velký vliv má inflace na platby v pojištění v případě, že pojistná, případně zajistná smlouva zůstane nezměněna. Pokud budeme předpokládat, že hodnota škody se do příštího roku zvýší o nějaký faktor  $k$ , musí mít pojišťovna na paměti, že ve skutečnosti mohou nastat dva případy – v dalším období může výše škody vzrůst o více, než je předpokládaná hodnota faktoru  $k$ , nebo méně. [1]



Obrázek 2: Vývoj předepsaného pojistného v ČR v letech 2013-2017

Zdroj: [5]

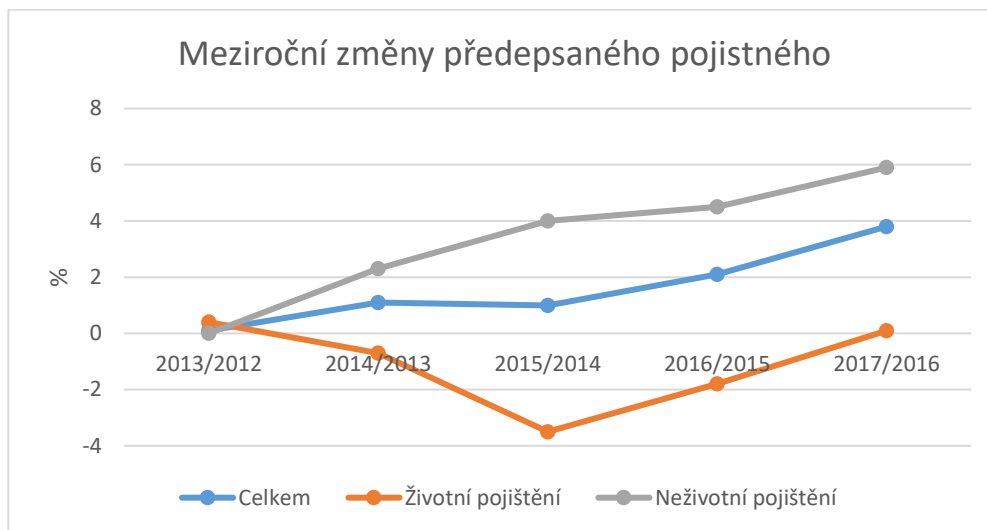
Kromě objemu předepsaného pojistného je důležité sledovat také meziroční přírůstky. Procentní změny v jednotlivých obdobích zobrazuje tabulka 3. Jsou zde jak celkové hodnoty, tedy za životní a neživotní pojištění dohromady, tak pro porovnání i životní a neživotní pojištění jednotlivě.

Tabulka 3: Meziroční přírůstky předepsaného pojistného

	Celkem	Životní pojištění	Neživotní pojištění
2013/2012	0,1	0,4	0
2014/2013	1,1	-0,7	2,3
2015/2014	1	-3,5	4
2016/2015	2,1	-1,8	4,5
2017/2016	3,8	0,1	5,9

Zdroj: [5]

Pro lepší představu o vývoji v jednotlivých obdobích poslouží obrázek 3, kde jsou znázorněny procentní meziroční přírůstky z tabulky 3.



Obrázek 3: Meziroční změny předepsaného pojistného

Zdroj:[5]

Jak z tabulky, tak z grafu je patrné, že předepsané pojistné v neživotním pojištění má spíše rostoucí trend, u životního pojištění docházelo v minulosti k poklesu. K největšímu propadu pak došlo v období 2014/2015, kdy předepsané pojistné meziročně pokleslo o 3,5 %. Od tohoto období dále poměrně rychle roste. Oproti tomu u neživotního pojištění zaznamenáváme pomalejší růst.

### 1.5.3. Vývoj živelních škod a jejich dopad na majetkové pojištění

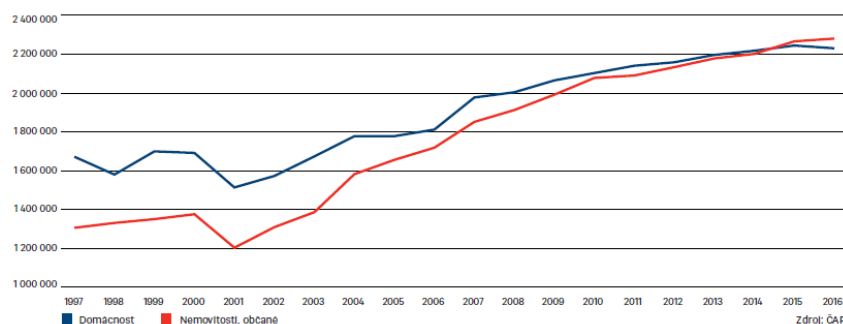
Z analýz ČAP vyplývá, že český pojistný trh zejména v oblasti majetkového pojištění v minulosti nejvíce ovlivnily dvě zásadní události – povodně v roce 1997, které v červenci zasáhly Moravu, a povodně z roku 2002, které zasáhly většinu Čech včetně Prahy. Během první jmenované události byly způsobené škody ve výši 60 mld. Kč (v dnešních cenách by to bylo 106 mld. Kč), během druhé povodně dosáhly způsobené škody 73 mld. Kč. V roce 1997 vyplatily pojišťovny škody v celkové výši 10 mld. Kč (za 117 000 pojistných událostí). V roce 2002 byl však podíl škod, které vyplácely pojišťovny vyšší. Pojišťovny dohromady vyplatily 36,7 mld. Kč, tedy polovinu celkového objemu škod, z 82 000 pojistných událostí. [11]

Živelní škody se dotýkají zejména třech oblastí neživotního pojištění, a to pojištění domácností, pojištění nemovitostí občanů a podnikatelského pojištění. Co se týče pojištění domácností, tam celkový počet pojistných smluv vzrostl od roku 1997 do roku 2016 o 34 %. Za toto

období vzrostlo i předepsané pojistné, které vzrostlo na téměř trojnásobek předepsaného pojistného v roce 1997. Po očištění pojistného od vlivu inflace se jedná o nárůst o 67 %. Průměrné pojistné se navýšilo o 25 %, z hodnoty 1 094 Kč na 1 368 Kč (v cenách z roku 2017). [11]

V případě pojištění nemovitosti občanů narostl počet smluv o 73 %. V roce 1997 bylo 1,3 mil. pojistných smluv, v roce 2016 pak 2,27 mil. Tento nárůst může být způsoben jak výstavbou nových domů, tak i zvýšením zájmu obyvatel o toto pojištění. Předepsané pojistné narostlo na 5,6násobek hodnoty z roku 1997. Po očištění pojistného od inflačního vlivu činí nárůst 3,2násobek hodnoty z roku 1997. Průměrné pojistné reálně vzrostlo o 84 %. V roce 1997 byla hodnota průměrného pojistného rovna 1 300 Kč, v roce 2016 více než 2 300 Kč. [11]

U podnikatelského pojištění je vývoj za sledované období nejstabilnější. Předepsané pojistné vzrostlo reálně o 25 %. [11]



Obrázek 4 Vývoj počtu pojistných smluv v letech 1997-2016

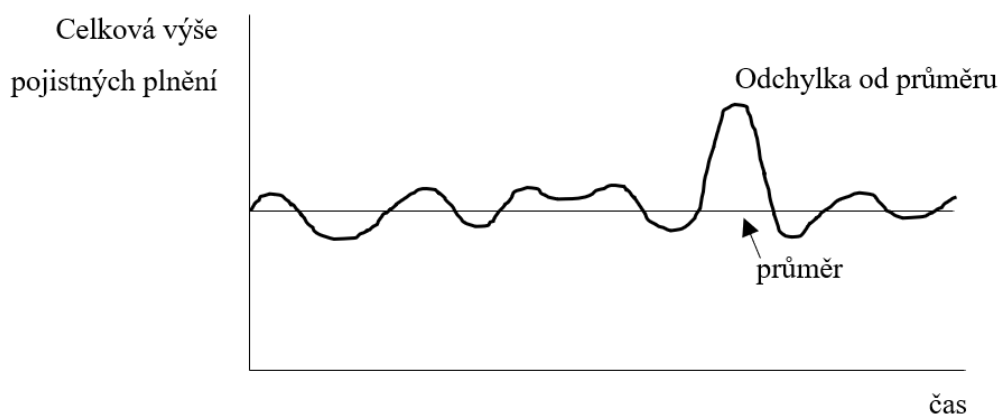
*Zdroj: ČAP*

Z obrázku 4, který zobrazuje počty pojistných smluv z pojištění domácností a nemovitostí občanů v jednotlivých letech od roku 1997 do roku 2016, je patrné, že k nejvýraznějšímu nárůstu počtu pojistných smluv u těchto pojištění došlo po povodních v roce 2002 a od tohoto období počet pojistných smluv stále roste, ačkoliv se tempo růstu mírně zpomaluje. Údaje o počtu pojistných smluv jsou za členské pojišťovny ČAP. [11]

## 2 Vliv extrémních škod na hospodaření pojišťovny

Hospodaření komerčních pojišťoven závisí na výši příjmů a výdajů pojišťovny. Výdaje představují zejména výplaty pojistných plnění a výdaje spojené s režijními náklady, příjmy pak převážně přijaté pojistné nebo příjmy z výnosů z investičního umístění. K pokrytí budoucích pojistných plnění slouží netto pojistné. Brutto pojistné obsahuje netto pojistné, kalkulované náklady na správní režie a kalkulovaný zisk. [23]

S výkyvy v hospodaření komerční pojišťovny souvisí tzv. *pojistně technické riziko*. Jedná se o riziko, že v budoucnu se budou výdaje vyvíjet jinak než podle předpokladu při kalkulaci pojistného. Existence pojistně technického rizika souvisí se skutečností, že pojišťovny poskytují finanční službu, kterou ovlivňuje nahodilý charakter pojistných událostí. „*Pojistně technické riziko znamená možnost vzniku odchylky (záporné nebo kladné) mezi skutečnou a kalkulovanou výší pojistných plnění a ostatních výdajů pojišťovny.*“ Přičemž pro pojišťovnu představuje problémem zejména záporná odchylka od průměru, kdy pojišťovně vzniká technická ztráta. [23]



Obrázek 5: Realizace náhodného pojistně technického rizika

Zdroj: vlastní zpracování podle [10]

Jedním z druhů pojistně technického rizika je *pojistně technické riziko náhodné*, kdy odchylka od průměru má náhodný charakter a dlouhodobý průměr se nemění. Obrázek 5 zobrazuje průběh pojistného plnění v čase. Z obrázku je patrné, že výše pojistného plnění se dlouhodobě pohybuje okolo určité průměrné hodnoty, nicméně krátkodobě dochází k většímu výkyvu od tohoto průměru. Znamená to, že výše výdajů byla odhadnuta správně, ale vlivem náhodné události došlo ke krátkodobé odchylce. Rozlišujeme normální náhodné riziko, kdy ve škodním

průběhu jsou pouze běžné odchylky, které jsou pro hospodaření pojišťovny snesitelné, a katastrofální náhodné riziko, kdy škodní průběh ovlivňují škody s velkým rozsahem, se kterými je obtížné počítat při kalkulaci. [23]

Důležitou součástí hospodaření pojišťovny představují technické rezervy. Pojišťovna je tvoří na základě zkušeností se škodním průběhem v minulosti, čímž se vystavuje riziku, že v následujícím období bude škodní průběh horší než v minulosti, a ona nebude mít vytvořenou dostatečně velkou rezervu pro pokrytí svých závazků. [23]

Pokud by k tomu došlo, bude pojišťovna nucena krýt případnou ztrátu ze svých zdrojů. Pro krytí neočekávaných ztrát plynoucích z rizik převzatých do pojištění slouží tzv. kapitálový „polštář“, který pojišťovna drží pro případ, že přijaté pojistné nebude dostatečné pro krytí převzatých rizik. Při krytí této ztráty kapitálem je důležité zaručení jak výnosu pro investory, tak i bezpečnosti pro klienty. [23]

V souvislosti s touto funkcí kapitálu je pro pojišťovnu důležité jeho řízení. Cílem podnikání komerčních pojišťoven je provádět a řídit pojišťovací činnosti se zohledněním solventnosti, likvidity a rentability. Krátkodobá ztráta rentability či likvidity nepředstavuje pro pojišťovnu závažný problém, nicméně ta dlouhodobá může ohrozit její existenci. [23]

Vliv na hospodaření pojišťovny má také vývoj pojišťovaných jevů, se kterými se pojišťovny setkávají. Z rizik nově vzniklých v posledních letech můžeme jmenovat například kybernetická rizika, se kterými se pojišťovny dříve nesetkávaly. Ale neobjevují se pouze nová rizika, mění se také průběh a charakter těch stávajících, například v případě živelního pojištění, u majetkového pojištění se neustále vyvíjí hodnota pojišťovaného majetku a podobně. [9]

Co se *životního pojištění* týče, tam k velkému ohrožování pojišťoven příliš nedochází, neboť kalkulace životního pojištění je spolehlivější než v případě neživotního pojištění. Problém však může nastat v souvislosti s dlouhodobým charakterem životního pojištění, kdy pojišťovna v důsledku chybné kalkulace nebude v budoucnu schopna splatit stanovený závazek vůči klientovi. Problémem může být nízká výnosnost na finančních trzích, v důsledku které nebude pojišťovna schopna vyplatit při kalkulaci předpokládanou, a tedy garantovanou technickou úrokovou míru. Dalším problémem může být stárnutí populace a s tím související zvyšování nároků v oblasti starobní péče. [9]

V *neživotním pojištění* jsou pojišťovny ohrožovány novými neznámými jevy, které nemohou v rámci rizikové analýzy předpokládat, nicméně jejichž důsledky jsou při tradičním výkladu pojistných podmínek kryty pojištěním. Navíc existují klienti, kteří si tyto nové jevy uvědomují

a poptávají cenově dostupné produkty, které by je ochránily před možnými negativními důsledky těchto jevů. [9]

V současnosti mají na hospodaření pojišťoven vysoký dopad zejména škody způsobené přírodními živly. Škodní průběh v souvislosti se živelními katastrofami se za poslední desetiletí výrazně zhoršil, a to jak v případě škodní frekvence, tak i rozsahu vzniklých škod. Důvodem vyšších škod v majetkovém pojištění je jak růst počtu pojistných smluv, růst hodnoty pojišťovaného majetku, tak i klimatické změny. Důsledkem změny podstaty živelního rizika je obtížnost aplikace historických statistických dat na budoucí situace. [9]

Potenciální negativní dopady živelních škod jsou historicky brány jako hlavní oblast komerčního pojištění a zajištění. Tyto instituce byly chápány jako nejefektivnější řešení finančních důsledků těchto škod. Problémem však je to, že komerční povaha pojišťovnictví nutí pojišťovny k rovnováze mezi příjmy a náklady. Tato rovnováha však představuje stále větší bariéru pro efektivní řešení těchto škod. [9]

