**Univerzita Pardubice**

**Fakulta ekonomicko-správní**

# Třída Bornhuetter-Fergusonových metod pro odhad technických rezerv

**Bc. David Janků**

**Diplomová práce**
**2018**

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: **2017/2018**

# ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

| | |
|---|---|
| Jméno a příjmení: | **Bc. David Janků** |
| Osobní číslo: | **E160030** |
| Studijní program: | **N6209 Systémové inženýrství a informatika** |
| Studijní obor: | **Pojistné inženýrství: Management finančních rizik** |
| Název tématu: | **Třída Bornhuetter-Fergusonových metod pro odhad technických rezerv** |
| Zadávající katedra: | **Ústav matematiky a kvantitativních metod** |

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Cílem diplomové práce je definovat Bornhuetter-Ferguson metody a využít tyto metody k odhadování technických rezerv v pojišťovnictví.

Osnova:
- Definice technických rezerv v pojišťovnictví.
- Definice Bornhuetter-Ferguson metod.
- Využití Bornhuetter-Ferguson metod pro odhad technických rezerv.

Rozsah grafických prací: –

Rozsah pracovní zprávy: **cca 50 stran**

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

**CIPRA, Tomas. Financial and insurance formulas. Heidelberg: Physica-Verlag, 2010. ISBN 978-3-7908-2593-0.**
**KAAS, Rob, [et all.]. Modern Actuarial Risk Theory using R. 2nd ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. ISBN 978-3-540-70998-5.**
**RADTKE, Michael, SCHMIDT, Klaus, D., SCHNAUS, Anja. Handbook on Loss Reserving. switzerland, c2016. ISBN 978-3-319-30054-2.**
**WUTHRICH, Mario, V., MERZ, Michael. Stochastic claims reserving methods in insurance. Hoboken, NJ: John Wiley, c2008. ISBN 978-0-470-72346-3.**

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Ján Gogola, Ph.D.**
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: **1. září 2017**
Termín odevzdání diplomové práce: **30. dubna 2018**

doc. Ing. Romana Provazníková, Ph.D.
děkanka

L.S.

doc. RNDr. Bohdan Linda, CSc.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 1. září 2017

## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 30. 4. 2018 Bc. David Janků

**PODĚKOVÁNÍ**:

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu své diplomové práce RNDr. Jánu Gogolovi, Ph.D. za jeho ochotu, trpělivost, cenné rady a poskytnuté materiály, které mi pomohly tuto práci vypracovat. Dále bych chtěl poděkovat rodině za podporu při studiu.

## ANOTACE

*Cílem této diplomové práce je představení metod, které spadají pod třídu Bornhuetter-Ferguson metod, které se využívají pro odhad technických rezerv. Teoretická část práce je nejdříve obecně zaměřena na technické rezervy, dále podrobněji na škodní rezervy a metody z třídy Bornhuetter-Ferguson. Praktická část se zabývá využitím metod třídy Bornhuetter-Ferguson pro odhad výše škodní rezervy IBNR, kterou musí pojišťovna vytvořit pro škody, které vznikly, ale nebyly dosud nahlášeny.*

## KLÍČOVÁ SLOVA

*Bornhuetter-Ferguson, Škodní rezervy, Vývojové koeficienty, Vývojové trojúhelníky*

## TITLE

*The Bornhuetter-Ferguson class for estimating technical reserves*

## ANNOTATION

*The subject of that thesis is the showing of Bornhuetter-Ferguson methods, which belong to Bornhuetter-Ferguson class, which are used for estimating loss reserving. The theoretical part of that thesis is the earliest focused on technical reserves, further in more detail is focused on loss reserve and methods of Bornhuetter-Ferguson class. The practical part of that thesis is focused on using methods of Bornhuetter-Ferguson class for estimating IBNR reserve, which insurance must produce on losses, which incurred but was not reported.*

## KEYWORDS

*Bornhuetter-Ferguson, Loss reserves, Development patterns, Run off triangles*

# OBSAH

## SEZNAM TABULEK:



## SEZNAM ILUSTRACÍ:

## SEZNAM ZKRATEK A ZNAČEK

| | |
|---|---|
| IFRS | International financial reporting standart |
| IBNR | Incurred but not reported |
| RBNS | Reported but not settled |
| např. | například |
| apod. | a podobně |
| ČSÚ | Český statistický úřad |
| SCR | Solvency capital requirement |
| CoC | Cost of capital |
| CC | Cape-Cod |
| AD | Aditive |
| BF | Bornhuetter-Ferguson |
| CL | Chain-ladder |
| LD | Loss-development |
| EU | Evropská unie |
| TÚM | Technická úroková míra |

# ÚVOD

Metody z třídy Bornhuetter-Ferguson slouží v pojišťovnictví pro odhad technických rezerv, přesněji pro odhad škodních rezerv, které spadají do neživotní části pojišťovnictví. Někdy se jim také říká trojúhelníkové metody, protože pro odhad škodních rezerv využívají vývojových trojúhelníku. Hlavní úlohou těchto metod je odhadnout dolní část vývojového trojúhelníku. Pro odhad dolní části vývojových trojúhelníků může být využito buď interních informací či externích informací, případně kombinace obou přístupů. U většiny metod je potřeba odhadnout tzv. ***vývojové koeficienty***, které mohou být vzájemně konvertovány a mohou být jednoduše interpretovány. Jednotlivé metody z této třídy mohou využívat různé z těchto vývojových koeficientů. Metod z třídy Bornhuetter-Ferguson je celá škála, kde asi nejznámější metodou je chain-ladder. Výchozí metodou těchto metod je Bornhuetter-Ferguson, kterou představili Ronald Bornhuetter a Ronald Ferguson ve svém článku ***„The actuary and IBNR“*** v roce 1972. Ostatní metody, které jsou v této práci uvedeny jsou rozšířením Bornhuetter-Fergusona. Nejnovější metodou z této třídy je Mackova metoda, která se v této době v pojišťovnictví využívá, avšak lze se v praxi setkat i s metodou chain-ladder. Pro zjištění kvality odhadu škodních rezerv se využívá tzv. ***run off analýza***, kterou pojišťovny vypracovávají jednou ročně, a to vždy při roční závěrce.

Teoretická část této diplomové práce, se nejdříve zabývá obecně technickými rezervami, které se dělí na technické rezervy životních pojišťoven a technické rezervy neživotních pojišťoven. Práce se dále podrobněji zabývá škodními rezervami, vývojovými trojúhelníky a vývojovými koeficienty, které je potřeba před odhadem škodních rezerv pochopit. Dále se teoretická část této diplomové práce zabývá jednotlivými metodami z třídy Bornhuetter-Ferguson, jejich vlastnostmi a spojitostmi mezi nimi.

Praktická část této práce se zabývá odhadem škodních rezerv na modelovém příkladu pomocí jednotlivých metod z třídy Bornhuetter-Ferguson, kde metoda chain-ladder je dále rozšířena o inflační vyrovnání. Součástí této práce je také ověření kvality jednotlivých odhadů, za předpokladu znalosti výše pojistných plnění v prvním budoucím roce. Metody jsou jak tabulkově, tak graficky vzájemně porovnávány.

Cílem této diplomové práce je definovat technické rezervy, které pojišťovny vytváří, dále představit jednotlivé metody z třídy Bornhuetter-Ferguson, které se používají pro odhad škodních rezerv. Následně na modelovém příkladu přiblížit způsoby odhadu škodních rezerv pomocí těchto metod.

# 1 POJISTNĚ TECHNICKÉ REZERVY

Vytváření technických rezerv je jedna z nejdůležitějších činností v pojišťovnách. Slouží v pojišťovnictví k vyrovnání nesouladu mezi přijatým pojistným a vyplaceným pojistným plnění. Povinnost vytvářet tyto rezervy je zakotvena v zákoně o pojišťovnictví č. 277/2009 Sb. Protože se pojišťovny musí řídit podle směrnice EU, musí pojišťovny také vykazovat své výsledky podle IFRS, přesněji IFRS 4, která se zabývá pojistnými smlouvami. Podle IFRS 4 však vykazování výsledků, kde předmětem obchodování jsou pojistné smlouvy, pojišťovny vykazují podle účetní legislativy dané země, ve které svoji činnost provozují. Změnou v tomto směru má být standart IFRS 17, který pojišťovnám jednotně zadá, jak bude pojišťovna své výsledky vykazovat, přičemž se očekává velký dopad na rozvahu a výsledovku pojišťoven.

Vedle technických rezerv pojišťovny vykazují i netechnické rezervy, tyto rezervy se nesmí nikterak směšovat či zaměňovat s technickými rezervami a měly by být v pasivech odděleny. Mezi netechnické rezervy patří např. zákonný rezervní fond.

Pojistně technické rezervy slouží také k obohacování pojišťoven, kdy dochází k investování pojistně technických rezerv. Pojišťovny investují peněžní prostředky buď pomocí investičních společností, které jsou součástí skupiny např. NN pojišťovna, dále může investovat peněžní prostředky sama např. má své oddělení asset management nebo investuje pomocí externí investiční společnosti např. Conseq, Cyrrus apod. Aby pojišťovny splňovaly podmínky obezřetnosti, velkou většinu peněžních prostředků investuje do dluhových cenných papírů, nejčastěji do státních dluhopisů.

Základním dělením technických rezerv je na rezervy, které vytváří životní pojišťovna, tzv. technické rezervy životního pojištění, a které vytváří neživotní pojišťovna, tzv. technické rezervy neživotního pojištění. Existují i pojišťovny, které mají jak životní, tak neživotní pojistný kmen, tyto pojišťovny se nazývají univerzální. [1]

## 1.1 Technické rezervy životního pojištění

Jedná se o rezervy, které vykazují životní pojišťovny, jejichž produkty jsou životního charakteru.

V případě tradičních pojištění života jsou to:

- Pojištění pro případ smrti
- Pojištění pro případ dožití

- Pojištění důchodu
- Případně kombinace těchto tří pojištění

Avšak v dnešní době se více prodávají pojištění, kde vedle pojištění rizik (většinou povinností je pojištění smrti z jakékoliv příčiny s minimální pojistnou částkou) je i investiční složka, kde výnos z těchto investic může být garantovaný nebo negarantovaný. Na pojistných trzích se prodávají nejčastěji dva typy životního pojištění, a to flexibilní životní pojištění a investiční životní pojištění (lze se setkat s názvem unit-linked). V dnešní době, kdy se pojišťovnám na finančních trzích příliš nedaří, se prodává flexibilní životní pojištění, kde je garantovaný výnos nulový (bez poplatku za správu investic tzv. management fee), to vede k tomu, že se v poslední době uzavírá více pojistných smluv typu investičního životního pojištění.