Další vysoký dopad na pojišťovny má riziko teroristického útoku, které lze dopředu jen velmi obtížně predikovat. V tomto ohledu byl nejzávažnějším zlomem teroristický útok z 11. září 2001 v USA, se kterým pojišťovny dopředu nepočítaly, a proto toto riziko nebylo v první fázi risk managementu zařazeno do seznamu rizik. Přitom důsledky této události byly obrovské a velmi zasáhly celosvětový pojistný trh. [9]

### 3 MOŽNOSTI ZABEZPEČENÍ PROTI EXTRÉMNÍM ŠKODÁM

V souvislosti se skutečnostmi uvedenými v kapitole 2 je důležité, aby se sama pojišťovna proti těmto rizikům bránila. Snahou pojišťovny je v oblasti podnikové ekonomiky snižování vlastních nákladů a optimální řízení aktiv a pasiv. Proto byly pojišťovny v důsledku měnícího se rizikového prostředí nuceny zavést určitá opatření, jako je zvýšení pojistných tarifů nebo omezování rizik přijímaných do pojištění. To však vede klienty k hledání jiných forem krytí finančních dopadů možných rizik. Proto je třeba nalézt kompromis mezi finanční stabilitou pojišťovny a kvalitou poskytovaných služeb klientům. [9]

Pro pojišťovnu je důležité řídit pojistně technické riziko, které pro pojišťovnu znamená možnost vzniku výkyvu od předpokládaného škodního průběhu. Pojistně technické riziko je třeba nejdříve identifikovat, tedy najít změny, které mohou u daných produktů ovlivnit rizikovost. Poté je třeba pojistně technické riziko kvantifikovat, to znamená zjistit, jak se nalezené změny odrazí ve výši pojistných plnění. Na závěr je třeba najít řešení pojistně technického rizika (využití různých možností pro zmírnění dopadu rizika na hospodaření pojišťovny). Pojistně technické riziko lze eliminovat pomocí diverzifikace rizika (krytí širšího spektra rizik), přenesení rizika na další pojišťovací nebo zajišťovací instituci, využití pojišťovacích nebo zajišťovacích poolů, vytvořením vyrovnávací rezervy, vyloučením některých rizik z pojištění, spoluúčasti klienta nebo pomocí bonus-malus systému. V případě katastrofických rizik může pojišťovna využít kapitálové trhy. [23]

#### 3.1 Zajištění

*„Zajištění je převod části rizika, které pojistitel pojistil v zájmu pojištěného formou přímého pojištění, na jiného nositele rizika, který není pojištěným v žádném smluvním vztahu.“ [3]*

##### 3.1.1 Význam zajištění

- Zvýšení kapacity pojistitele: pojistitel musí při uzavírání pojistných obchodů brát v úvahu svou kapacitu (maximální objem rizika, který je schopen v rámci určitého rizika pojistit). Pokud převede část svých závazků na zajištětele, je schopen uzavřít větší objem pojistných obchodů, než by byl bez zajištění.



- Homogenizace pojistného kmene: pojistný kmen pojistitele by měl obsahovat, pokud je to možné, homogenní rizika. Pokud pojistný kmen obsahuje pojistné smlouvy s vysokými expozicemi nebo pojistnými částkami, je obtížné dopředu odhadnout chování takového pojistného kmene. Vhodným zajištěním lze tyto vysoce rizikové expozice postoupit zajišťovně a tím zvýšit homogenitu pojistného kmene.
- Stabilizace výsledků pojistitele: vhodným zajištěním lze stabilizovat tyto tři rizikové vlivy – riziko náhodného kolísání, riziko ekonomických, sociálních a technologických změn a riziko chyb.
- Rozprostření a diverzifikace pojistných rizik: rozlišujeme teritoriální, produktovou a časovou diverzifikaci.
- Dosažení finančních výhod: finančním zajištěním rozumíme zajištění, jehož hlavním důvodem jsou finanční cíle (např. navýšení kapitálu nebo stabilizace obchodních výsledků) a pojistně-technické cíle jsou až na druhém místě.
- Získání profesionálních služeb zajišťovny: zajišťovny neposkytují pouze zajištění jako takové, ale také takzvaný zajišťovací servis, který zahrnuje například podporu při tvorbě produktů, ocenění zvláštních rizik apod. [3]

### 3.1.2 Formy zajištění

Historický starší formou je *fakultativní zajištění*. Jeho princip spočívá ve sjednávání pro jednotlivé pojistné smlouvy. Pojistné smlouvy jsou tedy posuzovány jednotlivě, pro prvopojistitele nevyplývá smluvní povinnost postoupit danou smlouvu zajistiteli, stejně tak pro zajišťovnu nevzniká smluvní povinnost danou smlouvu do zajištění přijmout. Fakultativní zajištění se v praxi využívá například v případech, kdy kapacita prvopojistitele nepokrývá nabízený objem rizika, a to ani se sjednaným obligatorním zajištěním, nebo pokud prvopojistitel nemá s daným typem rizika žádné zkušenosti, a potřebuje tak technickou podporu. [3]

Další formou je *obligatorní zajištění*, které se na rozdíl od fakultativního sjednává pro celé pojistné portfolio. Z toho vyplývá, že zajišťovna je povinen v rámci daného portfolia převzít příslušné části rizika a nemůže ovlivňovat uzavírání individuálních smluv patřících do daného portfolia. Je zde důležitá vzájemná důvěra mezi zajišťovnou a prvopojistitelem. [3]

Kombinaci předchozích dvou forem zajištění nazýváme *fakultativní-obligatorní zajištění*. Pro tento typ zajištění je specifické, že prvopojistitel má právo postoupit konkrétní pojistnou

smlouvu do zajištění, zatímco zajišťitel má povinnost tuto smlouvu do zajištění přijmout. V praxi tento typ zajištění vzniká z fakultativního zajištění v případě, že prvopojistitel nabízí stále více pojistných smluv. [3]

### 3.1.3 Typy zajištění

Prvním typem je *proporcionální zajištění*. U tohoto typu zajištění se pojistná částka, pojistné plnění a pojistné dělí mezi prvopojistitele a zajišťitele v předem stanoveném poměru, který nezávisí na výši skutečné škody. Převedená část rizika se zde řídí původními pojistnými podmínkami, sjednanými mezi prvopojistitelem a pojištěným. Rozlišujeme dva typy proporcionálního zajištění, a to kvótové zajištění a surplus. *Kvótové zajištění* spočívá v tom, že poměr rozdělení rizika je pro všechny pojistné smlouvy stejný. U *surplus zajištění* pak prvopojistitel postupuje pouze tu část rizika, která přesahuje předem stanovenou částku (poměr rozdělení rizika se může pro jednotlivé pojistné smlouvy lišit). [3]

Dalším typem je *neproporcionální zajištění*. Důležitým pojmem u neproporcionálního zajištění je *priorita*, která značí tu část vzniklé škody, kterou hradí prvopojistitel. To znamená, že pojistné plnění se nedělí poměrem mezi prvopojistitele a zajišťitele, ale zajišťitel hradí tu část vzniklé škody, která přesahuje předem stanovenou hranici, tedy prioritu. Stejně jako u proporcionálního zajištění rozlišujeme dva typy neproporcionálního zajištění, a to XL zajištění a SL zajištění. Princip XL zajištění souvisí s pevně sjednanou prioritou, kterou lze uplatňovat buď pro pojistné smlouvy jednotlivě, nebo pro více pojistných smluv, u kterých dojde ke kumulaci škod v důsledku určité katastrofické události. SL zajištění se vyskytuje v podobě předem stanovené hranice, nad kterou poskytuje zajišťitel plnění v rámci celoročního objemu škod. [3]

### 3.1.4 Vybrané typy zajištění

V souvislosti s extrémními škodami je důležité zejména neproporcionální zajištění, konkrétně zajištění WXL/R, WXL/E. Dalšími vhodnými zajištěními jsou LCR( $p$ ) a ECOMOR. První dvě jmenovaná patří do skupiny *XL zajištění*, také nazývaného jako zajištění škodního nadměrku. Jedná se o nejvíce používaný typ neproporcionálního zajištění. [3]

*WXL/R zajištění* se používá pro zajištění jednotlivých velkých škod. Používá se na jednotlivé pojistné smlouvy, u kterých nastala škoda, která převýšila stanovenou prioritu. Potom vzniklý nadměrek hradí zajišťitel, jehož plnění je omezeno jeho vrstvou. WXL/R zajištění nechrání proti kumulativním škodám, proto může u prvopojistitele nastat problém, jestliže na více pojistných

smlouvách nastala škoda, která příliš nepřesáhla prioritu. Potom je prvopojistitel poškozen kumulací malých a středních škod. Dalším problémem zde je vhodné nastavení priority tak, aby toto zajištění poskytovalo ochranu pro ty opravdu velké škody. [3]

Oproti tomu *WXL/E zajištění* prvopojistitele chrání před důsledky kumulativních škod vzniklých v důsledku jedné události. K plnění zajistitelem dochází v případě, že z daného portfolia smluv je více smluv poškozeno jednou škodní událostí, jejíž náklady převyšují stanovenou prioritu. Priorita je zde tedy nastavena pro všechny pojistné smlouvy dohromady. [3]

Pro odlišení *WXL/E zajištění* od zajištění *WXL/R* se používá podmínka minimálního počtu smluv postihnutých danou událostí nebo stanovení priority tak vysoké, že jí přesáhne jen plnění na více smlouvách. [3]

Mimo *XL zajištění* lze využít také *zajištění nejvyšších škod (LCR(p))*, kde zajistitel hradí  $p$  nejvyšších škod vzniklých ve stanoveném období (např. kalendářním roce). Pro stanovení nejvyšších škod je třeba všechna plnění v daném roce uspořádat podle velikosti. Tento typ zajištění se v praxi příliš nevyužívá, občas v případě povinného ručení v kombinaci s *XL zajištěním*. [3]

Posledním typem zajištění vhodného pro extrémní škody je zajištění *ECOMOR*, kde zajistitel hradí pouze tu část škody, která v daném roce přesáhne  $p$ -tou nejvyšší škodu. [3]

## 3.2 Alternativní přenos rizik

Kromě klasického zajištění může pojišťovna využít i netradiční nástroje. Alternativním přenosem rizik (ART) rozumíme soubor metod, které pro přenos rizik využívají jiné, vhodnější, způsoby než klasické zajištění. S ART se v praxi setkáváme například proto, že pro některá rizika nemají pojistitelé ani zajistitelé dostatečné kapacity. V důsledku toho pak některé společnosti zakládají kaptivní (vlastní) pojišťovnu. Dalším důvodem využití ART může být kolísání zajistného, které souvisí s kolísáním historického škodního průběhu. Mezi nástroje ART metod patří například finanční zajištění, pojistné dluhopisy, pojistné opce, pojistné swapy a multiprodukty (v rámci jedné smlouvy je pojištěno několik rizik). [3]

Nejstarším typem ART metod je *kaptivní pojišťovna*. Kaptivní pojišťovnou rozumíme pojišťovnu patřící subjektu, který neprovozuje pojistnou činnost. Kaptivní pojišťovna pak kryje rizika vyplývající z činností pouze toho subjektu, který ji vlastní. Kaptivní pojišťovny mohou působit buď ve formě klasické pojišťovny, nebo rizika mateřské společnosti pojišťují prostřednictvím frontingové pojišťovny ve formě komerční pojišťovny (forma tzv. kaptivní zajišťovny). Frontingová společnost pak daná rizika ceduje na příslušnou kaptivní zajišťovnu. [3]

Dalším typem ART je *pojišťovací pool*. Primárním cílem pojišťovacích a zajišťovacích poolů je sdružování pojistitelů, zajišťovatelů a dalších subjektů, a tím získat kapacitu pro krytí velkých rizik. Členové poolu sestavují velký pojistný kmen pro dané riziko. [3]

Dalším nástrojem, který je v poslední době čím dál více využíván jsou *kapitálové trhy*. Na kapitálovém trhu se získávají zdroje pomocí emise cenných papírů vázaných na pojištění. Těmito cennými papíry mohou být například pojistné dluhopisy, pojistné deriváty a jiné nástroje.

V posledních letech vznikly na těchto trzích nové nástroje umožňující zvýšení zajištné kapacity trhu. Zejména v souvislosti s katastrofickými riziky byly vyvinuty nové finanční deriváty. Příkladem jsou *pojišťovací futures*, jejichž účelem je přenos katastrofických škod na světové finanční trhy s předpokladem, že tyto trhy mají schopnost přijmout určitá rizika lépe než zajištné trhy. V první vývojové fázi byl podkladovým aktivem těchto derivátů škodní průběh emitující pojišťovny, později byly deriváty odvozovány od jiných ukazatelů, nezávislých na výsledcích emitující pojišťovny. Těmito ukazateli jsou obecně dluhopisy vydané pojišťovnou nebo zajišťovnou, u kterých dojde k výplatě v případě, že nedojde ke katastrofické škodě ve stanovené výši. V opačném případě pak k výplatě nedochází a investoři se podílejí na vzniklých ztrátách. Dalším příkladem jsou škodní indexy, u kterých nedochází k výplatě kupónu v případě, že škoda přesáhne hodnotu indexu. Dalšími příklady mohou být *katastrofické dluhopisy* (tzv. CAT bondy) nebo *pojistné swapy*, na základě kterých dochází k vzájemné výměně skupin pojistných smluv mezi pojišťovnami. [9]

### 3.3 Vyrovnávací rezerva

Tuto rezervu upravuje zákon č. 277/2009 Sb. § 64. Typy pojištění, kterých se tato rezerva týká jsou uvedeny v části B v bodech 14 a 15 v příloze č. 1 tohoto zákona. Vyrovnávací rezerva je určena k vyrovnání technické ztráty nebo nadprůměrného škodního průběhu, se kterým souvisí vyšší náklady na pojistná plnění. Tato rezerva je tvořena pro dané účetní období. Konkrétní odvětví pojištění, kterých se tato rezerva týká jsou uvedeny v příloze č. 1 Zákona o pojišťovnictví č. 277/2009 Sb, Vyrovnávací rezerva, § 64. Vyrovnávací rezervu tvoří pojišťovna u daného odvětví neživotního pojištění pouze v případě, že předepsané pojistné za dané účetní období je

- a) rovno nebo vyšší než 4 % celkového objemu předepsaného pojistného za dané účetní období, nebo
- b) vyšší než 67,5 mil. Kč. [13]

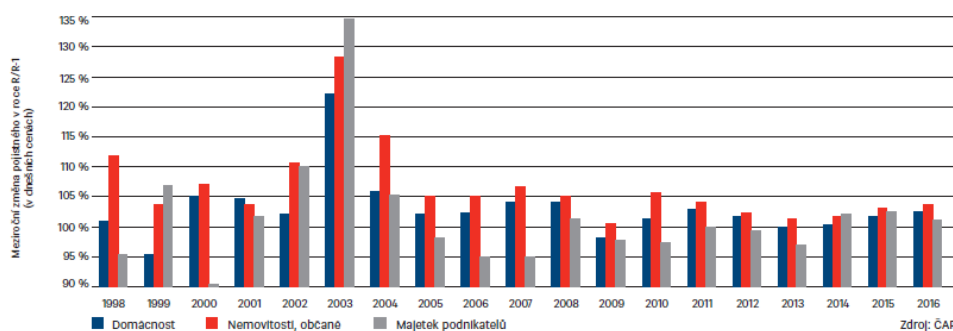
Metody výpočtu jsou dány vyhláškou a nelze je libovolně měnit. V případě, že pojišťovna vykonává též zajišťovací činnost, vytváří vyrovnávací rezervu pro každou činnost zvlášť. Pokud se pojišťovna současně zabývá pojištěním odvětví v části B v bodech 14 a 15 z přílohy č. 1 tohoto zákona, pak vypočte rezervu pro každé odvětví zvlášť. Výsledná vyrovnávací rezerva je pak dána součtem těchto vypočtených rezerv. [13]

Podle direktiv EU je pojistitel povinen vytvářet tuto rezervu pouze pro pojištění úvěru. Nicméně v některých zemích je orgány dozoru určena povinnost vytvářet výkyvovou rezervu i pro jiné druhy neživotního pojištění. Například v Německu je povinné tvořit tuto rezervu pro všechny druhy neživotního pojištění. [2]

Pojišťovna tvoří vyrovnávací rezervu z bezpečnostní přírážky k netto pojistnému u daného typu pojištění. Bezpečnostní přírážka představuje potřebu krýt výkyvy od průměrných pojistných plnění. [10]

### 3.4 Předcházení extrémním škodám v průběhu upisování rizik

Pojišťovny se snaží předejít vysokým škodám již v průběhu upisování rizik, a to například zpřísněním pojistných podmínek nebo omezením či vyloučením rizik přijatých do pojištění. Příkladem může být vyloučení z pojištění škod způsobených teroristickým útokem, které jsou dopředu velmi obtížně identifikovatelné a na pojišťovnu pak mají vysoký finanční dopad. Dále je na místě vysoká obezřetnost při uzavírání nových pojistných smluv, zejména neživotního pojištění. Dalším nástrojem předcházení těchto škod je působení na prevenci přímo u klientů, což zvyšuje i jejich opatrnost.



Obrázek 6: Vývoj předepsaného pojistného v období 1998-2016

Zdroj: ČAP

O snaze pojišťoven vyvarovat se nepříznivého škodního průběhu vypovídá i obrázek 6, který zobrazuje meziroční změny předepsaného pojistného v jednotlivých letech v období 1998-2016

v procentech. Jedná se o data z pojišťoven, které jsou členy ČAP. Z tohoto grafu je patrné, že pojišťovny prudce navýšily předepsané pojistné z majetkových pojištění v roce 2003, tedy po katastrofálních povodních z roku 2002. V důsledku těchto povodní pojišťovny roce 2003 zpřesnily rizikové modelování (viz využití katastrofických modelů, které je popsáno dále) a reagovaly na nárůst sazeb zajistného. [11]

### 3.4.1 Katastrofické modely

Při upisování rizik majetkového pojištění může pojišťovna využít katastrofické modely, jako jsou například povodňové mapy, mapy větrných oblastí nebo mapy sněhových oblastí. Tyto modely jsou použity pro stanovení rizikové přírážky pro konkrétní pojistnou smlouvu. Katastrofické modely jsou používány k odhadu rozdělení katastrofických škod. [6]

Jedním z katastrofických modelů jsou povodňové mapy, které byly vyvíjeny na popud zvýšení četnosti a intenzity povodní v ČR v posledních dvou dekadách. Pracují na principu velkého počtu simulací povodňových událostí, které by mohly nastat během jednoho roku. Těmto událostem jsou následně přiřazeny pravděpodobnosti výskytu a hodnota hazardu. Z hodnoty hazardu se určí relativní škoda. Tyto mapy jsou v pojišťovnách využívány pro stanovení limitů a ceny pro zajištění. Dále vstupují do stanovení předpokladů pro konkrétní pojistné smlouvy, čímž snižují nejistotu upisovacího procesu. [6]

V rámci tohoto modelu jsou zmapovány všechny významné vodní toky v ČR. Jsou zde stanoveny čtyři rizikové zóny, a podle toho, ve které zóně má daný klient nemovitost, je mu pojistné navýšeno o příslušnou rizikovou přírážku. Aplikace je veřejně dostupná na webu ČAP. Každý občan si zde může zadat místo, kde má nemovitost a na základě toho je mu bezplatně zaslána informace o nebezpečí povodně v dané zóně. [4]

### 3.4.2 Spoluúčast

Spoluúčast představuje částku, kterou se pojištěný podílí na výši pojistného plnění. Rozlišujeme tři formy – excedentní franšiza, integrální franšiza a procentní spoluúčast. *Excedentní franšiza* je částka, kterou odečítáme od pojistného plnění. Pojištěný tedy hradí škody až do výše excedentní franšizy. *Integrální franšizou* rozumíme částku, do jejíž výše pojišťovna neposkytuje pojistné plnění. Nad tuto částku pak pojišťovna vyplácí pojistné plnění ve výši škody. Vy-

užitím integrální franšizy chce pojišťovna vyloučit z pojištění drobné škody. *Procentní spoluúčast* znamená, že se pojištěný podílí na úhradě škody určitým procentem. Od pojistného plnění je tedy odečtena částka odpovídající tomuto procentu. [10]

### 3.4.3 Diferenciace netto pojistného

Tento přístup je často využíván v praxi. Jedná se o výpočet netto pojistného na základě určitých faktorů, tzv. *tarifních proměnných*, na základě kterých pojišťovna vytváří tzv. tarifní třídy. *Tarifní třídy* představují homogenní skupiny smluv, pro které je pojištěné riziko přibližně stejné. Příkladem tarifních proměnných v případě pojištění majetku může být umístění objektu (velké město, obec apod.), úroveň zabezpečení objektu a druh majetku umístěného v objektu. V případě životního pojištění mohou být tarifními proměnnými věk pojištěného, pohlaví pojištěného a jeho zdravotní stav a životní styl. Protože diferenciace netto pojistného znamená určení netto pojistného pro každou pojistnou smlouvu zvlášť, je také spojena s vyššími správními náklady. [10]

*Bonus-malus systém* představuje určitou následnou diferenciaci na základě skutečného škodního průběhu. Bonus představuje slevu na pojistném v případě bezeškodného průběhu. Malus představuje přírůstek k pojistnému v případě častého výskytu škod.

## 4 MODELOVÁNÍ ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOTI VÝŠKY ŠKOD

### 4.1 Rozdělení výšky pojistných plnění

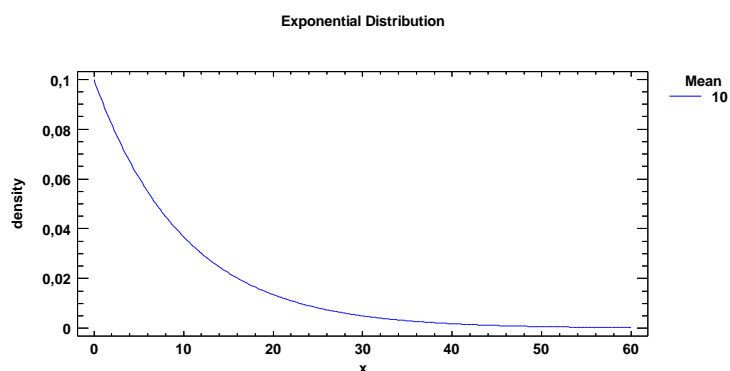
Při modelování individuálních pojistných plnění vycházíme z předpokladu, že tato pojistná plnění mají určité společné vlastnosti. Příkladem může být to, že většina hodnot má nižší hodnotu, než je průměrné plnění, ačkoli jsou pravděpodobné i extrémní hodnoty, což vede k pravostranné asymetrii rozdělení a velkému rozptylu. Proto se jako rozdělení výšky pojistných plnění používají pravostranně zešikmená rozdělení.

#### 4.1.1 Exponenciální rozdělení

Prvním rozdělením, kterým je možné modelovat výšky pojistných plnění je exponenciální rozdělení s parametrem  $\lambda$ . Jeho výhodou je jednoduché funkční vyjádření jeho hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce a také jeho základních charakteristik. Jeho velkou nevýhodou však je to, že špatně modeluje interval nejnižších a nejvyšších hodnot. Proto se v praxi téměř nevyužívá, případně jen jako hrubá aproximace. [17]

Hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení je dána vztahem

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \lambda > 0. \quad (4.1.1)$$



Obrázek 7: Hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení

*Zdroj: STATGRAPHICS centurion XVI*

Pravděpodobnost nejvyšších hodnot konverguje k nule exponenciálně podle  $x$ , což je pro vysoké hodnoty pojistných plnění příliš rychle. Je to zřejmé z hustoty pravděpodobnosti, která je zobrazena na obrázku 7. [17]



### 4.1.2 Paretovo rozdělení

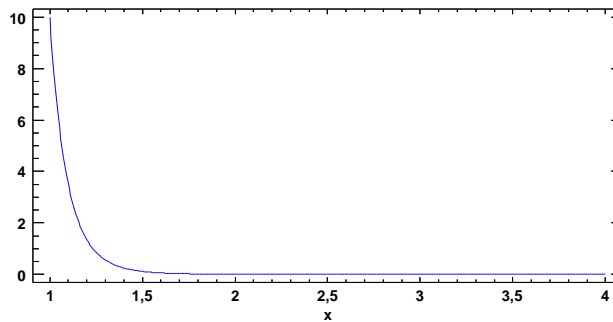
Paretovo rozdělení  $Pa(a; b)$  je vhodnější pro modelování vysokých hodnot, protože konverguje k nule pomaleji než exponenciální rozdělení. Proto se toto rozdělení používá pro modelování výšky pojistných plnění v těch oblastech pojištění, ve kterých existují extrémní hodnoty. Konvergenci pravděpodobnosti vysokých hodnot lze zpomalit tak, že bude konvergovat k nule stejně jako  $x^{-\alpha}$ . [17]

Pravděpodobnost vysokých hodnot je vyjádřena

$$P(X > x) = 1 - F(x). \quad (4.1.2)$$

Hustota pravděpodobnosti Paretova rozdělení má funkční vyjádření:

$$f(x) = \frac{b \cdot a^b}{x^{b+1}}, \quad x > 0, a > 0, b > 0. \quad (4.1.3)$$



Obrázek 8: Hustota pravděpodobnosti Paretova rozdělení

*Zdroj: STATGRAPHICS centurion XVI*

Na obrázku 8 lze vidět, že hustota pravděpodobnosti Paretova rozdělení konverguje k nule pomaleji než exponenciální rozdělení. [17]

### 4.1.3 Weibullovo rozdělení

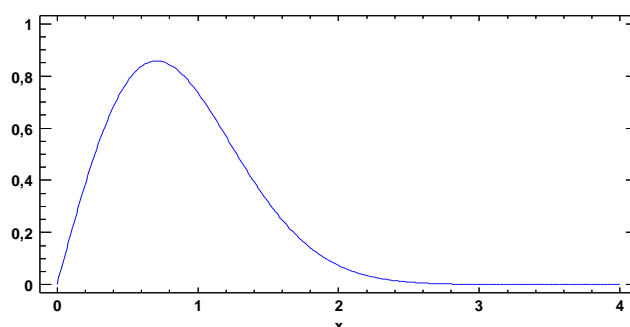
Stejně jako v případě Paretova rozdělení, i zde je cílem zpomalit konvergenci pravděpodobnosti nejvyšších hodnot. Položíme

$$P(X > x) = e^{-cx^\gamma}, \quad \gamma > 0. \quad (4.1.4)$$

Poté mohou nastat 2 případy. Pro  $\gamma < 1$  bude průběh hustoty v pravé části rozdělení mezi exponenciálním a Paretovým rozdělením. Pro  $\gamma > 1$  bude hustota konvergovat ještě rychleji než exponenciální rozdělení. Proto se toto rozdělení používá pro  $0 < \gamma < 1$ . [17]

Hustota pravděpodobnosti, která je zobrazena na obrázku 9, je dána vztahem

$$f(x) = c\gamma x^{\gamma-1} e^{-cx^\gamma}, \quad x > 0, \quad c > 0, \quad \gamma > 0. \quad (4.1.5)$$

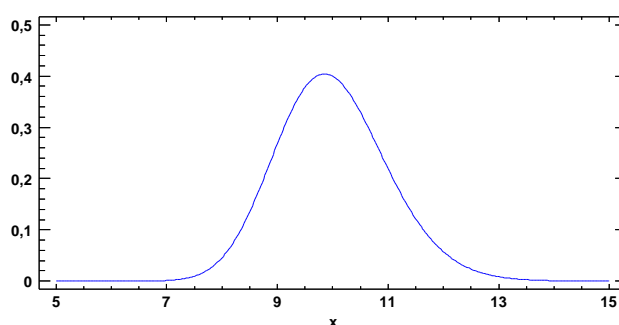


Obrázek 9: Hustota pravděpodobnosti Weibullova rozdělení

*Zdroj: STATGRAPHICS centurion XVI*

Ačkoliv Paretovo rozdělení lépe modeluje pravděpodobnost vysokých hodnot, je někdy nahrazeno Weibullovým rozdělením, u kterého se snadněji určuje střední hodnota a rozptyl. [17]

#### 4.1.4 Lognormální rozdělení



Obrázek 10: Hustota pravděpodobnosti lognormálního rozdělení

*Zdroj: STATGRAPHICS centurion XVI*

Náhodná veličina má lognormální rozdělení, jestliže její logaritmus má normální rozdělení. Pro toto rozdělení je typická malá pravděpodobnost nízkých hodnot, velká pravděpodobnost prostředních hodnot a opět malá pravděpodobnost vysokých hodnot, což je patrné z obrázku 10, kde je zobrazena hustota lognormálního rozdělení. [17]

Funkční vyjádření hustoty pravděpodobnosti je ve tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0. \quad (4.1.6)$$

### 4.1.5 Loglogistické rozdělení

Náhodná proměnná má loglogistické rozdělení s parametry  $\exp(\mu)$  a  $\sigma$ , jestliže její logaritmus má logistické rozdělení. [19]

Hustota pravděpodobnosti je znázorněna na obrázku 11 a je dána vztahem

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x} \frac{\exp(z)}{(1 + \exp(z))^2}, \text{ kde} \quad (4.1.7)$$

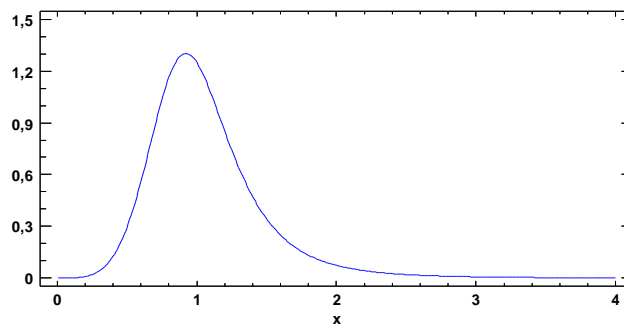
$$z = \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}, \quad x > 0, \sigma > 0. \quad (4.1.8)$$

Speciálním případem loglogistického rozdělení je tříparametrická varianta, která je vhodná v případě, že logaritmus náhodné veličiny má logistické rozdělení a je odečtena určitá hraniční hodnota  $\theta$ . [19]

Pro hustotu pravděpodobnosti tříparametrické podoby platí

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x} \frac{\exp(z)}{(1 + \exp(z))^2}, \text{ kde} \quad (4.1.9)$$

$$z = \frac{\ln(x - \theta) - \mu}{\sigma}, \quad x > \theta, \sigma > 0. \quad (4.1.10)$$



Obrázek 11: Hustota pravděpodobnosti loglogistického rozdělení

Zdroj: STATGRAPHICS centurion XVI

## 4.2 Metody grafické analýzy

S hledáním vhodného rozdělení, které modeluje sledovaná data, nám může pomoci grafická analýza. Pro grafickou analýzu jsou využívány různé typy grafů. Některé grafy je vhodné použít

na začátku analýzy pro získání základní představy o modelovaných datech, jiné slouží pro porovnání sledovaných dat a určitého předpokládaného rozdělení. Dále budou popsány některé grafické metody, jejich použití pak bude znázorněno v aplikační části této práce.