V následujících podkapitolách jsou technické rezervy životního pojištění rozděleny a stručně popsány. [1]

### 1.1.1 Rezerva na pojistná plnění

Z pohledu životní pojišťovny se jedná o méně důležitou rezervu, kde životní pojišťovny do této rezervy ukládají pouze prostředky z rezervy pojistného životního pojištění pří ohlášení pojistné události. [1]

### 1.1.2 Rezerva na nezasloužené pojistné

Tato rezerva se vytváří pro tu část předepsaného pojistného, která nesouvisí s aktuálním účetním obdobím. Jako příklad lze uvést roční placení pojistného, kde dojde k zaplacení předepsaného pojistného za období září aktuálního roku až srpen budoucího roku. V tomto případě je zasloužená část pojistného v období září až prosinec aktuálního roku a do rezervy na nezasloužené pojistné se přesune předepsané pojistné za leden až srpen budoucího roku. Výše rezervy pak tedy není nic jiného než součet nezaslouženého pojistného na všech takto placených smlouvách. Rozdělení pojistného na část zaslouženou a nezaslouženou většinou provádí informační systém pojišťovny např. ISIC, Golem apod. [1]

### 1.1.3 Rezerva na pojistné životního pojištění

Rezerva na pojistné životního pojištění se vytváří pro krytí závazků vyplývajících ze životního pojištění. Patří sem smlouvy tradičního životního pojištění. Dá se říci, že se jedná o jednu z nejdůležitějších rezerv životních pojišťoven. Někdy se ji také říká matematická rezerva, protože pro výpočet této rezervy se využívá matematicko-statistických metod a měla by se počítat prospektivně (od hodnoty budoucích závazků pojišťovny se odečte hodnota budoucího pojistného). Směrnice EU nevylučuje použití retrospektivní metody. U této rezervy se spočítá rizikový kapitál tak, že se od sebe odečte výše pojistné částky a rezervy pojistného životních pojištění.

Protože se jedná o pojištění dlouhodobého charakteru, je tato rezerva zhodnocována technickou úrokovou mírou. [1]

### 1.1.4 Rezerva na prémie a slevy

Tato rezerva slouží ke krytí budoucích závazků pojišťovny, které vzniknou s uplatněním slevy případně bonusu. Rezerva na prémie a slevy se vytváří v případě, že pojišťovna pomocí marketingových akcií nabízí např. slevy na pojistném, v případě, že součet pojistných částek pojištěných rizik přesáhne určitou sumu, případně má na svých smlouvách dané nějaké bonusy, které získá splněním předem daných podmínek. Typickým případem bonusu v pojišťovnictví může být např. bonus za věrnost, bonus za bezeškodní průběh apod. V dnešní době se zavádí i slevy za zdravý životní styl pojištěných osob apod.

Součástí této rezervy jsou i případné podíly na zisku, pokud je tak ve smlouvě sjednáno tzv. profit sharing. Ten vzniká v případě přebytku z investičního výnosu pojišťovny, ale také v případě nižších nákladů, nižší stornovostí, případně nižší úmrtností, škodovostí než pojišťovna očekávala. [1]

### 1.1.5 Rezerva na životní pojištění, je-li nositelem investičního rizika pojistník

Tato rezerva se vytváří pro smlouvy, kde je nositelem investičního rizika pojistník, tedy smlouvy investičního životního pojištění. Jelikož se jedná dnes o nejčastěji uzavíraný typ životního pojištění, patří mezi jedny z nejdůležitějších a nejobjemnějších rezerv v životních pojišťovnách. Tuto rezervu ve většině pojišťoven počítá informační systém pojišťovny, v průběhu roku se kontroluje, zda systém počítá rezervu správně. [4]

### 1.1.6 Rezerva na splnění závazků z použité technické úrokové míry a ostatních početních parametrů

Tato rezerva se vytváří pro případy, že výše rezervy pojistného životního pojištění nepostačuje ke krytí za použití původních početních parametrů. Použijí se současné odhady technických úrokových měr a ostatních současných početních parametrů pro ohodnocení přijatých závazků. V praxi se lze setkat s názvem LAT rezerva. [1]

### 1.1.7 Rezerva pojistného neživotních pojištění

Pokud životní pojišťovna má pojistné smlouvy neživotního charakteru, pak vytváří i rezervu pojistného na neživotní pojištění. [1]

### 1.1.8 Jiné rezervy

Směrnice EU dává možnost vytvářet i jiné technické rezervy, než které nespadají ani do jedné z výše uvedených rezerv. [1]

## 1.2 Pojistně technické rezervy neživotního pojištění

Pojistně technické rezervy neživotního pojištění, se vytváří pro produkty pojišťovny, které jsou neživotního charakteru. Vytváří je neživotní i životní pojišťovny. Zde se může jednat např. o produkty typu povinné ručení, pojištění odpovědnosti, pojištění majetku, úrazová pojištění apod. Některé rezervy neživotního pojištění se vytváří stejně jako u životních rezerv. Produkty neživotního pojištění jsou z velké části krátkodobého charakteru, kde se při každém zaplacení pojistného pojištění obnoví, tedy může dojít i ke změně výše pojistného (to se u životního pojištění nestává, pojistník platí pojistné po celou dobu ve stejné výši).

V této části jsou vynechány škodní rezervy, protože jim je věnována celá kapitola. Dále v podkapitolách jsou uvedeny rezervy, které neživotní pojišťovna vytváří. [1]

### 1.2.1 Rezerva na nezasloužené pojistné

Tato rezerva se vytváří stejně jako v případě životního pojištění, tedy zasloužené pojistné je ta část, která náleží do aktuálního účetního roku a nezasloužené pojistné je ta část pojistného, která náleží budoucímu účetnímu roku. [1]

### 1.2.2 Rezerva na prémie a slevy

Vytváří se stejně jako u životního pojištění s tím, že slevou může být např. frekvence placení pojistného nebo může pojistník dostat bonus v případě bezeškodního průběhu pojištěného (bonus-malus systém). [1]

### 1.2.3 Vyrovnávací rezerva

Vyrovnávací rezerva je čistě rezerva neživotního pojištění, vytváří se pro případy, že dojde k výkyvům škodního průběhu pojištění (zvýší se náklady v podobě pojistných plnění). Ke zhoršení škodního průběhu může dojít např. při přírodních katastrofách, zhoršení ekonomické situace v zemi, kde pojišťovna působí apod. V těchto případech dochází k čerpání z této rezervy. Naopak v případě, kdy je škodní průběh příznivější, než bylo původně očekáváno, se tyto přebytky přesunou právě do vyrovnávací rezervy.

Podle směrnice EU vytváření této rezervy je povinné pouze pro úvěrová pojištění. Avšak jednotlivé země si mohou samostatně zvolit, jestli budou od pojišťoven požadovat tvorbu vyrovnávací rezervy i pro ostatní typy neživotního pojištění. [1]

V České republice je povinnost vytváření vyrovnávací rezervy dána zákonem o pojišťovnictví č. 277/2009 Sb. § 64 (vyrovnávací rezerva). Zde je uvedeno, že vyrovnávací rezerva se vytváří, pokud celková částka předepsaného pojistného za dané období v příslušném odvětví neživotního pojištění je buď rovna nebo je vyšší než 4 % celkového objemu předepsaného v neživotním pojištění za toto účetní období nebo je vyšší než 67 500 000 Kč. [2]

### 1.2.4 Rezerva pojistného neživotních pojištění

Rezerva pojistného neživotních pojištění, je analogií rezervy pojistného životního pojištění u životních pojišťoven. Vytváří se k pojistným odvětvím, kde je hlavním vstupem pro výpočet pojistného věk pojištěného. [1]

### 1.2.5 Rezerva na splnění závazků z ručení za závazky Kanceláře podle zákona upravujícího pojištění odpovědnosti z provozu vozidla

Vytváří se, pokud pojišťovna má ve svém portfoliu produkty povinného ručení. Pojišťovna vytváří tak velkou rezervu, jak se podílí na celkových závazcích České kanceláře pojistitelů, stanoví se za pomocí pojistně-matematických metod. [1]

### 1.2.6 Jiné rezervy

Stejně jako u technických rezerv životních pojištění směrnice EU dovoluje vytvářet pojišťovnám technické rezervy neživotního pojištění, které nespadají do výše uvedených rezerv.

# 2 POŽADAVKY SOLVENCY II NA TECHNICKÉ REZERVY

Pojišťovny jsou povinny splňovat požadavky, které jsou dány evropskou směrnicí 2009/138/EU, články 76 až 86. Tato směrnice je doplněna o nařízení Evropského parlamentu a rady 2015/35/ES.

Pojišťovny vytváří technické rezervy z jejich pojišťovací činnosti, kde dochází k vyrovnání závazků (výplaty pojistných plnění), které jsou velmi pravděpodobné nebo jisté, avšak výše nebo okamžik, kdy má dojít k vyrovnání těchto závazků jisté není. Technické rezervy se podle Solvency II spočítají jako součet nejlepšího odhadu závazků (Best estimate) a rizikové přirážky (Risk margin). Následující podkapitoly pojednávají o požadavcích na výpočet technických rezerv. [3]

## 2.1 Best estimate

Nejlepší odhad závazků se spočítá jako pravděpodobnostní vážený průměr budoucích finančních toků, které se diskontují k současné hodnotě. Diskontování probíhá s použitím bezrizikové úrokové křivky, případně s použitím bezrizikového úrokového scénáře. [3]

Tyto peněžní prostředky můžou buď do pojišťovny *„přitékat“* (in-flows) nebo *„odtékat“* (out-flows). Následně jsou v bodech uvedeny in-flows a out-flows, které může pojišťovna mít:

- In-flows:
    - Přijaté pojistné
    - Vratky z provizí
    - Vyplacená zajistná plnění
- Out-flows:
    - Vyplacená pojistná plnění
    - Náklady spojené se životností smlouvy
    - Opce a garance
    - Postoupené pojistné

## 2.2 Risk margin

Riziková přirážka je částka, o kterou je potřeba navýšit nejlepší odhad závazků, aby byla jiná pojišťovna ochotna převzít závazky pojišťovny. Riziková přirážka se spočítá podle následujícího vzorce

$$RM = CoC \cdot \sum_{t \geq 0} \frac{SCR(t)}{\left(1 + r \cdot (t+1)\right)^{t+1}} \tag{2.1}$$

kde $SCR(t)$ je solventnostní kapitálový požadavek v čase $t$,

$CoC$ je cena nákladů na kapitál, která je dána nařízením Evropského parlamentu ve výši 6 %,