*Box plot*, neboli krabicový graf, je graf, který slouží pro zobrazení důležitých vlastností sledovaných dat. Zobrazuje data v rámci pěti statistik – minimum, dolní kvartil, medián, horní kvartil a maximum. Také je velmi vhodný pro indikování odlehlých hodnot a extrémů.

*Histogram* ilustruje rozdělení hodnot náhodné proměnné seskupením dat do stejně dlouhých intervalů, které zobrazuje pomocí sloupců. Výška sloupce pak značí počet pozorování v daném intervalu. V případě, že máme dostatečně velký vzorek dat, nám histogram dává poměrně přesnou představu o rozdělení, ze kterého data pochází.

Do histogramu je možné vložit křivku představující rozdělení pravděpodobnosti, což nám může pomoci při hledání vhodného rozdělení pravděpodobnosti.

*Kvantilový graf* (z angličtiny Quantile-Quantile plot, resp. Q-Q plot) je graf, který umožňuje posoudit shodu sledovaných dat s vybraným teoretickým rozdělením. Porovnává kvantilovou funkci teoretického rozdělení s kvantilovou funkcí dat. Jestliže hodnoty náhodné proměnné leží na přímce, která značí konkrétní teoretické rozdělení, pak je toto rozdělení pro modelování náhodné proměnné vhodné. Jestliže se body vzdalují od přímky, měli bychom hledat jiné, vhodnější, rozdělení.

Pro hodnoty náhodné veličiny platí  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . Na jedné ose jsou tedy zobrazeny hodnoty  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  a na ose druhé pak hodnoty teoretické distribuční funkce  $F$ .

### 4.3 Metody odhadu parametrů rozdělení

Dalším krokem při hledání vhodného rozdělení výšky pojistných plnění, resp. počtu pojistných plnění, je odhad parametrů těchto rozdělení. Parametry rozdělení odhadujeme pomocí výběrových údajů, tzn., že je odhadujeme pomocí neúplných informací.

První metodou je *metoda maximální věrohodnosti*. Pro tuto metodu je třeba nejprve definovat funkci věrohodnosti  $L(\Theta; x)$

$$L(\Theta; x) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \Theta). \quad (4.3.1)$$

Maximálně věrohodným odhadem je pak vektor  $\Theta$ , který maximalizuje funkci věrohodnosti.

Odhad parametrů pomocí této metody bývá v praxi často výpočetně náročný. Je proto vhodné pro výpočet využít počítačový software.

Další metodou je *metoda momentů*, jejíž princip spočívá v nahrazení charakteristik základního souboru příslušnými výběrovými charakteristikami.

Poslední metodou je *kvantilová metoda*. Při této metodě nahrazujeme kvantily základního souboru kvantily určenými ve výběrovém souboru. Obvykle se pro rozdělení s jedním parametrem používá medián a pro rozdělení se dvěma parametry horní a dolní kvartil.

Pro odhad parametrů rozdělení výšky pojistných plnění je vhodnější použít metodu maximální věrohodnosti, protože v případě použití metod momentů nebo kvantilů mají odhady parametrů z různých výběrových souborů vysokou variabilitu.

#### 4.4 Testy dobré shody

Třetím krokem při hledání vhodného rozhodnutí je ověření vhodnosti zvoleného rozdělení, pro které jsme v předchozím kroku odhadli parametry. Pro ověření vhodnosti daného rozdělení můžeme použít dva testy – Pearsonův  $\chi^2$ -test dobré shody a Kolmogorovův-Smirnovův test. V případech, kdy lze použít oba tyto testy, je silnějším Kolmogorovův-Smirnovův test.

Pearsonův  $\chi^2$ -test dobré shody vyžaduje dostatečně velký rozsah výběrového souboru, neboť je třeba data roztrždit do  $k$  tříd.

Princip *Pearsonova  $\chi^2$ -testu dobré shody* spočívá v porovnávání empirických a teoretických četností jednotlivých tříd.

V případě, že rozsah výběrového souboru není dostatečně velký pro  $\chi^2$ -test dobré shody, lze použít *Kolmogorovův-Smirnovův test*. Při použití tohoto testu vycházíme z náhodného výběru ze spojitého rozdělení  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , který je vzestupně upořádaný. Testovací kritérium porovnává hodnoty empirické a teoretické distribuční funkce v uvedených hodnotách náhodného výběru.

#### 4.5 Metody modelování extrémních škod

Nejprve je důležité vymezit pojem extrémní škody. Za extrém z matematického hlediska považujeme minimum nebo maximum. V této práci bude uvažováno o extrémní škodě jako o

škodě, která má vysoký finanční dopad na pojistitele a nízkou pravděpodobnost vzniku. Finanční dopad je vnímán jako výplata vysokého pojistného plnění, které výrazně překračuje průměrné pojistné plnění v rámci daného typu pojištění.

Extrémní škody jsou velmi významné a stále aktuální téma, proto se jim věnuje řada publikací, které s tímto tématem souvisí. K vypracování této práce byla použita publikace od Sanders, D. E. A., The modelling of extreme events [20], která se věnuje metodám modelování extrémních škod a využitím těchto metod v pojišťovnictví. O významu této problematiky svědčí i to, že se jí zabývají další významné publikace jako např. Boland, J. P., Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science [1] a Cipra T., Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví [3], která se zaměřuje zejména tomu, jak se pojišťovna může sama zajistit proti těmto škodám.

Chováním extrémních škod se zabývá Extreme Value Theory (EVT). Tato teorie původně vznikla pro oblasti hydrologie, techniky a astronautiky, v současné době je však využívána i v ekonomických oblastech. [12]

Pro pojišťovny je důležité modelovat pravděpodobnost vysokých hodnot pojistného plnění, proto nelze použít aproximaci normálním rozdělením, které pravděpodobnost vysokých hodnot příliš podhodnocuje. K modelování extrémních hodnot je vhodnější použít stabilní nebo subexponenciální rozdělení. Pro zjištění extrémů se používají zejména dvě metody:

- metoda blokového maxima
- metoda excedentů přes vysoký práh [12]

EVT využívá rozdělení extrémních hodnot. Tato rozdělení jsou limitními rozděleními výběrových maxim  $M_n$  stejně jako v případě normálního rozdělení, které je limitním rozdělením normovaných součtů nezávislých a identicky rozdělených náhodných veličin. [12]

Zásadním výsledkem této teorie je Fisher-Tippettova věta, jejíž význam je porovnatelný s významem centrální limitní věty v teorii pravděpodobnosti. Fisher-Tippettova věta charakterizuje limitní chování maxim a specifikuje konkrétní typy limitních rozdělení pro maxima náhodných veličin. [15]

**Věta 1.** (Fisher-Tippett) (podle [15], str. 6) *Předpokládejme posloupnost nezávislých a identicky rozdělených náhodných veličin  $X_1, X_2, \dots$  pocházející z neznámého rozdělení  $F$ . Označme maximum prvních  $n$  pozorování  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ . Dále předpokládejme, že můžeme najít posloupnost reálných čísel  $a_n > 0$  a  $b_n$  tak, že  $(M_n - b_n)/a_n$  je posloupnost normalizovaného maxima, konvergující k rozdělení*

$$P\{(M_n - b_n)/a_n \leq x\} = F_n(a_n x + b_n) \rightarrow H(x), \text{ pro } n \rightarrow \infty, \quad (4.5.1)$$

pro nějakou nedegenerující distribuční funkci  $H(x)$ . Pokud je splněna tato podmínka, říkáme, že  $F$  je maximální doménou přitažlivosti (angl. maximum domain of attraction, MDA)  $H$  a píšeme  $F \in MDA(H)$ .

Pak platí

$$F \in MDA(H) \Rightarrow H \text{ je typem } H_\xi \text{ pro nějaké } \xi. \quad (4.5.2)$$

#### 4.5.1 Metoda blokového maxima

Tato metoda pro určení maximálních hodnot využívá maximální hodnotu z  $n$  nezávislých hodnot v průběhu určitého časového období (rok, měsíc, den). [21]

Předpokládejme, že  $X_1, X_2, \dots, X_n$  jsou nezávislé a identicky rozdělené náhodné veličiny. Maximum z těchto hodnot označíme  $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  a nazýváme *blokovým maximumem*. Potom vhodným limitním rozdělením  $H(x)$  normovaného maxima je *zobecněné rozdělení extrémních hodnot* (angl. Generalised Extreme Value Distribution, zkr. GEV), definované pomocí distribuční funkce  $H_\xi$

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1 + \xi x\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right\}, & \text{pro } \xi \neq 0 \\ \exp\{-e^{-x}\}, & \text{pro } \xi = 0, \end{cases} \quad (4.5.3)$$

kde  $1 + \xi x > 0$  a  $H_\xi(x)$  nazýváme *zobecněnou distribuční funkcí extrémních hodnot*. [21]

Zobecněné rozdělení extrémních hodnot má podle Fisher-Tippetovy věty pouze tři formy – Fréchetovo, Weibullovo a Gumbelovo.

Platí

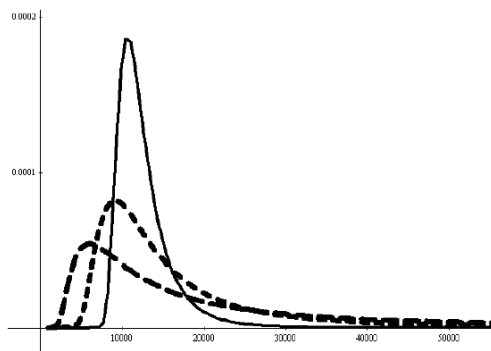
Fréchetovo rozdělení: pro  $\xi > 0$  je  $x > -\xi^{-1}$

Weibullovo rozdělení: pro  $\xi < 0$  je  $x < -\xi^{-1}$

Gumbelovo rozdělení: pro  $\xi = 0$  je  $x \in R$ . [21]

1. Fréchetovo rozdělení pravděpodobnosti je dáno hustotou pravděpodobnosti ve tvaru (podle [14])

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} \exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha\right), \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (4.5.4)$$



Obrázek 12: Hustota pravděpodobnosti Fréchetova rozdělení

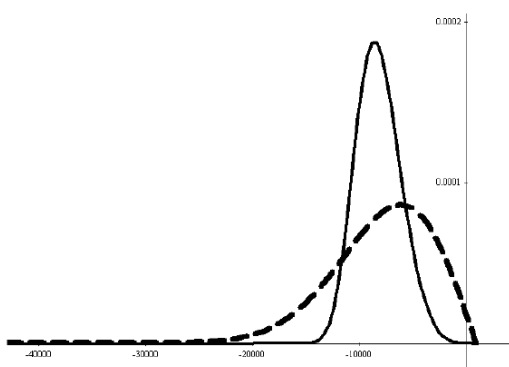
Zdroj: [20]

Pro  $\xi > 0$  má rozdělení těžší konec s nekonečným rozptylem a lze jej použít pro modelování extrémních škod v pojišťovnictví.

Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti je dáno hustotou pravděpodobnosti, která má tvar (podle [19])

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, \quad x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0. \quad (4.5.5)$$

Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti má konečnou horní hranici, která značí absolutní maximum, proto je možné toto rozdělení využít pro modelování věku člověka, který má horní hranici určenou jako maximální věk, kterého je možné se dožít. Obrázek 13 zobrazuje hustotu pravděpodobnosti Weibullova rozdělení pro  $\alpha = -5$  a  $-2$ ,  $\beta = 10$ . [20]



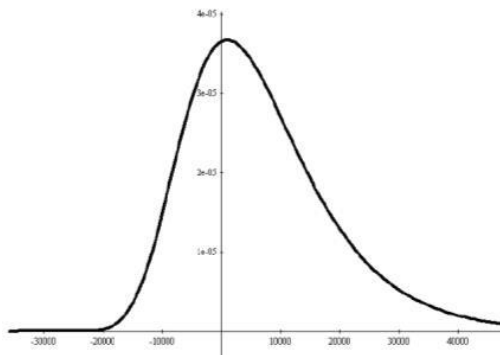
Obrázek 13: Hustota pravděpodobnosti Weibullova rozdělení

Zdroj: [20]



## 2. Gumbelovo rozdělení pravděpodobnosti

Hustotu pravděpodobnosti Gumbelova rozdělení s parametry  $\alpha = 1, \beta = 10$  zobrazuje obrázek 14.