$r(t)$ je úrok v čase $t$, který se získá z bezrizikového úrokového scénáře. [3]

# 3 ŠKODNÍ REZERVY

Škodní rezervy jsou jedny z nejdůležitějších rezerv neživotního pojištění, protože ve většině případů dochází k časovému nesouladu mezi vznikem pojistné události a likvidací pojistné události (výplatou pojistného plnění). Jedná se o rezervy škodových pojištění. Škodní rezervy se dělí na dvě, a to na škodní rezervu RBNS (Reported But Not Settled) a škodní rezervu IBNR (Incurred But Not Reported). Obě rezervy jsou v následujících podkapitolách více popsány. Jedním z úkolů pro pojišťovny je odhadnout takovou výši rezervy, která dostatečně pokryje budoucí pojistná plnění, na druhou stranu by se tyto rezervy neměli kumulovat a zadržovat příliš velké množství kapitálu, než je potřeba. [1]

Kromě odhadů rezerv IBNR se v pojišťovnách pro škodní rezervy vypracuje také tzv. ***run off analýza***, kde se zkoumá adekvátnost nastavených škodních rezerv. Výsledek z likvidace run off by neměl být záporný, ani příliš velký. Run off analýzy mohou být za období jednoho roku, případně více let. Lze se setkat s rozdělením na hrubý run off, kde se nebere v potaz zajištění a čistý run off, kde se od hrubého run off odečte run off zajištění. Dá se říci, že run off analýza je jeden ze způsobů, jak zpětně zjistit kvalitu odhadu vytvořených škodních rezerv.

## 3.1 Rezerva RBNS

Jedná se o rezervu na pojistné události, které již byly nahlášeny, ale dosud nebyly zlikvidovány (nebylo dosud vyplaceno pojistné plnění). Z pohledu pojistných matematiků se jedná o méně náročnou práci, protože vědí, jak velkou mají vytvořit rezervu na tyto pojistná plnění. Jediná nejistota může být ve výši vyplaceného pojistného, který stanovuje likvidátor pojištění. [1]

## 3.2 Rezerva IBNR

V tomto případě se jedná o rezervu na pojistné události, které vznikly, ale nebyly dosud nahlášeny. Zde nastává problém, protože pojišťovna neví, že bude muset řešit pojistnou událost, dokud není pojistná událost nahlášena. Proto je potřeba tuto rezervu odhadnout pomocí některých z pojistně matematických metod. Asi nejznámější metodou, která se pro odhad IBNR rezerv používá je metoda chain-ladder, která patří do třídy metod Bornhuetter-Ferguson. V dnešní době se dá pro odhad IBNR rezerv použít i sofistikovanějších metod, jako jsou např. neuronové sítě apod. [1]

## 3.3 Vývojový trojúhelník

Nejčastěji se pro odhad škodních rezerv využívá tzv. vývojových trojúhelníků. U metod, které pracují s vývojovými trojúhelníky se odhaduje dolní část trojúhelníku čímž vznikne čtverec, pomocí kterého se dá odhadnout výše škodní rezervy. Vývojový trojúhelník může být buď nekumulativní, případně kumulativní. Nejčastěji se pracuje s ročními vývojovými trojúhelníky, ale je možné se setkat i s področními vývojovými trojúhelníky. Pokud jsou některé údaje v trojúhelníku nulové mluví se o tzv. děravém vývojovém trojúhelníku. V následujících podkapitolách jsou nekumulativní a vývojové trojúhelníky dále rozděleny na výplatní a incurred. [1]

### 3.3.1 Výplatní nekumulativní vývojový trojúhelník

V případě modelování škod pomocí nekumulativního trojúhelníku se používají náhodné proměnné, které se značí jako $Z_{i,k}$, kde $i$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Tyto náhodné proměnné se interpretují jako pojistná plnění v roce, ve kterém bylo vyplaceno se zpožděním $k$ u pojistné události, která vznikla v roce $i$. Předpokládá se, že proměnné $Z_{i,k}$ jsou pozorovatelné pro kalendářní roky $i + k \leq n$ a nejsou pozorovatelné pro roky, kde platí $i + k \geq n + 1$. [5]

Níže je zobrazena podoba nekumulativního vývojového trojúhelníku, který je vyplněný pomocí pozorovatelných proměnných.

**Tabulka 1: Nekumulativní vývojový trojúhelník**

| Rok vzniku | Nekumulativní vývojový trojúhelník | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Rok vývoje | | | | | | | | |
| | **0** | **1** | **…** | **k** | **…** | **n - i** | **…** | **n - 1** | **n** |
| **0** | $Z_{0,0}$ | $Z_{0,1}$ | … | $Z_{0,1}$ | … | $Z_{0,n-i}$ | … | $Z_{0,n-1}$ | $Z_{0,n}$ |
| **1** | $Z_{1,0}$ | $Z_{1,1}$ | … | $Z_{1,3}$ | … | $Z_{1,n-i}$ | … | $Z_{1,n-1}$ | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | | | |
| **i** | $Z_{i,0}$ | $Z_{i,1}$ | … | $Z_{i,k}$ | … | $Z_{i,n-i}$ | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | | | | |
| **n - k** | $Z_{n-k,0}$ | $Z_{n-k,1}$ | …. | $Z_{n-k,k}$ | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | | | | | |
| **n - 1** | $Z_{n-1,0}$ | $Z_{n-1,1}$ | | | | | | | |
| **n** | $Z_{n,0}$ | | | | | | | | |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Úkolem je odhad nepozorovatelných proměnných, které se odhadují pomocí matematicko-statistických metod. [7]

### 3.3.2 Výplatní kumulativní vývojový trojúhelník

V případě modelování škod za pomocí kumulativního trojúhelníku se uvažuje existence náhodných proměnných, které jsou dále značeny jako $C_{i,k}$, kde $i,k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Tyto náhodné proměnné lze interpretovat, jako škody v roce vzniku $i$, které jsou vyplacené nanejvýš se zpožděním $k$ let, tedy ne později než ve vývojovém roce $k$. Náhodná proměnná se dá snadno vypočítat z nekumulativního trojúhelníku a to tak, že se kumulují jednotlivé škody v řádcích.

Vzorec pro výpočet pozorovatelných proměnných $C_{i,k}$ z nekumulativního trojúhelníku je následující

$$C_{i,k} = \sum_{l=0}^{k} Z_{i,l} \tag{3.1}$$

kde $C_{i,k}$ jsou pozorovatelné proměnné kumulativního trojúhelníku v řádku $i$ a sloupci $k$,

$Z_{i,l}$ jsou pozorovatelné proměnné nekumulativního trojúhelníku v řádku $i$ a sloupci $l$.

Potom vzorec pro nepozorovatelné škody $C_{i,k}$ z nekumulativního trojúhelníku vypadá následovně

$$C_{i,k} = C_{i,n-i} + \sum_{l=n-i+1}^{k} Z_{i,l} \tag{3.2}$$

kde $C_{i,n-i}$ jsou diagonální prvky kumulativního trojúhelníku v řádku $i$ a sloupci $n$-$i$,

Předpokládá se, že kumulované proměnné $C_{i,k}$ jsou pozorovatelné pro kalendářní roky, kde platí $i + k \leq n$ a pro nepozorovatelné platí $i + k \geq n + 1$. Tabulka 2 představuje podobu kumulativního vývojového trojúhelníku, který je vyplněný pomocí pozorovatelných škod $C_{i,k}$. [7]

**Tabulka 2: Kumulativní vývojový trojúhelník**

| Rok vzniku | Kumulativní vývojový trojúhelník | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Rok vývoje | | | | | | | | |
| | **0** | **1** | **…** | **k** | **…** | **n - i** | **…** | **n - 1** | **n** |
| **0** | $C_{0,0}$ | $C_{0,1}$ | … | $C_{0,1}$ | … | $C_{0,n-i}$ | … | $C_{0,n-1}$ | $C_{0,n}$ |
| **1** | $C_{1,0}$ | $C_{1,1}$ | … | $C_{1,3}$ | … | $C_{1,n-i}$ | … | $C_{1,n-1}$ | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ | | | |
| **i** | $C_{i,0}$ | $C_{i,1}$ | … | $C_{i,k}$ | … | $C_{i,n-i}$ | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | | | | |
| **n - k** | $C_{n-k,0}$ | $C_{n-k,1}$ | …. | $C_{n-k,k}$ | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | | | | | |
| **n - 1** | $C_{n-1,0}$ | $C_{n-1,1}$ | | | | | | | |
| **n** | $C_{n,0}$ | | | | | | | | |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Stejně jako v předešlém případě, i zde je úkolem odhadnout dolní část trojúhelníku, tedy nepozorovatelná pojistná plnění.

### 3.3.3 Incurred nekumulativní vývojový trojúhelník

Některé metody pro odhad technických rezerv nepoužívají pouze znalostí výplat pojistných plnění splňující podmínky IBNR, ale využívají také znalostí výplat pojistného, které splňuje podmínky RBNS. Takové metody jsou např. Mnichovská metoda chain-ladder apod. V případě modelování škod za pomocí incurred nekumulativního vývojového trojúhelníku se uvažuje existence náhodných proměnných, dále označované jako $Z^I_{i,k}$, kde *i*,*k* ∈ $\{0, 1, \dots, n\}$. Náhodné proměnné $Z^I_{i,k}$ můžeme interpretovat, jako vyplacené pojistné plnění se zpožděním *k* let, které se vztahuje ke škodě vzniklé v roce *i*, a to jak u pojistných plnění splňující podmínky IBNR, tak u pojistných plnění splňující podmínky RBNS. Matematický zápis vypočtení jednotlivých náhodných proměnných $Z^I_{i,k}$ z výplatních trojúhelníků IBNR a RBNS je pouhý součet obou trojúhelníků, tedy

$$Z^I_{i,k} = Z^{IBNR}_{i,k} + Z^{RBNS}_{i,k} \tag{3.3}$$

kde $Z^{IBNR}_{i,k}$ je náhodná proměnná z nekumulativního IBNR trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$Z^{RBNS}_{i,k}$ je náhodná proměnná zjištěná z nekumulativního RBNS trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*.

Podoba incurred nekumulativního vývojového trojúhelníku je obdobná jako výplatního nekumulativního vývojového trojúhelníku, viz. tabulka 1. [7]

### 3.3.4 Incurred kumulativní vývojový trojúhelník

V případě modelování škod pomocí incurred kumulativního vývojového trojúhelníku, se uvažují náhodné proměnné, které se dále značí jako $C_{i,k}^{I}$, kde $i,k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Tyto náhodné proměnné lze interpretovat jako kumulované vyplacené pojistné plnění se zpožděním *k* let, které se vztahuje k roku *i*, kdy škoda vznikla.

Stejně jako u výplatního kumulativního vývojového trojúhelníku, lze incurred kumulativní vývojový trojúhelník získat z incurred nekumulativního vývojového trojúhelníku, a to podle následujícího vzorce

$$C_{i,k}^{I} = \sum_{I=0}^{k} Z_{i,l}^{I} \tag{3.4}$$

kde $C_{i,k}^{I}$ jsou pozorovatelné proměnné kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$Z_{i,l}^{I}$ jsou pozorovatelné proměnné nekumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *l*,

pro pozorovatelné náhodné proměnné $C_{i,k}^{I}$ a

$$C_{i,k}^{I} = C_{i,n-i}^{I} + \sum_{I=n-i+1}^{k} Z_{i,l}^{I} \tag{3.5}$$

kde $C_{i,n-i}^{I}$ jsou diagonální prvky kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *n-i*,

pro nepozorovatelné náhodné proměnné $C_{i,k}^{I}$.

Incurred kumulativní vývojový trojúhelník vypadá obdobně, jako výplatní kumulativní trojúhelník, viz. tabulka 2. [7]

# 4 VÝVOJOVÉ KOEFICIENTY

Za účelem odhadu budoucího pojistného plnění a tím i velikosti škodní rezervy v budoucnu, je nejdříve potřeba vypočítat tzv. ***vývojové koeficienty***. Jednou z podmínek škodního rezervování je, že lze využít vývojových trojúhelníku jen v případě, že vývoj škod v jednotlivých letech, kdy škody nastali, bude stejný.

V této části jsou brány v úvahu tři běžně používané vývojové koeficienty, které jsou formálně odlišné, nicméně jsou si podobné a lze jednoduše upravit jeden vývojový koeficient do druhého. Můžeme tedy tyto vývojové koeficienty jednoduše modifikovat a tím je i využít k jakýmkoliv trojúhelníkovým metodám, další výhodou je snadná interpretace těchto vývojových koeficient. Dále se v této práci vyskytují i dva alternativní způsoby zjištění vývojových koeficientů.

Způsobů odhadování vývojových koeficientů je celá řada, a proto se každý způsob odhadu vývojového koeficientu liší u některých trojúhelníkových metod, které se využívají pro odhad škodních rezerv. V některých případech pro odhad vývojových koeficientů nestačí pouze znalost výplatního vývojového trojúhelníku, ale také znalost dalších dat, jako jsou počty škod v daných letech vzniku škody nebo přijaté zasloužené pojistné v jednotlivých letech vzniku škody. [5]

## 4.1 Přírůstkové podíly

Tento způsob získání vývojových koeficientů, využívá jak údajů z nekumulativního vývojového trojúhelníku, tak údajů z kumulativního vývojového trojúhelníku. Předpokládá se, že existuje vektor $\vec{\vartheta} = (\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$, kde $\sum_{l=0}^{n} \vartheta_l = 1$. Tyto proměnné $\vartheta_k$, nazývány jako vývojové koeficienty pro ***přírůstkové podíly*** (incremental quotas), jsou získané pomocí vzorce

$$\vartheta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{E[C_{i,k}]} \tag{4.1}$$

kde $\vartheta_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro přírůstkové podíly vektoru $\vec{\vartheta}$,

$Z_{i,k}$ je pozorovatelná proměnná nekumulativního trojúhelníku v řádku $i$ a sloupci $k$,

$C_{i,k}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku $i$ a sloupci $k$,

platí pro všechna $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ a platí pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Vývojový ukazatel pro přírůstkové podíly existuje pouze tehdy a jen tehdy, když v každém vývojovém roce $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ jsou jednotlivé (nebo individuální) přírůstkové podíly

$$\vartheta_{i,k} := \frac{E[Z_{i,k}]}{E[C_{i,k}]} \tag{4.2}$$

stejné (nebo identické) pro všechny roky vzniku škod $i$.

V případě vývojového trojúhelníku pro vyplacená pojistná plnění nebo počtu škod je obvykle využit další předpoklad a to ten, že platí $\vartheta_k > 0$, pro všechna $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. V případě vývojového trojúhelníku pro vzniklá pojistná plnění, tento předpoklad neplatí, tedy vývojový koeficient $\vartheta_k$ může být i záporný. [5]

## 4.2 Kumulativní podíly

Pro výpočet vývojových koeficientů se využívá oproti předešlému způsobu pouze kumulativních trojúhelníků. Předpokládá se, že existuje vektor $\vec{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ s parametry $\gamma_k$, kde $\gamma_n = 1$. Tyto proměnné $\gamma_k$ jsou dále nazývány jako vývojové koeficienty pro ***kumulativní podíly*** (cumulative quotas), které se získají podle vzorce

$$\gamma_k = \frac{E[C_{i,k}]}{E[C_{i,n}]} \tag{4.3}$$

kde $\gamma_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro kumulativní podíly vektoru $\vec{\gamma}$,

$C_{i,k}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$C_{i,n}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *n*,

platí pro všechna $k \in \{0, 1, \dots, \mathrm{n}\}$ a pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Vývojový ukazatel pro kumulativní podíly existuje pouze tehdy a jen tehdy, když v každém vývojovém roce $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ jsou jednotlivé (nebo individuální) kumulativní podíly

$$\gamma_{i,k} := \frac{E[C_{i,k}]}{E[C_{i,n}]} \tag{4.4}$$

stejné (nebo identické) pro všechny roky vzniku škod $i$.

Pro výplatní vývojové trojúhelníky a vývojové trojúhelníky s počty škod obvykle platí předpoklad, že $0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_n$. V případě incurred vývojových trojúhelníků lze, vývojové koeficienty pro přírůstkové podíly a vývojové koeficienty pro kumulativní podíly konvertovat navzájem, a to následujícím způsobem:

- Pokud je $\vec{\gamma}$ vývojovým koeficientem pro kumulativní podíly, pak vývojový koeficient $\vec{\vartheta}$ pro přírůstkové podíly je získán následovně

$$\vartheta_k := \begin{cases} \gamma_0 & \text{, pro } k = 0 \\ \gamma_k - \gamma_{k-1} & \text{, pro } k = 1,2,\dots,n \end{cases} \tag{4.5}$$

kde $\vartheta_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro kumulativní podíly vektoru $\vec{\vartheta}$,

$\gamma_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro přírůstkové podíly vektoru $\vec{\gamma}$.

- Pokud je $\vec{\vartheta}$ vývojovým koeficientem pro přírůstkové podíly, pak vývojový koeficient $\vec{\gamma}$ pro kumulativní podíly je získán pomocí vzorce

$$\gamma_k := \sum_{l=0}^{k} \vartheta_l \tag{4.6}$$

kde $\gamma_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro přírůstkové podíly vektoru $\vec{\gamma}$,

$\vartheta_l$ je $l$ – tý vývojový koeficient pro kumulativní podíly vektoru $\vec{\vartheta}$.

Dále platí, že $0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_n$, a to pouze za předpokladu, že $\vartheta_k > 0$, toto platí pro všechna $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Tyto vývojové koeficienty využívá např. rozšířená Bornhuetter-Ferguson metoda, metoda loss-development a další. [5]

## 4.3 Faktory

Pro odhad vývojových koeficientů pomocí faktorů se využívá kumulativní vývojový trojúhelník. Předpokládáme, že existuje takový vektor $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, který se dále nazývá vektor vývojových koeficientů - ***faktorů***, získaný pomocí vzorce

$$\varphi_k = \frac{E[C_{i,k}]}{E[C_{i,k-1}]} \tag{4.7}$$

kde $\varphi_k$ je $k$ – tý vývojový faktor vektoru $\vec{\varphi}$,

$C_{i,k}$ je pozorovatelná proměnné kumulativního trojúhelníku v řádku $i$ a sloupci $k$,

platí pro všechna $k \in \{1, \dots, n\}$ a pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Vývojový faktor existuje, jen a pouze když, pro každý vývojový rok $\{1, \dots, n\}$ jsou jednotlivé faktory

$$\varphi_{k,i} = \frac{E\left[C_{i,k}\right]}{E\left[C_{i,k-1}\right]} \tag{4.8}$$

stejné pro všechny roky vzniku škod $i$.

V případě výplatních vývojových trojúhelníků a vývojových trojúhelníků s počty škod v jednotlivých vývojových letech, obvykle předpokládáme, že platí $\varphi_k > 0$ a to pro všechny $k \in \{1, \dots, n\}$.

Vývojové koeficienty pro faktory a vývojové koeficienty pro kumulativní podíly mohou být konvertovány navzájem, a to následujícími způsoby:

- Pokud je $\vec{\varphi}$ vývojovým faktorem, pak vývojový koeficient $\vec{\gamma}$ pro kumulativní podíly je získán pomocí vzorce

$$\gamma_k := \prod_{l=k+1}^{n} \frac{1}{\varphi_l} \tag{4.9}$$

kde $\gamma_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro kumulativní podíly vektoru $\vec{\gamma}$,

$\varphi_l$ je $l$ – tý vývojový faktor vektoru $\vec{\varphi}$.

- Pokud je $\vec{\gamma}$ vývojovým koeficientem pro kumulativní podíly, pak vývojový koeficient $\vec{\varphi}$ pro faktory lze získat následovně

$$\varphi_k := \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}} \tag{4.10}$$

kde $\varphi_k$ je $k$ – tý vývojový faktor vektoru $\vec{\varphi}$,

$\gamma_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro kumulativní podíly vektoru $\vec{\gamma}$.