Obrázek 14: Hustota pravděpodobnosti Gumbelova rozdělení

Zdroj: [20]

Funkční vyjádření hustoty pravděpodobnosti: (podle [12])

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} \exp\left[-e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right], -\infty < x < \infty, -\infty < \alpha < \infty, \quad (4.5.6)$$
$$0 < \beta < \infty.$$

Tvar rozdělení  $H_\xi$  je ovlivněn parametrem  $\xi$ . Kladná hodnota tohoto parametru indikuje těžký konec rozdělení. [21]

Typickým použitím GEV v pojišťovnictví může být odhad potenciálních maximálních ročních ztrát pro jednotlivé typy událostí nebo smluv, případně pro jednu pojistnou smlouvu. Před použitím tohoto rozdělení je nutné data uspořádat a očistit od sezónnosti a podobných vlivů. Důležité také je, aby data byla nezávislá. [20]

### 4.5.2 Metoda excedentů přes vysoký práh

Při této metodě je důležité nejprve určit hranici  $u$ , a za extrém jsou potom považovány všechny hodnoty, které tuto hranici překračují. [21]

Máme náhodnou veličinu  $X$  s distribuční funkcí  $F(x)$ . Pravý koncový bod rozdělení určíme jako

$$x_F = \sup\{x \in R; F(x)\}. \quad (4.5.7)$$

Potom rozdělení excedentů přes vysoký práh je dáno podmíněnou distribuční funkcí

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{\bar{F}(u)}, \quad (4.5.8)$$

kde  $\bar{F}(u)$  je doplňková distribuční funkce. Platí  $0 \leq u < x_F$ . [21]

Podmíněnou střední hodnotu nazýváme *funkcí průměrných excedentů přes práh* a definujeme jako

$$e(u) = E(X - u | x > u). \quad (4.5.9)$$

Podmíněná střední hodnota je funkcí měnícího se prahu  $u$  a udává průměrnou výšku očekávaného přesáhnutí prahu  $u$ .

Limitním rozdělením excedentů přes práh je *všeobecné Paretovo rozdělení GPD*. [21]

**Definice 1.** Říkáme, že spojitá náhodná proměnná  $X$  má všeobecné Paretovo rozdělení, jestliže má distribuční funkci pro  $1 + \xi x > 0$  definovanou následovně

$$G_\xi(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{pro } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x}, & \text{pro } \xi = 0. \end{cases} \quad (4.5.10)$$

Funkci  $G_\xi(x)$  lze zobecnit na dvojparametrickou, resp. tříparametrickou variantu

$$G_\xi(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{pro } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x/\beta}, & \text{pro } \xi = 0, \end{cases} \quad (4.5.11)$$

resp.

$$G_\xi(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x - \gamma}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{pro } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-(x-\gamma)/\beta}, & \text{pro } \xi = 0. \end{cases} \quad (4.5.12)$$

Parametr  $\beta = \beta(u)$  je závislý na hranici  $u$  a charakterizuje rozptýlenost, a  $\gamma$  je parametr polohy. [21]

Limitní rozdělení excedentů je dáno větou od Pickandse, Balkema a de Haana.

**Věta 2.** (Pickands, Balkem a de Haan) Funkce  $F_u(x)$  je distribuční funkcí excedentů přes práh  $u$  právě tehdy, když  $\forall \xi > 0$  existuje kladná funkce  $\beta = \beta(u)$  taková, že platí

$$\lim_{x \uparrow x_F} \sup_{0 \leq x \leq x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0, \quad (4.5.13)$$

kde  $x_F$  je pravý koncový bod distribuční funkce  $F_u$  a  $G_{\xi,\beta}$  je všeobecné Paretovo rozdělení. [21]

Parametr  $\zeta$  odpovídá parametru  $\zeta$  rozdělení GEV a určuje váhu konce rozdělení. Parametr  $\sigma$  závisí na hranici  $u$ . [21]

Nejdůležitějším problémem při této metodě je zvolení hranice  $u$ , protože na ní právě závisí rozdělení pravého konce. Platí, že s rostoucím  $u$  je aproximace zobecněným Paretovo rozdělením lepší. Obvykle je hranice  $u$  volena mezi 90. a 95. percentilem. [20]

## 4.6 Simulace extrémních hodnot pomocí kvantilových funkcí

### 4.6.1 Simulace pomocí kvantilových funkcí

Máme k dispozici uspořádaný náhodný výběr

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(r)}, \dots, x_{(n-1)}, x_{(n)},$$

kterému odpovídají náhodné proměnné

$$X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(r)}, \dots, X_{(n-1)}, X_{(n)}.$$

$X_{(n)}$  je náhodná proměnná, která představuje nejvyšší hodnotu z náhodného výběru s  $n$  pozorováními. Důležitou roli v modelování kvantilovými funkcemi hraje uspořádaná statistika. Máme distribuční funkci danou vztahem

$$F_{(n)}(x) = p_{(n)} = P(X_{(n)} \leq x), \quad (4.6.1)$$

která vyjadřuje pravděpodobnost, že  $n$  nezávislých pozorování náhodné veličiny  $X$  je menších nebo rovných hodnotě  $x$ . Tato pravděpodobnost je pro každé pozorování rovna  $p$ . [18]

Kvantilovou funkci dostaneme jako funkci inverzní k distribuční funkci, tedy

$$Q(p) = F^{-1}(x). \quad (4.6.2)$$

Dále určíme kvantilovou funkci pro  $r$ -tou pořadovou statistiku  $X_{(r)}$ . Pravděpodobnost, že  $r$ -tá hodnota je menší nebo rovna určité hodnotě  $z$  je vyjádřena jako hodnota distribuční funkce

$$p_{(r)} = F_{(r)}(z) = P(X_{(r)} \leq z). \quad (4.6.3)$$

Tento vztah vyjadřuje také pravděpodobnost, že alespoň  $r$  pozorování je menších nebo rovných  $z$ . Pravděpodobnost toho, že  $s$  pozorování je menších nebo rovno hodnotě  $z$  je  $p^s$ , kde  $p = F(z)$  je dáno binomickou formulí

$$P(s \text{ pozorování} \leq z) = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{(n-s)} \quad (4.6.4)$$

a

$$p_{(r)} = \sum_{s=r}^n \binom{n}{s} p^s (1-p)^{(n-s)}. \quad (4.6.5)$$

Tato funkce je neúplná beta funkce a značíme ji jako

$$p_{(r)} = I(p, r, n - r + 1). \quad (4.6.6)$$

Jestliže k této funkci existuje inverzní funkce, lze psát

$$p = BETAINV(p_{(r)}, r, n - r + 1). \quad (4.6.7)$$

Z posledních dvou vztahů dostáváme

$$Q_{(r)}(p_{(r)}) = Q(BETAINV(p_{(r)}, r, n - r + 1)), \quad (4.6.8)$$

což je pravidlo rozdělení uspořádaných statistik. [18]

Podle toho pravidla platí, že jestliže máme uspořádaný výběrový soubor s  $n$  pozorováními pocházející s rozdělení vyjádřeného kvantilovou funkcí  $Q(p)$ , tak pro kvantilovou funkci  $r$ -té pořadové statistiky platí vztah (4.6.8). Protože  $BETAINV(.)$  je běžnou funkcí tabulkového procesoru Excel, můžeme kvantily pořadové statistiky vyjádřit přímo z kvantilové funkce. Pak například pro medián ( $p_{(r)} = 0,5$ ) platí  $Q(BETAINV(0,5, r, n - r + 1))$ . [18]

Téměř všechny výpočetní a statistické programové balíky poskytují uživateli poměrně snadný způsob pro generování náhodných čísel. Náhodným číslem je realizace náhodné veličiny, která pochází z určitého rozdělení pravděpodobnosti. Počítačové generátory obvykle poskytují hodnoty pocházející z intervalu  $[0,1]$ , které představují pozorování ze spojitého rovnoměrného rozdělení. Pro kvantilovou funkci rovnoměrného rozdělení na intervalu  $[0,1]$  platí

$$S(p) = p, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (4.6.9)$$

Většina generátorů náhodných čísel generuje nezávislé hodnoty  $u_1, u_2, \dots, u_n$  pocházející z rovnoměrného rozdělení na intervalu  $[0,1]$ . Takto generovaná náhodná čísla využíváme v pravděpodobnostním modelu, což nazýváme simulací. Základem simulace je tzv. *pravidlo Q-*

transformace, které říká, že pokud  $z = T(x)$  je neklesající funkce  $x$  a  $Q(p)$  je kvantilová funkce, pak  $T(Q(p))$  je také kvantilová funkce. [18]

Hodnoty  $x$  pocházející z libovolného rozdělení s kvantilovou funkcí  $Q(p)$  můžeme simulovat pomocí vztahu

$$x_i = Q(u_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.6.10)$$

kde  $u_1, u_2, \dots, u_n$  jsou simulované hodnoty pocházející z rovnoměrného rozdělení na intervalu  $[0,1]$ . Neklesající tvar  $Q(\cdot)$  nám zaručí, že hodnoty  $x_i$  jsou uspořádané. [18]

Kvantilová funkce poskytuje jednoduchý způsob simulace hodnot z rozdělení, jehož explicitní funkcí je  $p$ . [18]

#### 4.6.2 Simulace extrémních hodnot

Simulace pomocí kvantilových funkcí se velmi často využívá pro simulování extrémních hodnot, tedy hodnot z pravého konce rozdělení. Výhodou je, že lze simulovat pouze nejvyšší hodnoty bez nutnosti simulování prostředních hodnot daného rozdělení. [18]

Předpokládejme pravý konec rozdělení. Rozdělení pravého konce je dáno  $Q\left(p^{\frac{1}{n}}\right)$ . Nejvyšší hodnoty můžeme simulovat jako  $x_{(n)} = Q(u_{(n)})$ , kde  $u_{(n)} = v_n^{1/n}$  a  $v_n$  je náhodné číslo generované z intervalu  $[0,1]$ . Nyní generujme množinu transformovaných proměnných jako

$$\begin{aligned} u_{(n)} &= v_n^{1/n} \\ u_{(n-1)} &= (v_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \cdot u_{(n)} \\ u_{(n-2)} &= (v_{n-2})^{\frac{1}{n-2}} \cdot u_{(n-1)} \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

kde  $v_i, i = n, n-1, n-2, \dots$  jsou simulované nezávislé hodnoty, které pocházejí z rovnoměrného rozdělení a nejsou uspořádané. Hodnoty  $u_i, i = n, n-1, n-2, \dots$  tvoří klesající posloupnost hodnot, pro kterou platí  $u_{i-1} < u_i$ . [18]

Uspořádané statistiky nejvyšších hodnot náhodné veličiny  $X$  jsou simulované pomocí

$$\begin{aligned} x_{(n)} &= Q(u_{(n)}) \\ x_{(n-1)} &= Q(u_{(n-1)}) \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

$$x_{(n-2)} = Q(u_{(n-2)})$$

...

Ve většině studií, zabývajících se simulací, je generováno  $n$  pozorování a analýza se opakuje  $m$ -krát pro získání představy o jejich chování. Další používanou technikou může být simulace jednoho vzorku dat, nazývaného *profil*. Takový ideální profil je možné získat například pomocí mediánů  $M_r$  pro  $r = 1, 2, \dots, n$ . [18]

## 5 APLIKACE METOD MODELOVÁNÍ EXTRÉMNÍCH ŠKOD

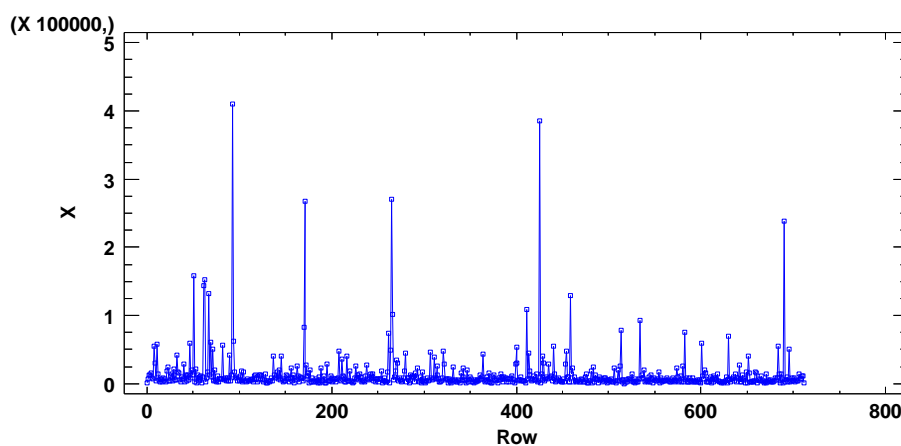
Následující část se bude zabývat aplikací metod popsanych v předchozí části. Budou analyzovány údaje o individuálních pojistných plnění z majetkového pojištění za Pardubický kraj, kde příčinou vzniku škody byla vichřice. Jedná se o orkán Herwart, který se prohnal celou Českou republikou v říjnu 2017 a napáchal více než 18 000 škod (v rámci ČP).

V souvislosti s touto vichřicí byla v rámci České pojišťovny a pojišťovny Generali vyhlášena kalamita I. stupně pro škody vzniklé v období od 28. října do 30. října 2017, kde příčinou byla vichřice, povodně a záplavy, deště, pád stožáru a stromu, blesk, sesuv půdy a krupobití. [7]

Jako další příklady nejničivějších vichřic z předchozích let lze uvést orkán Kyrill z roku 2007, kdy Česká pojišťovna evidovala 43 000 pojistných událostí v celkové výši 827 mil. Kč, nebo vichřici Emma, kdy bylo nahlášeno 18 000 pojistných událostí v celkové výši 500 mil. Kč. [8]

### 5.1 Základní informace o datech

Prvním krokem analýzy je grafická analýza dat. Grafické zobrazení výšek individuálních pojistných plnění je vidět na obrázku 15, kde na ose  $x$  jsou jednotlivé škody a na ose  $y$  jsou pak jejich výšky ve 100 000 Kč. Tento graf umožňuje vizuálně identifikovat extrémní hodnoty a jejich rozložení.



Obrázek 15: Graf individuálních pojistných plnění

Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI

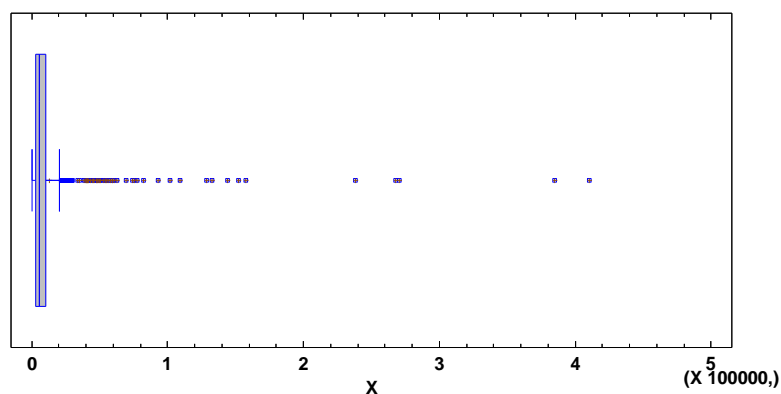
Základní představu o případném vhodném rozdělení lze získat na základě základních charakteristik dat, Box Plotu a histogramu.