Dále předpokládáme, že podmínka $\varphi_k > 1$ pro všechna $k \in \{1, \dots, n\}$, platí pouze tehdy, když je splněna podmínka $\gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_n$. I když v této části není popsána konverze vývojového koeficientu $\varphi$ do vývojového koeficientu pro přírůstkové podíly, je zřejmé, že i tuto matematickou operaci lze provést. Tento přístup výpočtu vývojového koeficientu využívá např. metoda chain-ladder apod. [5]

## 4.4 Přírůstkové poměry

Jedná se o alternativní způsob zjištění vývojových koeficientů. Tento způsob pro zjištění vývojových koeficientů využívá nekumulativní vývojový trojúhelník. Využívá se např. u Panningovi metody. Předpokladem je, že existuje takový vektor $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$, kde platí, že $\beta_0 = 1$ a jednotlivé vývojové koeficient pro ***přírůstkové poměry*** (incremental ratios) se dají vypočítat podle následujícího vzorce

$$\beta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{E[Z_{i,0}]} \tag{4.11}$$

kde $\beta_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro přírůstkové poměry vektoru $\vec{\beta}$,

$Z_{i,k}$ je pozorovatelná proměnná nekumulativního trojúhelníku v řádku $i$ a sloupci $k$,

platí pro všechna $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ a pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Vývojové koeficienty pro přírůstkové poměry existují pouze tehdy a jen tehdy, když pro každý vývojový rok $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ jsou jednotlivé přírůstkové poměry

$$\beta_{i,k} := \frac{E[Z_{i,k}]}{E[Z_{i,0}]} \tag{4.12}$$

stejné pro všechny roky vzniku škod $i$.

Dále předpokládáme, že pro výplatní vývojové trojúhelníky anebo vývojové trojúhelníky počtu škod platí podmínka $\beta_k > 0$, a to pro všechny $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Platí také, že vývojové koeficienty pro přírůstkové poměry lze konvertovat na vývojové koeficienty pro přírůstkové podíly a opačně. Konverze vývojových koeficientů vypadá pak následovně:

- Pokud $\vec{\beta}$ je vývojovým koeficientem pro přírůstkové poměry, pak vývojový koeficient $\vec{\vartheta}$ pro přírůstkové podíly je získán pomocí vzorce

$$\vartheta_k := \frac{\beta_k}{\sum_{l=0}^{n} \beta_l} \tag{4.13}$$

kde $\vartheta_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro kumulativní podíly vektoru $\vec{\vartheta}$,

$\beta_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro přírůstkové poměry vektoru $\vec{\beta}$,

$\beta_l$ je $l$ – tý vývojový koeficient pro přírůstkové poměry vektoru $\vec{\beta}$.

- Pokud $\vec{\vartheta}$ je vývojovým koeficientem pro přírůstkové podíly, pak vývojový koeficient $\vec{\beta}$ pro přírůstkové poměry je získán pomocí vzorce

$$\beta_k := \frac{\vartheta_k}{\vartheta_0} \tag{4.14}$$

kde $\beta_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro přírůstkové poměry vektoru $\vec{\beta}$,

$\vartheta_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro přírůstkové podíly vektoru $\vec{\vartheta}$.

Dále lze takto konvertovat vývojové koeficienty pro přírůstkové poměry a vývojové koeficienty pro kumulativní podíly, konverzi lze provést za použití těchto vzorců:

- Pokud $\vec{\beta}$ je vývojovým koeficientem pro přírůstkové poměry, pak vývojový koeficient $\vec{\gamma}$ pro kumulativní podíly je získán pomocí vzorce

$$\gamma_k := \frac{\sum_{l=0}^{k} \beta_l}{\sum_{l=0}^{n} \beta_l} \tag{4.15}$$

kde $\gamma_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro kumulativní podíly vektoru $\vec{\gamma}$,

$\beta_l$ je $l$ – tý vývojový koeficient pro přírůstkové poměry vektoru $\vec{\beta}$.

- Pokud $\vec{\gamma}$ je vývojovým koeficientem pro kumulativní podíly, pak vývojový koeficient $\vec{\beta}$ pro přírůstkové poměry je získán následovně

$$\beta := \begin{cases} 1 & \text{, pro } k = 0 \\ \dfrac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{\gamma_0} & \text{,pro } k = 1,2,\dots,n \end{cases} \tag{4.16}$$

kde $\beta_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro přírůstkové poměry vektoru $\vec{\beta}$,

$\gamma_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro kumulativní podíly vektoru $\vec{\gamma}$.

Toto vše lze provést pouze při platnosti podmínky $\beta_k > 0$, a to pro všechna $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, dále za podmínky $\vartheta_k > 0$, platí pro všechna $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ a také pokud je splněna podmínka $0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_n$. [5]

## 4.5 Přírůstky škodních průběhů

Tento způsob výpočtu nevyužívá pouze údajů z vývojového trojúhelníku pojistných plnění, ale také externích dat, jako jsou přijaté zasloužené pojistné nebo počet škod, které dále budeme značit jako $\vec{\pi}$. Vývojové koeficienty pro ***přírůstky škodních průběhů*** (incremental loss ratios), tedy lze odhadnout, pouze pokud existuje vektor $\vec{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$, který je známý již před odhadem těchto vývojových koeficientů. Dále díky vektoru $\vec{\pi}$ lze odhadnout vektor $\vec{\xi}(\vec{\pi}) = (\xi_0(\vec{\pi}), \xi_1(\vec{\pi}), \dots, \xi_0(\vec{\pi}))$ s parametry, které jsou dále nazývány jako vývojové koeficienty pro ***přírůstkové škodní průběhy***.

Jednotlivé vývojové koeficienty pro přírůstkové škodní průběhy se získají pomocí následujícího vzorce

$$\xi_k(\vec{\pi}) = E\left[\frac{Z_{i,k}}{\pi_i}\right] \tag{4.17}$$

kde $\xi_k(\vec{\pi})$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro přírůstky škodních průběhů vektoru $\vec{\xi}(\vec{\pi})$,

$\pi_i$ je $i$ – tá proměnná z vektoru $\vec{\pi}$,

$Z_{i,k}$ je pozorovatelná proměnná nekumulativního trojúhelníku v řádku $i$ a sloupci $k$,

to platí pro všechny $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ a pro všechny $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Vývojové koeficienty pro přírůstky škodních průběhů existují pouze tehdy, když v každém vývojovém roce $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ jsou jednotlivé přírůstky škodních průběhů

$$\xi_{i,k}(\vec{\pi}) = E\left[\frac{Z_{i,k}}{\pi_i}\right] \tag{4.18}$$

stejné pro všechny roky vzniku škody $i$.

Dále se předpokládá, že pro výplatní vývojové trojúhelníky a vývojové trojúhelníky s počty škod platí $\xi_k(\vec{\pi}) > 0$ a to pro všechny $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Vývojové koeficienty pro přírůstky škodních průběhů lze konvertovat do vývojových koeficientů pro přírůstkové podíly, a to pomocí následujícího vzorce

$$\vartheta_k(\vec{\pi}) \coloneqq \frac{\xi_k(\vec{\pi})}{\sum_{l=0}^{n} \xi_l(\vec{\pi})} \tag{4.19}$$

kde $\vartheta_k(\vec{\pi})$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro přírůstkové podíly vektoru $\vec{\vartheta}(\vec{\pi})$,

$\xi_k(\vec{\pi})$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro přírůstky škodních průběhů vektoru $\vec{\xi}(\vec{\pi})$.

Dále lze konvertovat vývojové koeficienty pro přírůstky škodních průběhů do vývojových koeficientů pro kumulativní podíly, a to pomocí vzorce

$$\gamma_k(\pi) \coloneqq \frac{\sum_{l}^{k} \xi_l(\vec{\pi})}{\sum_{l=0}^{n} \xi_l(\vec{\pi})} \tag{4.20}$$

kde $\gamma_k(\vec{\pi})$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro kumulativní přírůstky vektoru $\vec{\gamma}(\vec{\pi})$,

$\xi_l(\vec{\pi})$ je $l$ – tý vývojový koeficient pro přírůstky škodních průběhů vektoru $\vec{\xi}(\vec{\pi})$. [5]

# 5 TŘÍDA METOD BORNHUETTER-FERGUSON

Pod tuto třídu spadá celá řada trojúhelníkových metod, které se používají pro odhad technických rezerv v pojišťovnictví, přesněji se používají pro odhad škodních rezerv. Každá metoda má jiné předpoklady a je rozdílná v náročnosti na datech. Hlavním cílem těchto metod je odhad dolní části vývojového trojúhelníku a díky tomu odhadnout výši škod pro budoucí období a odhad budoucí škodní rezervy. Kvalita odhadu se u těchto metod zjišťuje pomocí tzv. ***back testingu***, tedy zpětně. Patří sem metody jako jsou:

- Chain-ladder metoda
- Bornhuetter-Ferguson metoda
- Cape-cod metoda
- Aditivní metoda
- Panningova metoda
- Mackova metoda
- Loss-development metoda

V této práci jsou uvedeny vybrané z těchto metod společně s rozšířením metody chain-ladder o inflační vyrovnání. [5]

## 5.1 Bornhuetter-Ferguson metoda

Metoda Bornhuetter-Ferguson (dále jen B-F) je základní metodou této třídy, ostatní metody, které v této práci uvedeny jsou rozšířením této metody. Metoda byla představena v článku ***„The actuary and IBNR“*** v roce 1972 Ronaldem Bornhuetterem a Ronaldem Fergusonem. [6]

B-F metoda je založena na předpokladu, že existují vektory $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ a $\vec{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$, kde $\gamma_n = 1$ a pro které platí vztah

$$E[C_{i,k}] = \gamma_k \cdot \alpha_i \tag{5.1}$$

kde $C_{i,k}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$\gamma_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro metodu B-F vektoru $\vec{\gamma}$,

$\alpha_i$ je $i$ – tá celková škoda vektoru $\vec{\alpha}$,

toto platí pro všechna $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ a pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dále platí, že

$$E[C_{i,n}] = \alpha_i \tag{5.2}$$

kde $C_{i,n}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *n*,

a tudíž

$$\gamma_k = \frac{E[C_{i,k}]}{E[C_{i,n}]} \tag{5.3}$$

což znamená, že $\vec{\gamma}$ je vývojovým ukazatelem pro kumulativní podíly.

Dalším předpokladem je, že vektory $\vec{\hat{\gamma}} = (\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n)$ a $\vec{\hat{\alpha}} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n)$, jsou předem dány. Hodnoty $\hat{\gamma}_k$ jsou jednotlivé apriorními odhady pro kumulativní podíly ($\hat{\gamma}_n = 1$) a $\hat{\alpha}_k$ apriorními odhady očekávaných celkových škod. Tyto apriorní odhady mohou být získány jak pomocí interních informací, tak pomocí externích informací nebo kombinací znalosti externích a interních informací.