Tabulka 4: Výběrové charakteristiky výšky škod

Count	710
Average	12 913,50
Median	5 956,5
Variance	9,75E+08
Standard deviation	31 228,30
Coeff. of variation	241,83%
Standard error	1 171,98
Minimum	478
Maximum	410 569
Range	410 091
Lower quartile	3 220
Upper quartile	10 705
Skewness	8,14445
Kurtosis	82,5637

Zdroj: vlastní zpracování podle STATGRAPHICS Centurion XVI

Box-and-Whisker Plot



Obrázek 16: Box plot výšky pojistných plnění

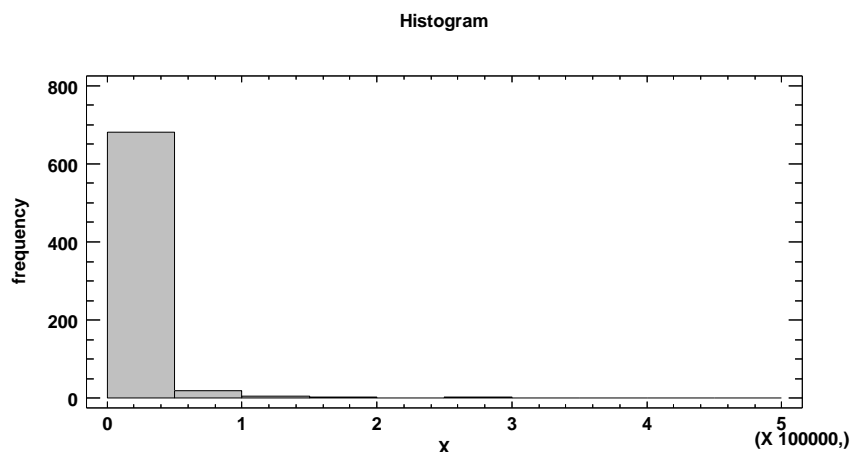
Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI

Na obrázku 16 je vidět zobrazení dat v rámci pěti základních charakteristik. Box (šedý obdélník), značící rozpětí mezi dolním a horním kvantilem, není příliš široký. Svislá čára v obdélníku znázorňuje medián a vlevo a vpravo od obdélníku je znázorněna minimální a maximální hodnota. Body vyznačené za maximální hodnotou značí odlehlé a extrémní hodnoty. Odlehlými body jsou všechny body, které jsou více než 1,5násobkem kvartilového rozpětí (šířka boxu).



Tyto body jsou znázorněny bodovými značkami. Všechny body, které jsou více než trojnásobkem kvartilového rozpětí jsou nazývány vzdálené odlehlé hodnoty.

V tomto případě je vidět, že se jedná o asymetrický vzorek dat, protože se údaje rozšiřují více za mediánem než před ním. Dále je zde poměrně mnoho odlehlých hodnot.



Obrázek 17: Histogram výšky pojistných plnění

*Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI*

Obrázek 17 zobrazuje výšky pojistných plnění roztríděné do 10 tříd, přičemž šířka jednoho intervalu je 50 000 Kč. Sloupce pak představují četnosti pozorování v jednotlivých intervalech. Z výběrových charakteristik (tabulka 4) a histogramu je zřejmé, že většina škod má malé hodnoty s velkou pravděpodobností vzniku, ale vyskytují se zde také extrémní hodnoty s menší pravděpodobností výskytu. Z toho vyplývá vysoká variabilita dat, což lze odvodit i z hodnoty rozptylu a variačního koeficientu. Dále je z histogramu zřejmé, že bude vhodné data modelovat nějakým pravostranně zešikmeným rozdělením.

## 5.2 Hledání vhodného rozdělení

Tato část se bude zabývat hledáním vhodného rozdělení pravděpodobnosti, které by spolehlivě modelovalo výšky škod. Pro analýzu bude využit statistický software STATGRAPHICS Centurion XVI. Pro testování vhodnosti rozdělení bude použit Kolmogorovův-Smirnovův test. Hladina významnosti bude zvolena na úrovni  $\alpha = 0,05$ .

Jako první bude otestováno exponenciální rozdělení. Bude tedy testována hypotéza  $H_0$ : Výšky škod mají exponenciální rozdělení pravděpodobnosti. Výsledek Kolmogorovova-Smirnovova testu je v tabulce 5.  $P$ -hodnota v tomto případě vyšla velmi blízká nule, proto lze psát, že se nule přibližně rovná. Na základě  $p$ -hodnoty lze se spolehlivostí 95 % nulovou hypotézu

zamítnout a říci, že výšky škod nemají exponenciální rozdělení. Z toho je zřejmé, že exponenciální rozdělení skutečně není vhodné pro modelování výšky pojistných plnění v případě, kde se vyskytují extrémní hodnoty.

Tabulka 5: K-S test, exponenciální rozdělení

	<i>Exponential</i>
DPLUS	0,194768
DMINUS	0,0657938
DN	0,194768
P-Value	0,0

*Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI*

Jako druhé v pořadí bude otestováno Pareto rozdělení pravděpodobnosti, které by mělo být pro modelování vhodnější. Nyní se tedy testuje hypotéza  $H_0$ : Výšky škod mají Pareto rozdělení pravděpodobnosti. Výstup Kolmogorovova-Smirnovova testu pro jednoparametrickou a dvouparametrickou variantu Pareto rozdělení zachycuje tabulka 6.

Tabulka 6: K-S test, Pareto rozdělení

	<i>Pareto</i>	<i>Pareto (2-parameter)</i>
DPLUS	0,25772	0,133102
DMINUS	0,533262	0,321936
DN	0,533262	0,321936
P-value	0,0	0,0

*Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI*

Jak je patrné z  $p$ -hodnoty, která opět vyšla velmi blízká nule, ani jednoparametrická varianta ani dvouparametrická varianta Pareto rozdělení není vhodná pro modelování použitých dat. Na základě  $p$ -hodnoty lze nulovou hypotézu se spolehlivostí 95 % zamítnout. Výšky pojistných plnění nepocházejí z Pareto rozdělení.

Jako další bude otestováno Weibullovo rozdělení, které by také mělo dobře modelovat výšky škod při existenci extrémních hodnot. Bude testována hypotéza  $H_0$ : Výšky škod mají Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti. Tabulka 7 obsahuje výstup Kolmogorovova-Smirnovova testu.

Tabulka 7: K-S test, Weibullovo rozdělení

	<i>Weibull</i>
DPLUS	0,127535
DMINUS	0,135645
DN	0,135645
P-Value	<b>0,0</b>

Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI

Opět na základě  $p$ -hodnoty lze zamítnout hypotézu  $H_0$ . Výšky škod nemají Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti.

Další rozdělení, které přichází v úvahu je lognormální rozdělení pravděpodobnosti. Nulová hypotéza má nyní tvar  $H_0$ : Výšky škod mají lognormální rozdělení pravděpodobnosti.

Tabulka 8: K-S test, lognormální rozdělení

	<i>Lognormal</i>
DPLUS	0,0616628
DMINUS	0,0337586
DN	0,0616628
P-Value	<b>0,00903978</b>

Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI

Z tabulky 8 je patrné, že  $p$ -hodnota je menší než hladina významnosti 0,05, proto opět lze nulovou hypotézu zamítnout a říct, že data nepochází z lognormálního rozdělení. To vyplývá i z toho, že pro lognormální rozdělení je typická malá pravděpodobnost nízkých a vysokých hodnot, a má tedy tendenci tyto hodnoty podhodnocovat.

Tabulka 9: K-S test, loglogistické rozdělení

	<i>Loglogistic</i>
DPLUS	0,0225155
DMINUS	0,0327761
DN	0,0327761
P-Value	<b>0,437278</b>

Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI

Jako poslední je otestováno loglogistické rozdělení pravděpodobnosti. Nyní má nulová hypotéza tvar  $H_0$ : Výšky škod mají loglogistické rozdělení pravděpodobnosti. Bude testována jak dvouparametrická varianta, tak i tříparametrická.

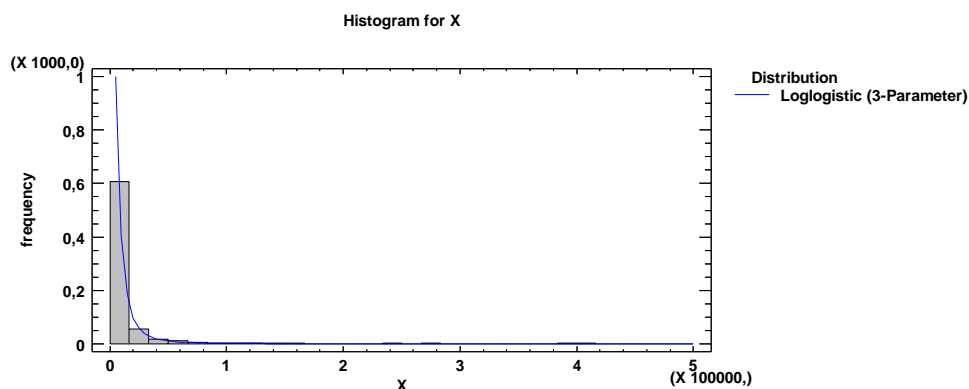
V tabulce 9 je vidět, že v tomto případě je  $p$ -hodnota vyšší než zvolená hladina významnosti a nulovou hypotézu tedy nelze zamítnout. Lze říci, že s 95% spolehlivostí pocházejí data z loglogistického rozdělení.

Tabulka 10: K-S test, tříparametrické loglogistické rozdělení

	<i>Loglogistic (3-Parameter)</i>
DPLUS	0,0196689
DMINUS	0,0239476
DN	0,0239476
P-Value	<b>0,810184</b>

Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI

Z tabulky 10 je patrné, že vhodná je i tříparametrická varianta loglogistického rozdělení pravděpodobnosti. Opět tedy hypotézu  $H_0$  nelze zamítnout a lze říci, že data pochází z tříparametrického loglogistického rozdělení pravděpodobnosti.



Obrázek 18: Grafické porovnání shody dat s loglogistickým rozdělením

Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI

Při porovnání  $p$ -hodnoty obou variant loglogistického rozdělení, je zřejmé, že vyšší  $p$ -hodnota je u tříparametrické varianty. Pro ověření shody poslouží histogram proložený křivkou loglogistického rozdělení. Tento histogram je zobrazen na obrázku 18.

Na základě Kolmogorovova-Smirnovova testu i podle grafického porovnání je možné s tříparametrickým loglogistickým rozdělením pracovat dále.

Tabulka 11: Loglogistické rozdělení s odhadnutými parametry

Loglogistic (3-Parameter)
median = $\mu$ = 5384,86
shape = $\sigma$ = 0,622965
lower threshold = $\theta$ = 449,913

*Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI*

Dalším krokem analýzy je odhad parametrů tohoto rozdělení. Pro výpočet opět bude využit STATGRAPHICS Centurion XVI, který pro odhad parametrů využívá metodu maximální věrohodnosti, která byla blíže popsána v části 4.3. Hodnoty parametrů jsou v tabulce 11.

### 5.3 Metoda excedentů přes vysoký práh

Pro modelování extrémních hodnot bude použita metoda excedentů přes vysoký práh, která byla teoreticky popsána v části 4.5.2. Tato metoda bude použita, protože data pocházejí z krátkého časového úseku a není možné pro určení extrémních hodnot použít metodu blokového maxima. Pomocí této metody bude nalezen vhodný model pro ty škody, které přesáhnou předem určenou hranici  $u$ . Tyto škody mají na pojišťovnu závažný dopad, proto je velmi důležité odhadnout vhodný model.

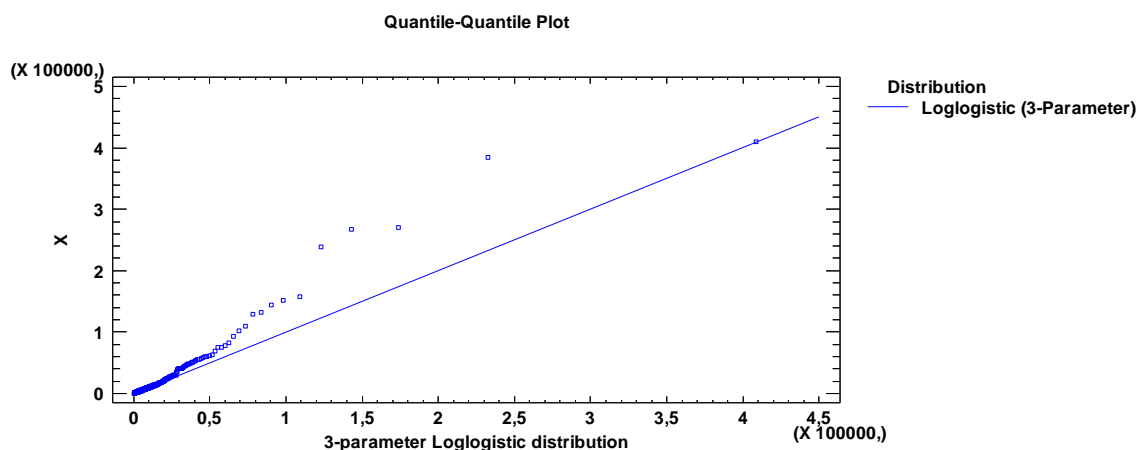
Jak bylo řečeno v části 4.5.2, pro určení hranice  $u$  je vhodné použít hodnotu mezi 90. a 95. percentilem. Pro určení hranice  $u$  budou využity percentily vypočtené v tabulce 12. Hranice bude zvolena na úrovni  $u = 25\ 000$ .

Tabulka 12: Percentily

Percentiles	
90,00 %	23 443
91,00 %	25 607
92,00 %	28 265
93,00 %	29 923
94,00 %	40 351
95,00 %	45 250

*Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI*

Dále je možné pro zvolení vhodné hranice  $u$  použít kvantilový graf, který zobrazuje shodu s tříparametrickým loglogistickým rozdělením (obrázek 19). Z grafu je patrné, že hodnoty kopírují loglogistické rozdělení přibližně k hodnotě 50 000. Nad touto hodnotou začínají být roztroušené. Na základě tohoto bude zvolena hranice  $u = 50\,000$ .



Obrázek 19: Kvantilový graf empirických údajů a loglogistického rozdělení

*Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI*

Pro hranici  $u = 25\,000$  je k dispozici 67 pozorování.

Nejprve bude nalezeno vhodné rozdělení pravděpodobnosti pro tyto hodnoty. Opět k tomu bude použit software STATGRAPHICS Centurion XVI a pro testování vhodnosti rozdělení znovu Kolmogorovovův-Smirnovův test. Hladina významnosti stejně jako v předchozí části bude  $\alpha = 0,05$ .