Jednotlivé předpovědi dolní části trojúhelníku u metody B-F jsou dány pomocí kumulativních škod $C_{i,k}$, za podmínky znalosti pozorovatelných náhodných proměnných, kde $i + k \geq n$ a odhadnou se pomocí následujícího vzorce

$$\hat{C}_{i,k}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) := C_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \hat{\alpha}_i \tag{5.4}$$

kde $\hat{C}_{i,k}^{BF}$ je odhadnutá nepozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$C_{i,n-i}$ jsou diagonální prvky kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *n-i*,

$\hat{\gamma}_k$ je *k* – tý apriorní odhad pro kumulativní podíly,

$\hat{\alpha}_i$ je *i* – tý apriorní odhad očekávaných celkových škod.

Jednotlivé odhady získané metodou B-F můžeme také zapsat pomocí následujícího vzorce

$$E[C_{i,k}] = E[C_{i,n-i}] + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \hat{\alpha}_i \tag{5.5}$$

kde $C_{i,k}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

který je důsledkem předpokladu modelu. Dále označujeme

$$\hat{C}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) := (\hat{C}_{i,k}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}))_{i,k \in (0,1,\dots,n),\ \ i+k \geq n} \tag{5.6}$$

kde $\hat{C}_{i,k}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha})$ jsou předpovědi získané metodou B-F v řádku *i* a sloupci *k*,

jako vývojový trojúhelník pro všechny B-F odhady.

Rozdíl mezi odhady získaných metodou B-F a aktuálními škodami je zapsán následujícím vzorce

$$\hat{C}_{i,k}^{BF} - C_{i,n-i} = (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \hat{\alpha}_i \tag{5.7}$$

kde $\hat{C}_{i,k}^{BF}$ je odhadnutá nepozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku $i$ a sloupci $k$,

v případě, kdy $k = n$ platí vzorec

$$\hat{C}_{i,n}^{BF} - C_{i,n-i} = (1 - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \hat{\alpha}_i \tag{5.8}$$

kde $\hat{C}_{i,n}^{BF}$ je odhadnutá nepozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku $i$ a sloupci $n$.

Takto jsou definovány odhady pro škodní rezervy $C_{i,n} - C_{i,n-i}$ pro budoucí roky vzniku $i$, podle Bornhuettera a Fergusona. Nicméně v původní verzi u metody B-F byly apriorní odhady očekávaných celkových škod získány pomocí předepsaného pojistného a očekávaného škodního průběhu, tedy vývojové koeficienty se získaly z vývojového trojúhelníku. [5]

Na začátku této podkapitoly jsme se zmínili že jednotlivé metody, které spadají do třídy metod B-F jsou s metodou B-F spojeny. Jak jsou jednotlivé metody s touto metodou spojeny je názorně ukázáno v následující tabulce

**Tabulka 3: Propojenost jednotlivých metod s metodou B-F**

| Prior Estimators of Expected Ultimate Losses | Prior Estimators of Cumulative Quotas | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\hat{\gamma}^{\text{external}}$ | $\hat{\gamma}^{\text{AD}}(\pi)$ | $\hat{\gamma}^{\text{CL}}$ | $\hat{\gamma}^{\text{Panning}}$ |
| $\hat{\alpha}^{\text{external}}$ | Bornhuetter-Ferguson Method (external) | | | |
| $\hat{\alpha}^{\text{CC}}(\pi, \hat{\gamma})$ | Cape Cod Method (external) | Additive Method | | |
| $\hat{\alpha}^{\text{AD}}(\pi)$ | | Additive Method | | |
| $\hat{\alpha}^{\text{LD}}(\hat{\gamma})$ | Loss-Development Method (external) | | Chain-Ladder Method | |
| $\hat{\alpha}^{\text{Panning*}}(\hat{\gamma})$ | | | | Panning's Method |
| $\hat{\alpha}^{\text{Panning}}$ | | | | Panning's Method |

*Zdroj: [5]*

Tabulku 3 lze interpretovat, tak že například metoda loss-development je speciální případ metody B-F s ohledem na $\hat{\gamma}^{external}$ a $\hat{\alpha}^{LD}(\hat{\gamma})$, aditivní metoda je speciálním případem metody B-F s ohledem na $\hat{\gamma}^{AD}(\vec{\pi})$ a $\hat{\alpha}^{AD}(\hat{\gamma})$.

## 5.2 Loss-development metoda

Tato metoda je založena na předpokladu, že existuje vektor $\vec{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$, kde $\gamma_n = 1$, který lze získat pomocí vzorce

$$\gamma_k = \frac{E[C_{i,k}]}{E[C_{i,n}]} \tag{5.9}$$

kde $C_{i,k}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$C_{i,n}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *n*,

$\gamma_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro metodu loss-development vektoru $\vec{\gamma}$ ,

platí pro všechna $k \in \{0,1, \dots , n\}$ a pro všechna $i \in \{0,1, \dots , n\}$.

Dále je metoda loss-development založena na dalším předpokladu a to takovém, že existuje vektor $\vec{\hat{\gamma}} = (\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n)$, kde jsou jednotlivé vývojové koeficienty pro kumulativní podíly získány z apriorního odhadu, samozřejmě také platí, že $\hat{\gamma}_n = 1$.

Odhady dolní části vývojového trojúhelníku pomocí metody loss-development, tedy nepozorovatelné proměnné, které splňují podmínku $i + k \geq n$ jsou získány pomocí následujícího vzorce

$$\hat{C}_{i,k}^{LD} \coloneqq \hat{\gamma}_k \cdot \frac{C_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}} \tag{5.10}$$

kde $\hat{C}_{i,k}^{LD}$ je odhadnutá nepozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$\hat{\gamma}_k$ je $k$ – tý odhadnutý vývojový koeficient pro metodu loss-development vektoru $\vec{\gamma}$,

$C_{i,n-i}$ jsou diagonální prvky kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *n-i*.

Odhad dolní části vývojového trojúhelníku pomocí metody loss-development také lze zapsat následovně

$$E\left[C_{i,k}\right] = \gamma_k \cdot \frac{E[C_{i,n-i}]}{\gamma_{n-i}} \tag{5.11}$$

což je v souladu s předpoklady modelu. Dále označíme

$$\hat{C}^{LD}(\vec{\gamma}) := (\hat{C}_{i,k}^{LD}(\vec{\gamma}))_{i,k\in(0,1,\dots,n),\ \ i+k\geq n} \tag{5.12}$$

kde $\hat{C}_{i,k}^{LD}(\vec{\gamma})$ jsou předpovědi získané metodou loss-development s ohledem na $\vec{\gamma}$ v řádku *i* a sloupci *k*,

jako vývojový trojúhelník pro všechny loss-development odhady. Dále

$$\hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma}) \coloneqq \hat{C}_{i,n}^{LD}(\hat{\gamma}) \tag{5.13}$$

kde $\hat{C}_{i,n}^{LD}(\hat{\gamma})$ jsou předpovědi získané metodou loss-development s ohledem na $\hat{\gamma}$ v řádku $i$ a sloupci $k$,

odhady loss-development můžou být zapsány následovně

$$\hat{C}_{i,k}^{LD}(\hat{\gamma}) = C_{n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma}) \tag{5.14}$$

kde $\hat{C}_{i,k}^{LD}(\hat{\gamma})\hat{C}_{i,n}^{LD}(\hat{\gamma})$ jsou předpovědi získané metodou Loss-development s ohledem na $\hat{\gamma}$ v řádku $i$ a sloupci $k$,

$\hat{\alpha}_i^{LD}(\hat{\gamma})$ je $i$ – tý apriorní odhad vektoru $\hat{\alpha}^{LD}(\hat{\gamma}) \coloneqq (\hat{\alpha}_0^{LD}(\hat{\gamma}), \dots, \hat{\alpha}_n^{LD}(\hat{\gamma}))$,

tím získáme vzorec

$$\hat{C}^{LD}(\hat{\gamma}) = \hat{C}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}^{LD}(\hat{\gamma})) \tag{5.15}$$

Na základě získaného vzorce můžeme říci, že metoda loss-development s ohledem na $\hat{\gamma}$ není ničím jiným než speciálním případem metody B-F s ohledem na $\hat{\gamma}$ a $\hat{\alpha}^{LD}(\hat{\gamma})$. [5]

## 5.3 Standardní metoda chain-ladder

Metoda chain-ladder je nejznámější a nejpoužívanější trojúhelníkovou metodou pro odhad technických rezerv vůbec. Tato metoda je oblíbená díky své jednoduchosti a s ohledem na svou jednoduchost podává relativně přesné výsledky.

Chain-ladder se nejčastěji používá pro odhad škod u pojištění majetku, nehod a ve zdravotním pojištění. V případě této metody stačí pro odhad škodní rezervy znát pouze výplatní vývojový trojúhelník s pojistnými plněními.

Předpoklady pro využití této metody jsou následující:

- Konstantní inflace v jednotlivých vývojových letech
- Homogenní portfolio pojistných smluv (lze získat procesem homogenizace)
- Lze odhadnout vývojové koeficienty pro jednotlivé vývojové roky

Metoda chain-ladder je založena na předpokladu, že pro odhad vývojových koeficientů lze použít vývojové faktory. Tyto vývojové koeficienty pochází z vektoru $\varphi^{CL} = (\varphi_1^{CL}, .., \varphi_n^{CL})$, kde se jednotlivé vývojové faktory získají podle následujícího vzorce

$$\varphi_k^{CL} = \frac{E[C_{i,k}]}{E[C_{i,k-1}]} \tag{5.16}$$

kde $\varphi_k^{CL}$ je $k$ – tý vývojový faktor pro standardní metodu chain-ladder vektoru $\vec{\varphi}^{CL}$,

$C_{i,k}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku $i$ a sloupci $k$, platí pro všechna $k \in \{1, \dots, n\}$ a pro všechna $i \in \{0,1, \dots, n\}$.

Jednotlivé předpovědi pomocí metody chain-ladder jsou dány pomocí kumulativních škod $C_{i,k}$, za podmínky znalosti pozorovatelných náhodných proměnných, kde $i + k \geq n$ a odhadnou se pomocí následujícího vzorce

$$\hat{C}_{i,k}^{CL} = C_{i.n-i} \cdot \prod_{l=n-i+1}^{k} \hat{\varphi}_l^{CL} \tag{5.17}$$

kde $\hat{C}_{i,k}^{CL}$ je odhadnutá nepozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku $i$ a sloupci $k$,

$C_{i.n-i}$ jsou diagonální prvky kumulativního trojúhelníku v řádku $i$ a sloupci $n$-$i$,

$\hat{\varphi}_l^{CL}$ je $l$– tý odhadnutý vývojový faktor pro metodu chain-ladder ze vzorce (5.18).

Odhad jednotlivých vývojových faktorů se provádí podle níže uvedeného vzorce

$$\hat{\varphi}_k^{CL} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} C_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} C_{j,k-1}} \tag{5.18}$$

kde $C_{j.k}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku $j$ a sloupci $k$,

$C_{j.k-1}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku $j$ a sloupci $k$-1.

Pomocí takto odhadnutých nepozorovatelných proměnných se získá dolní část trojúhelníku, z kterého se dají následovně predikovat budoucí škody a tím i velikost škodní rezervy, která je potřeba pro tyto škody vytvořit. Celkově lze odhadnout $n - 1$ let budoucích škod, kde $n$ je celkový počet vývojových let trojúhelníku. Výši pojistných plnění v jednotlivých budoucích letech lze odhadnout součtem hodnot na diagonálách dolní části nekumulativního vývojového trojúhelníku. Celkovou škodní rezervu pak lze odhadnout pomocí součtu všech odhadů pojistných plnění v budoucích letech. Existuje celá řada modifikací metod chain-ladder, jako je např. Mnichovská metoda chain-ladder apod.

Jednotlivé odhady získané metodou chain-ladder můžeme také zapsat pomocí následujícího vzorce

$$E[C_{i,k}] = E[C_{i,n-i}] \cdot \prod_{l=n-i+1}^{k} \varphi_l \tag{5.19}$$

Kde $C_{i,k}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$C_{i,n-i}$ jsou diagonální prvky kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *n-i*,

$\varphi_l$ je *l*– tý vývojový faktor,

který je důsledkem předpokladu modelu. Dále označujeme

$$\hat{C}^{CL} := (\hat{C}^{CL}_{i,k})_{i,k\in(0,1,\ldots,n),\ \ i+k\geq n} \tag{5.20}$$

kde $\hat{C}^{CL}_{i,k}$ jsou předpovědi získané metodou B-F v řádku *i* a sloupci *k*,

jako vývojový trojúhelník pro všechny chain-ladder odhady. Dále

$$\hat{\gamma}^{CL}_k = \prod_{l=k+1}^{n} \frac{1}{\hat{\varphi}^{CL}_l} \tag{5.21}$$

kde $\hat{\varphi}^{CL}_l$ je *l*– tý odhadnutý vývojový faktor pro metodu chain-ladder,

$\hat{\gamma}^{CL}_k$ je *k*– tý odhadnutý vývojový koeficient pro kumulativní podíly metody chain-ladder,

jsou odhady kumulativních přírůstků získané pomocí metody chain-ladder, pak lze pro odhad dolní části trojúhelník použít následující vzorec

$$\hat{C}^{CL}_{i,k} = \hat{\gamma}^{CL}_k \cdot \frac{C_{i,n-i}}{\hat{\gamma}^{CL}_{n-i}} \tag{5.22}$$

kde $\hat{C}^{CL}_{i,k}$ je odhadnutá nepozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$\hat{\gamma}^{CL}_k$ je *k*– tý odhadnutý vývojový koeficient pro kumulativní podíly metody chain-ladder,

$C_{i,n-i}$ jsou diagonální prvky kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *n-i*.

Tím získáme

$$\hat{C}^{CL} = \hat{C}^{LD}(\hat{\gamma}^{CL}) \tag{5.23}$$

a za předpokladu znalosti vzorce (5.15), lze upravit na následující vzorec

$$\hat{C}^{CL} = \hat{C}^{BF}(\hat{\gamma}^{CL}, \hat{\alpha}^{LD}(\hat{\gamma}^{CL})) \tag{5.24}$$

Můžeme tedy říci, že metoda chain-ladder se shoduje s metodou loss-development s ohledem na $\hat{\gamma}^{CL}$ a není nic jiného než speciálním případem metody B-F s ohledem na $\hat{\gamma}^{CL}$ a $\hat{\alpha}^{LD}(\hat{\gamma}^{CL})$. [5]

## 5.4 Metoda chain-ladder s inflačním vyrovnáním

Metoda chain-ladder s inflačním vyrovnáním oproti standardní metodě chain-ladder neočekává konstantní inflaci a tím se více přibližuje realitě. Na druhou stranu je metoda náročnější na vstupy, protože je potřeba znát míru inflace pro jednotlivá období, ta se získá např. z Českého statistického úřadu, dále je potřeba znát technickou úrokovou míru, která je s pojistnými smlouvami spojena.

V případě této metody je potřeba v prvním kroku přepočíst pojistná plnění u nekumulativního vývojového trojúhelníku pomocí získaných měr inflací vývojových let, to se provede podle následujícího vzorce

$$Z_{i,k}^{Inf} = Z_{i,k} * \prod_{l=i+k}^{n} (1 + h_l) \tag{5.25}$$

kde $Z_{i,k}^{Inf}$ je inflačně upravená pozorovatelná proměnná nekumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$Z_{i,k}$ je pozorovatelná proměnná nekumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$h_t$ je inflační míra v roce *l*.

Po přepočítání nekumulovaného trojúhelníku pomocí inflačních měr se pro tento nekumulativní trojúhelník vytvoří kumulativní trojúhelník, za použití vzorce (3.1). Poté se postupuje stejně jako u standartního výpočtu metody chain-ladder. Avšak po odhadu výše pojistných plnění pro jednotlivá období, je potřeba tyto odhady upravit o míru inflace, která se předpokládá v jednotlivých budoucích letech, to lze provést podle následujícího vzorce

$$\hat{R}_i^{Inf} = \hat{R}_i \cdot (1 + h_t)^{t/2} \tag{5.26}$$

kde $\hat{R}_i^{Inf}$ inflačně upravená výše pojistných plnění v budoucím roce *i*,

$\hat{R}_i$ neupravená výše pojistných plnění v budoucím roce *i*,

$h_t$ je inflační míra v čase *t*.

Následně se tyto upravené odhady ještě diskontují pomocí technické úrokové míry, která je spojena se smlouvami, dále označována jako TÚM. Diskont se vypočítá pomocí vzorce

$$discont = \frac{1}{1 + TÚM} \tag{5.27}$$

kde $discont$ je diskontní faktor,

$TÚM$ je technická úroková míra spojená se smlouvami.

Velikost rezervy v jednotlivých letech, pak tvoří zdiskontované upravené odhady výše rezervy, matematický zápis je následující

$$\hat{R}_i^* = \hat{R}_i^{Inf} \cdot discont^{t/2} \tag{5.28}$$

kde $\hat{R}_i^*$ upravená výše pojistných plnění v budoucím roce *i*,

$\hat{R}_i^{Inf}$ inflačně upravená výše pojistných plnění v budoucím roce *i*,

$discont$ je diskontní faktor. [5]

## 5.5 Cape-Cod metoda

Metoda Cape-Cod dostala svůj název podle mysu, kde byla tato metoda představena. Někdy se také nazývá jako Standart-Bühlmann metoda, podle Jamese Standarda a Hanse Bühlmanna, kteří metodu představili.

Metoda je založena na předpokladu, že k odhadu škodních rezerv se využívá vývojových koeficientů pro kumulativní podíly, které pochází z vektoru $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, kde se jednotlivé koeficienty pro tuto metodu odhadují pomocí vzorce

$$\gamma_k = \frac{E[C_{i,k}]}{E[C_{i,n}]} \tag{5.29}$$

kde $C_{i,k}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$\gamma_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro metodu Cape-Cod vektoru $\vec{\gamma}$,

pro všechna k ∈ (0,1,…, *n*) a pro všechna *i* ∈ (0,1,…, *n*).

Dalším předpokladem je existence vektoru $\vec{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$, který tvoří přijaté zasloužené pojistné v jednotlivých minulých letech a vektoru $\vec{\hat{\gamma}} = (\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n)$, kde jednotlivé proměnné jsou apriorními odhady kumulativních podílů, které jsou dány buď z interních nebo externích dat.

Dále existuje předpoklad, že existuje proměnná

$$\kappa = E\left[\frac{C_{i,n}}{\pi_i}\right] \tag{5.30}$$

kde $C_{i,n}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku $i$ a sloupci $n$,

$\pi_i$ je $i$ – té přijaté zasloužené pojistné vektoru $\vec{\pi}$,

platí pro všechna $i \in (0,1,\dots, n)$. Proměnné $\kappa_i$ dále nazýváme jako celkové škodní průběhy a jednotlivé celkové škodní průběhy

$$\kappa_i = E\left[\frac{C_{i,n}}{\pi_i}\right] \tag{5.31}$$

jsou stejné pro všechny roky vzniku škod $i$.

Pokud bychom chtěli získat apriorní odhady kumulativních podílů, pak bychom odhadovali tyto vývojové koeficienty pomocí následujícího vzorce

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\hat{\gamma}_{k+1}}{\frac{\sum_{j=0}^{n-k} C_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} C_{j,k-1}}} \tag{5.32}$$

kde $\hat{\gamma}_{k+1}$ je $k+1$ – tý vývojový koeficient pro metodu Cape-Cod vektoru $\vec{\gamma}$,

$C_{j,k}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku $j$ a sloupci $k$,

platí pro $k < n$, protože $\hat{\gamma}_n = 1$.

Přijaté zasloužené pojistné v jednotlivých letech je potřeba upravit, tak aby pojistné v jednotlivých letech bylo přiměřené vývoji pojistného plnění v jednotlivých letech. Upravené pojistné se vypočítá podle následujícího vzorce

$$\pi_i^* = \pi_i * \gamma_k \tag{5.33}$$

kde $\pi_i^*$ je $i$ – té upravené přijaté zasloužené pojistné vektoru $\vec{\pi}^*$,

$\pi_i$ je $i$ – té přijaté zasloužené pojistné vektoru $\vec{\pi}$,

$\gamma_k$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro metodu Cape-Cod vektoru $\vec{\gamma}$.