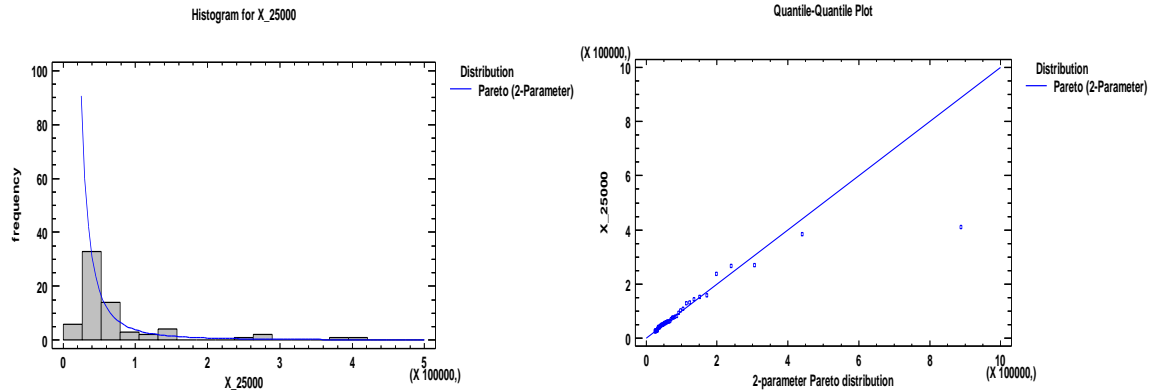
Tabulka 13: Výstup Kolmogorovova-Smirnova testu pro jednotlivá rozdělení

	DPLUS	DMINUS	DN	P-Value
Exponential	0,15941	0,287614	0,287614	3,07E-05
Pareto	0,305634	0,604935	0,604935	0
Pareto (2-Parameter)	0,069034	0,121929	0,121929	<b>0,273157</b>
Weibull	0,203844	0,220226	0,220226	0,0030101
Loglogistic	0,080047	0,136371	0,136371	0,165532
Loglogistic (3-Parameter)	0,061225	0,185951	0,185951	0,0194432
Lognormal	0,151628	0,131375	0,151628	0,0918491

*Zdroj: úprava podle STATGRAPHICS Centurion XVI*

Z tabulky 13, která zobrazuje výstupy Kolmogorovova-Smirnova testu pro jednotlivá rozdělení pravděpodobnosti, je zřejmé, že v případě exponenciálního, Paretova, Weibullova a tříparametrického loglogistického rozdělení je  $p$ -hodnota nižší než hladina významnosti  $\alpha$ . Je tedy

možné konstatovat, že výšky škod nemají ani jedno z těchto rozdělení. Naopak vhodným modelem může být dvouparametrické Pareto, loglogistické a lognormální rozdělení, u kterých je  $p$ -hodnota vyšší než hladina významnosti  $\alpha$ . Nejvyšší  $p$ -hodnota pak je u dvouparametrického Pareto rozdělení, proto je možné říci, že toto rozdělení nejlépe modeluje hodnoty nad hranicí  $u = 25\,000$ .



Obrázek 20: Grafické porovnání shody s Paretovým rozdělením

*Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI*

Pro ověření shody s dvouparametrickým Paretovým rozdělením lze použít histogram proložený křivkou Pareto rozdělení a kvantilový (Q-Q) graf, který porovnává kvantilovou funkci dat (osa  $x$ ) s kvantilovou funkcí Pareto rozdělení (osa  $y$ ). Oba tyto grafy jsou zobrazeny na obrázku 20.

Dalším krokem bude odhad parametrů dvouparametrického Pareto rozdělení. Parametry odhadnuté metodou maximální věrohodnosti jsou v tabulce 14.

Tabulka 14: Pareto rozdělení s odhadnutými parametry

Pareto (2-Parameter)
shape = b = 1,28633
lower threshold = a = 25000,0

*Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI*

Pro hranici  $u = 50\,000$  je k dispozici 30 hodnot, pro které bude opět pomocí Kolmogorova-Smirnovova testu nejprve nalezeno vhodné rozdělení pravděpodobnosti.

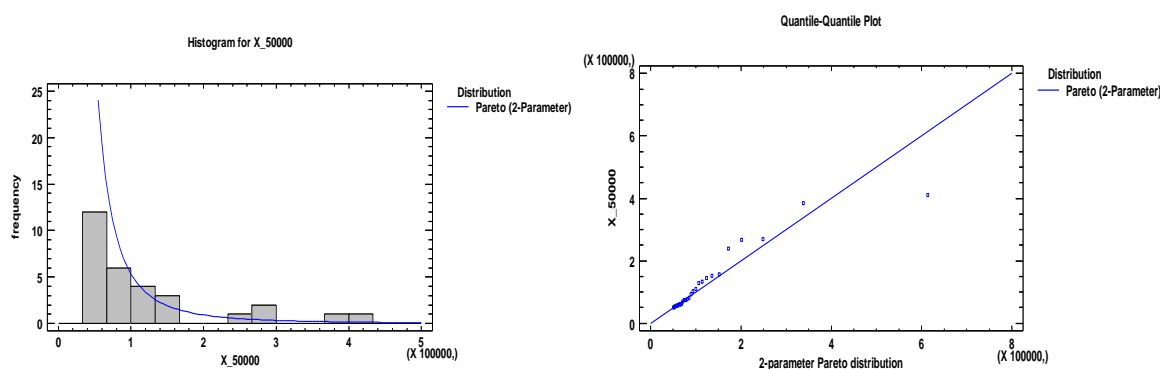
Tabulka 15: Výstup Kolmogorovova-Smirnovova testu pro jednotlivá rozdělení

	DPLUS	DMINUS	DN	P-Value
Exponential	0,105513	0,342404	0,342404	<b>0,00139371</b>
Pareto	0,323805	0,610903	0,610903	<b>0</b>
Pareto (2-Parameter)	0,125214	0,0930154	0,125214	<b>0,715957</b>
Weibull	0,186832	0,217488	0,217488	0,106519
Loglogistic	0,139744	0,171024	0,171024	0,32689
Loglogistic (3-Parameter)	0,0649497	0,0953843	0,0953843	0,0940535
Lognormal	0,175057	0,155029	0,175057	0,299644

Zdroj: úprava podle STATGRAPHICS Centurion XVI

Z tabulky 12 je zřejmé, že nejvhodnějším modelem, tedy rozdělením s nejvyšší  $p$ -hodnotou, je dvouparametrické Pareto rozdělení. Jedinými rozděleními, která mají  $p$ -hodnotu menší, než je hladina významnosti  $\alpha$  jsou exponenciální a Pareto s jedním parametrem.

Opět pro znázornění shody s Paretovým rozdělením bude vykreslen histogram a Q-Q graf (obrázek 21).



Obrázek 21: Grafické porovnání shody s Paretovým rozdělením

Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI

Dalším krokem bude odhad parametrů dvouparametrického Pareto rozdělení. Parametry odhadnuté metodou maximální věrohodnosti jsou v tabulce 16.

Tabulka 16: Pareto rozdělení s odhadnutými parametry

Pareto (2-Parameter)
shape = <b>b</b> = 1,55582
lower threshold = <b>a</b> = 50000,0

Zdroj: STATGRAPHICS Centurion XVI

Při porovnání  $p$ -hodnoty pro Pareto rozdělení u obou zvolených hranic, je zřejmé, že jako optimální hranici lze zvolit hodnotu na úrovni  $u = 50\ 000$ . Hodnotu optimální hranice může



pojišťovna využít pro určení priority neproporcionálního zajištění. V této práci budou data nad hranicí 50 000 využita pro simulování 5 nejvyšších škod.

## 5.4 Simulace extrémních škod

Tato část se bude zabývat simulací 5 nejvyšších škod pomocí kvantilových funkcí. Jako výchozí bod budou využity výstupy vypočtené v části 5.3. Počet pozorování  $n = 30$ , což odpovídá počtu hodnot, které jsou k dispozici při zvolené hranici  $u = 50\,000$ .

V tabulce 17 je znázorněn průběh simulace pěti nejvyšších škod, kde poslední sloupec zobrazuje právě simulované hodnoty, přičemž  $Q(u)$  je kvantilová funkce Paretova rozdělení.

Tabulka 17: Průběh simulace

v	n	1/n	$\frac{1}{v^n}$	u	Q(u)
0,9854	30	0,0333	0,9995	0,9995	6 698 189
0,8525	29	0,0345	0,9945	0,9940	1 343 104
0,6088	28	0,0357	0,9824	0,9766	558 084
0,6552	27	0,0370	0,9845	0,9614	404 896
0,1186	26	0,0385	0,9213	0,8857	201 571

*Zdroj: vlastní zpracování*

V tabulce 18 jsou pak vypočteny kvantily těchto hodnot. V prvním sloupci tabulky je medián, zbylé 2 sloupce pak představují hranice pro každou simulovanou hodnotu. Pro znázornění bude využita hodnota 6 698 189 Kč, tedy nejvyšší simulovaná hodnota, která s pravděpodobností 0,995 pochází z intervalu hodnot 161 151,90 Kč a 13 387 290,93 Kč. Přitom 0,005 % škod může být vyšší než 13 387 290,93 Kč. Grafický výstup simulace je na obrázku 22.

Tabulka 18: Kvantily vybrané pořadové statistiky

Q(BETAINV(0,5))	Q(BETAINV(0,995))	Q(BETAINV(0,005))
567 432,51	13 387 290,93	161 151,90
321 362,29	1 893 663,42	131 267,57
238 206,87	877 665,39	114 908,79
194 273,74	559 738,34	103 934,53
166 436,02	410 320,92	95 840,67

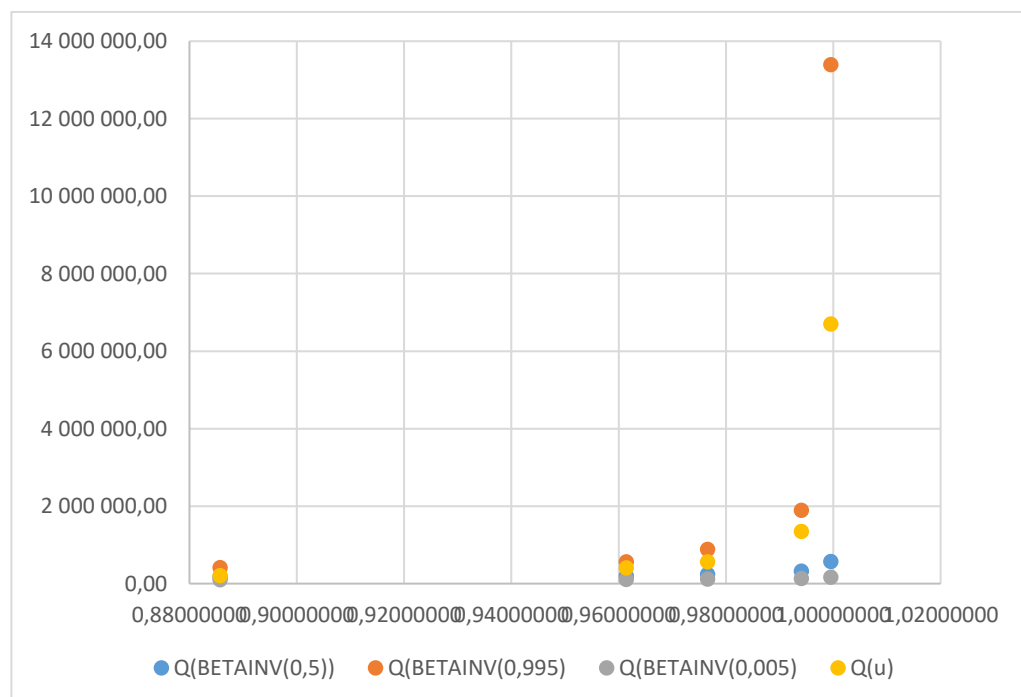
*Zdroj: vlastní zpracování*

Dosažením odhadnutých parametrů z tabulky 16 do distribuční funkce Paretova rozdělení lze získat vztah

$$F(x) = 1 - \left(\frac{50\,000}{x}\right)^{1,55582},$$

ze kterého bude inverzí určena kvantilová funkce ve tvaru

$$x_u = Q(u) = \frac{50\,000}{(1-u)^{\frac{1}{1,55582}}}.$$



Obrázek 22: Grafický výstup simulace 5 nejvyšších škod

*Zdroj: vlastní zpracování*

Výstup simulace nejvyšších škod může pojišťovna využít pro zajištění. Například pro zajištění typu  $LCR(p)$ , kdy pojišťovna postupuje zajišťovně  $p$  nejvyšších škod, v tomto případě tedy 5 nejvyšších škod. Dalším příkladem může být zajištění ECOMOR, kdy by zajišťovna hradila tu část škody, která převyšuje 5. nejvyšší škodu.

## ZÁVĚR

Cílem této práce bylo zmapovat metody pro modelování pravděpodobnostního rozdělení extrémních škod a možnosti zabezpečení pojišťovny proti těmto škodám. Teoretická část se zabývala úlohou pojišťovnictví, vlivem extrémních škod na hospodaření pojišťovny a možnostmi zabezpečení pojišťovny proti těmto škodám. Dále byly teoreticky popsány metody pro modelování výšky individuálních pojistných plnění, rozdělení pravděpodobnosti, která se pro modelování výšky pojistných plnění využívají, možnosti testování vhodnosti daného rozdělení pravděpodobnosti a metody odhadu jeho parametrů. Také jsou zde popsány metody grafické analýzy, kterou je vhodné provést před samotným hledáním vhodného rozdělení, a pak i v průběhu pro grafické porovnání dat a předpokládaného rozdělení.

Pro praktickou ukázkou teoreticky popsaných metod byly využity údaje o individuálních škodách vzniklých na majetkovém pojištění obyvatelstva způsobených vichřicí, která se prohnala Českou republikou na konci října 2017. Data pocházejí z České pojišťovny, a.s. a týkají se Pardubického kraje. Na začátku aplikační části byla provedena grafická analýza a vypočteny základní charakteristiky dat, což umožnilo utvořit si základní představu o modelovaných datech a hrubou představu o tvaru vhodného rozdělení pravděpodobnosti.

V rámci hledání vhodného rozdělení, které by spolehlivě modelovalo tato data byly pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu ověřovány rozdělení pravděpodobnosti popsaná v teoretické části. Během testu se potvrdilo, že exponenciální rozdělení není vhodné pro modelování výšky škod v případě, kde se vyskytují extrémní hodnoty. Z výstupu testu vyplynulo, že použitá data jsou nejlépe modelována pomocí tříparametrického loglogistického rozdělení. Pro toto rozdělení byly odhadnuty parametry.

Následně byla pro analyzování extrémních škod použita metoda excedentů přes vysoký práh. U této metody je nejdůležitější správně určit hodnotu prahu  $u$ . Hranice byly určeny dvě, pro každou opět bylo nalezeno vhodné rozdělení a porovnány výstupy obou zvolených hranic. Pro obě hranice vyšlo jako nejlepší dvouparametrické Paretovo rozdělení, které lépe modelovalo data nad vyšší z obou hranic.

V závěru praktické části byly použity kvantilové funkce, pomocí kterých byly simulovány hodnoty pěti nejvyšších škod. Pro simulaci bylo použito Paretovo rozdělení s parametry odhadnutými v předchozí části, pro hodnoty přesahující hranici 50 000 Kč.

Výstupy aplikační části může pojišťovna využít pro zajištění, kdy může prioritu pro majetkové pojištění stanovit na úrovni 50 000 Kč. Simulované hodnoty mohou být využity pro neproporcionální zajištění typu  $LRC(p)$  nebo ECOMOR.

## POUŽITÁ LITERATURA

- [1] BOLAND, J. P.: *Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science*. Chapman & Hall/CRC, 2007
- [2] CIPRA, Tomáš. *Pojistná matematika: teorie a praxe*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, c2006. 411 s. ISBN 80-86929-11-6
- [3] CIPRA, Tomáš. *Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví*. 1. vyd. Praha: Grada, 2004. 260 s. ISBN 80-247-0838-8
- [4] ČAP. *Povodňové mapy pro veřejnost zdarma*. Tisková zpráva. [online] Praha, 2010. [cit. 2018-03-20] Dostupné z: <http://www.cap.cz/images/tiskove-zpravy/2010-5-10-16-24.pdf>
- [5] ČAP. *Statistické údaje dle metodiky ČAP 1-12/2017 – grafy*. [online] [Publikováno 2018-01-25] Dostupné z: <http://www.cap.cz/images/statisticke-udaje/vyvoj-pojisteno-trhu/STAT-2017Q4-GRAFY-2018-01-25.pdf>
- [6] ČERNÁ Šárka, Petr PUNČOCHÁŘ a Adam PODLAHA. *Nové trendy při upisování povodňových rizik*. [online] In: *Pojistný obzor*. ISSN 2464-7381, č. 4/2016. Str. 28-32. [cit. 2018-03-20] Dostupné z: <https://www.pojistnyobzor.cz/archiv/70-2016-4>
- [7] ČESKÁ POJIŠŤOVNA A. S. *Aktuálně: končíme práci v kalamitním režimu, 80 % škod z orkánu Herwart je zlikvidováno*. [online] Intranet ČP, a.s. c2018 [cit. 2018-03-20] Dostupné z: <https://intranet.cpas.cz/Pages/newsEmDetail.aspx?newsID=2557&width=250&height=200>
- [8] ČESKÁ POJIŠŤOVNA A. S. *Fakta o kalamitách*. [online] c2018 [cit. 2017-06-27] Dostupné z: <https://www.ceskapojistovna.cz/kalamity/fakta-o-kalamitach>
- [9] DAŇHEL, Jaroslav, Jarmila RADOVÁ a Eva DUCHÁČKOVÁ. *Analýza globálních trendů ve světovém a českém komerčním pojišťovnictví*. Praha: Oeconomica, 2007. ISBN 978-80-245-1256-3
- [10] DUCHÁČKOVÁ, Eva. *Principy pojištění a pojišťovnictví*. 3. vyd., přeprac. Praha: Ekopress, c2009. ISBN 978-80-86929-51-4.
- [11] JEDLIČKA, Petr. *Vývoj živelních škod a jejich dopad na majetkové pojištění*. [online] In: *Pojistný obzor*. ISSN 2464-7381, č. 3/2017. Str. 40-43. [cit. 2018-03-20] Dostupné z: <https://www.pojistnyobzor.cz/archiv/79-2017-3>

- [12] KAHOUNOVÁ, Jana. *Asymptotické pravděpodobnostní rozdělení výběrového maxima*. [online] Acta Oeconomica, roč. 16, č. 3, 2008. [cit. 2018-03-13]. Dostupné z: <https://www.vse.cz/polek/download.php?jnl=aop&pdf=103.pdf>
- [13] KURZY.CZ. *Vyrovňovací rezerva, § 64 – Zákon o pojišťovnictví č. 277/2009 Sb.* [online] Kurzy.cz, spol. s r.o., AliaWeb, spol. s r.o c2000-2018 [cit. 2018-03-20] Dostupné z: <http://zakony.kurzy.cz/277-2009-zakon-o-pojistovnictvi/paragraf-64/>
- [14] MATHWAVE, *EasyFit – Frechet (Maximum Extreme Value Type 2) Distribution*. [online] c 2004-2017. MathWave Technologies. [cit. 2018-04-12] Dostupné z: <http://www.mathwave.com/help/easyfit/html/analyses/distributions/frechet.html>
- [15] MCNEIL, Alexander. Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory. [online] ASTIN Bulletin 27, 1997, str. 117-137. [cit. 2018-03-13] Dostupné z: <https://www.casact.org/library/astin/vol27no1/117.pdf>
- [16] *Natural catastrophes and man-made disasters in 2016: a year of widespread damages*. [online] Sigma No 2/2017. Swiss Re Institute. [Publikováno 2017-02-10]. [cit. 2018-03-29] Dostupné z: [http://media.swissre.com/documents/sigma2\\_2017\\_en.pdf](http://media.swissre.com/documents/sigma2_2017_en.pdf)
- [17] PACÁKOVÁ, Viera. *Aplikovaná poistná štatistika*. 3., preprac. a dopl. vyd. 261 s. Bratislava: Iura Edition, 2004. ISBN 80-8078-004-8
- [18] PACÁKOVÁ, Viera, Bohdan LINDA. *Simulation of extreme losses in non-life insurance*. [online] E+M Ekonomie a management, 4/2009, str. 97-103. [cit. 2018-03-13] ISSN (Online) 2336-5604. Dostupné z: [http://www.ekonomie-management.cz/download/1331826735\\_d523/10\\_pacakova\\_linda.pdf](http://www.ekonomie-management.cz/download/1331826735_d523/10_pacakova_linda.pdf)
- [19] *Procedure documentation*. STATGRAPHICS® Centurion XVI, version 16.1.11. Copyright 1982-2010 StatPoint Technologies, Inc. [www.STATGRAPHICS.com](http://www.STATGRAPHICS.com)
- [20] SANDERS, D.E.A. *The modelling of extreme events*. [online] Presented to the Institute of Actuaries, 4 April 2005. [cit. 2018-03-13] Dostupné z: <https://www.actuaries.org.uk/.../modelling-extreme-events-2005>
- [21] SKŘIVÁNKOVÁ, Valéria. *Štatistická analýza extrémnych hodnôt a metódy ich registrácie v neživotnom poistení*. [online] 3. mezinárodní konference Řízení a modelování finančních rizik, Ostrava, 6. – 7. září 2006. str. 270-277. [cit. 2018-03-13] Dostupné z:

<https://www.ekf.vsb.cz/export/sites/ekf/rmfr/.content/galerie-dokumentu/2006/prispevky/Valerie.Skrivankova.pdf>

- [22] *STATISTICA Electronic manual*. StatSoft, Inc. (2013). STATISTICA (data analysis software systém), version 12. [www.statsoft.com](http://www.statsoft.com)
- [23] VÁVROVÁ, Eva. *Finanční řízení komerčních pojišťoven*. Praha: Grada, 2014. ISBN 978-80-247-4662-3
- [24] *World insurance in 2016: the China growth engine steams ahead*. [online] Sigma No 3/2017. Swiss Re Institute. [Publikováno 2017-07-05]. [cit. 2018-03-20] Dostupné z: [http://media.swissre.com/documents/sigma3\\_2017\\_en.pdf](http://media.swissre.com/documents/sigma3_2017_en.pdf)

## **PŘÍLOHY**

Příloha A – Výšky individuálních škod .....	64
---	----

## **PŘÍLOHA A – VÝŠKY INDIVIDUÁLNÍCH ŠKOD**

Výšky individuálních pojistných plnění z majetkového pojištění z příčiny vichřice (710 škod).

478, 507, 546, 641, 691, 700, 869, 881, 954, 1001, 1001, 1019, 1022, 1036, 1061, 1120, 1174, 1212, 1234, 1250, 1268, 1290, 1302, 1306, 1322, 1375, 1383, 1395, 1399, 1402, 1436, 1462, 1466, 1479, 1484, 1496, 1514, 1548, 1573, 1574, 1582, 1589, 1591, 1614, 1628, 1653, 1653, 1672, 1689, 1690, 1691, 1723, 1733, 1751, 1761, 1764, 1781, 1787, 1800, 1811, 1837, 1844, 1850, 1852, 1858, 1869, 1875, 1875, 1883, 1885, 1891, 1897, 1899, 1916, 1926, 1930, 1933, 1939, 1942, 1948, 1952, 1958, 1965, 1965, 1976, 1986, 1995, 2000, 2000, 2000, 2000, 2035, 2049, 2064, 2074, 2074, 2074, 2078, 2080, 2095, 2101, 2112, 2116, 2122, 2155, 2159, 2182, 2188, 2241, 2246, 2262, 2275, 2281, 2385, 2386, 2396, 2398, 2420, 2420, 2434, 2439, 2460, 2480, 2493, 2500, 2503, 2529, 2551, 2558, 2577, 2580, 2594, 2611, 2616, 2618, 2618, 2646, 2647, 2648, 2683, 2696, 2705, 2710, 2733, 2739, 2770, 2772, 2794, 2815, 2827, 2835, 2856, 2862, 2869, 2869, 2912, 2943, 2967, 2969, 2974, 2977, 2980, 2985, 3000, 3003, 3019, 3023, 3057, 3081, 3093, 3109, 3120, 3126, 3146, 3177, 3181, 3203, 3220, 3227, 3243, 3261, 3267, 3272, 3278, 3294, 3304, 3315, 3324, 3343, 3373, 3385, 3388, 3433, 3460, 3462, 3468, 3468, 3481, 3484, 3493, 3500, 3550, 3554, 3561, 3563, 3578, 3584, 3599, 3607, 3632, 3648, 3676, 3676, 3677, 3681, 3690, 3690, 3710, 3724, 3727, 3747, 3754, 3755, 3758, 3760, 3769, 3770, 3771, 3840, 3860, 3887, 3910, 3937, 3944, 3974, 3974, 3990, 3995, 4000, 4001, 4011, 4024, 4042, 4043, 4046, 4061, 4062, 4093, 4095, 4099, 4126, 4139, 4149, 4190, 4193, 4195, 4217, 4217, 4237, 4267, 4267, 4278, 4286, 4299, 4317, 4317, 4318, 4329, 4342, 4365, 4375, 4383, 4385, 4392, 4393, 4404, 4410, 4418, 4418, 4434, 4490, 4523, 4542, 4610, 4619, 4630, 4637, 4641, 4655, 4656, 4679, 4766, 4821, 4827, 4859, 4869, 4900, 4905, 4929, 4943, 4949, 4962, 4995, 5038, 5041, 5047, 5051, 5059, 5063, 5106, 5141, 5187, 5189, 5250, 5265, 5271, 5282, 5282, 5285, 5292, 5293, 5298, 5299, 5319, 5341, 5367, 5378, 5381, 5410, 5438, 5439, 5442, 5474, 5514, 5538, 5540, 5622, 5633, 5635, 5645, 5648, 5673, 5721, 5729, 5740, 5769, 5802, 5821, 5842, 5845, 5855, 5876, 5891, 5928, 5955, 5958, 5969, 5973, 5978, 5980, 5983, 6011, 6039, 6044, 6054, 6098, 6122, 6135, 6156, 6167, 6182, 6182, 6209, 6233, 6237, 6240, 6249, 6264, 6280, 6287, 6292, 6303, 6343, 6367, 6411, 6439, 6473, 6481, 6498, 6519, 6545, 6565, 6567, 6596, 6598, 6604, 6630, 6635, 6664, 6682, 6695, 6697, 6741, 6743, 6765, 6779, 6780, 6805, 6830, 6834, 6864, 6888, 6977, 6990, 7003, 7010, 7030, 7061, 7083, 7147, 7158, 7183, 7194, 7203, 7211, 7216, 7248, 7273, 7283, 7302, 7306, 7328, 7371, 7379, 7380, 7432, 7473, 7482, 7563, 7578, 7589, 7598, 7623, 7633, 7643, 7647, 7698, 7705, 7748, 7749, 7804,



7822, 7839, 7862, 7928, 7964, 7988, 8121, 8130, 8143, 8162, 8175, 8195, 8198, 8213, 8248, 8310, 8339, 8351, 8352, 8356, 8415, 8437, 8448, 8476, 8483, 8500, 8511, 8597, 8600, 8620, 8645, 8647, 8714, 8721, 8761, 8777, 8798, 8807, 8832, 8898, 8928, 9000, 9000, 9021, 9230, 9292, 9295, 9303, 9320, 9336, 9371, 9390, 9438, 9456, 9579, 9591, 9598, 9651, 9655, 9663, 9835, 9844, 9880, 9951, 10000, 10000, 10000, 10026, 10073, 10074, 10167, 10186, 10200, 10236, 10360, 10398, 10418, 10515, 10565, 10570, 10643, 10705, 10791, 10799, 10804, 10945, 10956, 11023, 11050, 11087, 11103, 11103, 11154, 11250, 11271, 11294, 11342, 11652, 11666, 11669, 11705, 11819, 11896, 11952, 12024, 12061, 12071, 12093, 12297, 12341, 12413, 12452, 12497, 12542, 12724, 12741, 12794, 12812, 12870, 12878, 12925, 12935, 12995, 13140, 13147, 13204, 13316, 13503, 13562, 13577, 13733, 13738, 13824, 13891, 14008, 14010, 14085, 14122, 14160, 14242, 14271, 14312, 14430, 14669, 14772, 14784, 14839, 14945, 15436, 15498, 15556, 15761, 15909, 16005, 16098, 16450, 16479, 16961, 17008, 17139, 17198, 17270, 17509, 17689, 17700, 17843, 17956, 17984, 18079, 18509, 18565, 18598, 18662, 19353, 19785, 20000, 20000, 20095, 20290, 20449, 20553, 20644, 22080, 22109, 22194, 22800, 23222, 23418, 23468, 23511, 23544, 23804, 24290, 25127, 25127, 25607, 26184, 26312, 26632, 27332, 27568, 27968, 28265, 28269, 28980, 29305, 29341, 29414, 29458, 29923, 30163, 34090, 35576, 38701, 39807, 39829, 40351, 40598, 41000, 41052, 41922, 43515, 44429, 45250, 46041, 47695, 47832, 47880, 49654, 50256, 50784, 52702, 54170, 55035, 55538, 56987, 58431, 59604, 59747, 61020, 62547, 69498, 74382, 75372, 77496, 82195, 93326, 102065, 109333, 128750, 132700, 144087, 152078, 157604, 238191, 267790, 270510, 385059, 410569