Po úpravě přijatého zaslouženého pojistného se vypočítá suma pojistných plnění v aktuálním roce a suma upraveného přijatého zaslouženého pojistného, podílem těchto sum se následně odhadne škodní poměr, matematický zápis vypadá následovně

$$\hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}) \coloneqq \frac{\sum_{j=0}^{n} C_{j,n-j}}{\sum_{j=0}^{n} \pi_j^*} \tag{5.34}$$

kde $\hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma})$ je odhadnutý škodní poměr pro metodu Cape-Cod,

$C_{j,n-j}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *j* a sloupci *n-j*,

$\pi_j^*$ je *j* – té upravené přijaté zasloužené pojistné vektoru $\vec{\pi}^*$.

Jako kontrolu správnosti lze vypočítat rozdíl upraveného přijatého zaslouženého pojistného vynásobeného škodním poměrem a odečíst jej od celkového pojistného plnění aktuálního roku. Při správnosti výpočtu bude výsledkem 0 (případně velmi malé číslo), matematický zápis této kontroly je následující

$$kontrola = \sum_{i=1}^{n} \pi_i^* \cdot \hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}) - \sum_{j=0}^{n} C_{j,n-j} \tag{5.35}$$

kde $\pi_i^*$ je *i* – té upravené přijaté zasloužené pojistné vektoru $\vec{\pi}^*$,

$\hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma})$ je odhadnutý škodní poměr pro metodu Cape-Cod,

$C_{j,n-j}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *j* a sloupci *n-j*.

Dolní část trojúhelníku se v případě kumulativního trojúhelníku, vypočítá podle následujícího vzorce

$$\hat{C}_{i,k}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}) = C_{i,n-1} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \pi_i \cdot \hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}) \tag{5.36}$$

kde $\hat{C}_{i,k}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma})$ je odhadnutá nepozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$C_{i,n-1}$ je pozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *n*-1,

$\hat{\gamma}_{n-1}$ je *n*-1 – tý odhadnutý vývojový koeficient pro metodu Cape-Cod vektoru $\hat{\gamma}$,

$\pi_i$ je *i* – té přijaté zasloužené pojistné vektoru $\vec{\pi}$,

$\hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma})$ je odhadnutý škodní poměr pro metodu Cape-Cod.

Vypočtením dolní části trojúhelníku lze získat odhad budoucích pojistných plnění a tím odhadnout výši rezervy, kterou má pojišťovna na škody vzniklé do aktuálního roku vytvořit. Velikost škodní rezervy je dána následujícím vzorcem sumou pojistných plnění v budoucích letech u škod vzniklých do aktuálního roku, matematicky lze tuto operaci zapsat takto

$$Velikost\ škodní\ rezervy = \sum_{i=1}^{n} \hat{C}_{i,n}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}) - C_{i,n-i} \quad (5.37)$$

kde $\hat{C}_{i,n}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma})$ je odhadnutá nepozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *n*,

$C_{i,n-i}$ jsou diagonální prvky kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *n-i*.

Jednotlivé odhady získané metodou Cape-Cod můžeme také zapsat pomocí následujícího vzorce

$$E[C_{i,k}] = E[C_{i,n-i}] + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \pi_i \cdot \kappa \quad (5.38)$$

který je důsledkem předpokladu modelu. Dále označujeme

$$\hat{C}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}) := \ (\hat{C}_{i,k}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}))_{i,k\in(0,1,\dots,n),\ \ i+k\geq n} \quad (5.39)$$

kde $\hat{C}_{i,k}^{BF}(\hat{\pi},\hat{\gamma})$ jsou předpovědi získané metodou Cape-Cod v řádku *i* a sloupci *k*,

jako vývojový trojúhelník pro všechny Cape-Cod odhady. Dále

$$\hat{\alpha}_i^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}) := \pi_i \cdot \hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}) \quad (5.40)$$

kde $\hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma})$ je odhadnutý škodní poměr pro metodu Cape-Cod,

odhady získané pomocí metody Cape-Cod lze zapsat následovně

$$\hat{C}_{i,k}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}) = C_{i,n-1} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-1}) \cdot \hat{\alpha}_i^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}). \quad (5.41)$$

kde $\hat{C}_{i,k}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma})$ jsou předpovědi získané metodou Cape-Cod v řádku *i* a sloupci *k*,

$\hat{\alpha}_i^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma})$ je $i$ – tý apriorní odhad s ohledem na $\vec{\pi}$ a $\hat{\gamma}$ vektoru $\hat{\alpha}_i^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}) := (\hat{\alpha}_0^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}),\dots,\hat{\alpha}_n^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}))$.

Tím získáme vzorec

$$\hat{C}_{i,k}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma}) = \hat{C}^{BF}\left(\hat{\gamma},\hat{\alpha}_i^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma})\right). \quad (5.42)$$

pomocí kterého můžeme usoudit, že metoda Cape-Cod s ohledem na $\vec{\pi}$ a $\hat{\gamma}$ není nic jiného než speciálním případem B-F metody s ohledem na $\hat{\gamma}$ a $\hat{\alpha}^{CC}(\vec{\pi},\hat{\gamma})$. [5]

## 5.6 Aditivní metoda

Aditivní metoda byla popsána Thomasem Mackem v roce 1997. Oproti předešlým metodám, tato metoda pro odhad dolní části trojúhelníku a tím pro odhad škodní rezervy využívá nekumulativního vývojového trojúhelníku. Někdy se lze setkat se způsobem výpočtu aditivní metody pomocí kombinace nekumulativního a kumulativního vývojového trojúhelníku. Dále tato metoda využívá také externích dat.

Metoda je založena na předpokladu, že existuje vektor $\vec{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$, který je známý již před odhadem vývojových koeficientů, tento vektor obsahuje přijatá pojistná plnění v jednotlivých letech vývoje. Dále předpokládáme, že existuje vektor $\xi(\vec{\pi}) = (\xi_0(\vec{\pi}), \xi_1(\vec{\pi}), \dots, \xi_n(\vec{\pi}))$, kde pro jednotlivé proměnné vektoru platí

$$E\left[Z_{i,k}\right] = \pi_i \cdot \xi_k(\vec{\pi}) \tag{5.43}$$

kde $Z_{i,k}$ je pozorovatelná proměnná nekumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$\pi_i$ je *i* – té přijaté zasloužené pojistné vektoru $\vec{\pi}$,

$\xi_k(\vec{\pi})$ je *k* – tý vývojový koeficient pro přírůstkové škodní průběhy,

pro všechna k ∈ (0,1,…,*n*) a pro všechna *i* ∈ (0,1,…,*n*). Potom vektor $\xi(\vec{\pi}) = (\xi_0(\vec{\pi}), \xi_1(\vec{\pi}), \dots, \xi_n(\vec{\pi}))$, je dále nazýván jako vývojový koeficient pro přírůstkové škodní průběhy. Pro odhad škodních rezerv pomocí aditivní metody lze odhadnout ještě jeden vektor a to následující $\hat{\gamma}(\vec{\pi}) = (\hat{\gamma}_0(\vec{\pi}), \hat{\gamma}_1(\vec{\pi}), \dots, \hat{\gamma}_n(\vec{\pi}))$, který je dále nazýván jako vývojový koeficient pro kumulativní podíly, kde jednotlivé proměnné $\gamma_k(\vec{\pi})$ se získají pomocí vzorce

$$\hat{\gamma}_k(\pi) = \frac{\sum_{l=0}^{k} \xi_l(\vec{\pi})}{\sum_{l=0}^{n} \xi_l(\vec{\pi})} \tag{5.44}$$

kde $\hat{\gamma}_k(\vec{\pi})$ je *k* – tý vývojový koeficient pro kumulativní podíly odhadnutý pomocí $\xi_l(\pi)$.

Dolní část kumulativního vývojového trojúhelníku lze spočítat pomocí následujícího vzorce

$$\hat{Z}_{i,k}^{AD}(\vec{\pi}) \coloneqq \pi_i \cdot \hat{\xi}_k^{AD}(\vec{\pi}) \tag{5.45}$$

kde $\hat{Z}_{i,k}^{AD}(\vec{\pi})$ je odhadnutá nepozorovatelná proměnná nekumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*

$\hat{\xi}_k^{AD}(\vec{\pi})$ je *k* – tý odhadnutý vývojový koeficient pro aditivní metodu.

Vývojové koeficienty pro škodní průběhy aditivní metody se vypočte podle následujícího vzorce

$$\hat{\xi}_l^{AD}(\vec{\pi}) \coloneqq \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} \pi_j} \tag{5.46}$$

Pokud bychom chtěli odhadnout dolní část pomocí kumulativního vývojového trojúhelníku, použili bychom následující vzorec

$$\hat{C}_{i,k}^{AD}(\vec{\pi}) := C_{i,n-i} + \pi_i \cdot \sum_{l=n-i+1}^{k} \hat{\xi}_l^{AD}(\vec{\pi}) \tag{5.47}$$

kde $\hat{C}_{i,k}^{AD}(\vec{\pi})$ je odhadnutá nepozorovatelná proměnná kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *k*,

$C_{i,n-i}$ jsou diagonální prvky kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *n-i*.

Jednotlivé odhady získané aditivní metodou můžeme také zapsat pomocí následujícího vzorce

$$E[C_{i,k}] = E[C_{i,n-i}] + \pi_i \cdot \sum_{l=n-i+1}^{k} \xi_l \ (\vec{\pi}) \tag{5.48}$$

který je důsledkem předpokladu modelu. Dále označujeme

$$\hat{C}^{AD}(\vec{\pi}) := \hat{C}_{i,k}^{AD}(\vec{\pi}) \tag{5.49}$$

kde $\hat{C}_{i,k}^{AD}(\vec{\pi})$ jsou předpovědi získané metodou B-F v řádku *i* a sloupci *k* s ohledem na $\vec{\pi}$,

jako vývojový trojúhelník pro všechny odhady získané aditivní metodou. Dále

$$\hat{\gamma}_k(\vec{\pi}) := \frac{\sum_{l=0}^{k} \hat{\xi}_l^{AD}(\vec{\pi})}{\sum_{l=0}^{n} \hat{\xi}_l^{AD}(\vec{\pi})} \tag{5.50}$$

$$\hat{\alpha}_k(\vec{\pi}) := \pi_i \sum_{l=0}^{n} \hat{\xi}_l^{AD}(\vec{\pi}) \tag{5.51}$$

proměnné jsou prediktory aditivní metody, pro nepozorovatelné kumulativní škody, které mohou být zapsaný podle následujícího vzorce

$$\hat{C}_{i,k}^{AD} = C_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{AD}(\vec{\pi}) - \hat{\gamma}_{n-i}^{AD}(\vec{\pi})) \cdot \hat{\alpha}_i^{AD}(\vec{\pi}) \tag{5.52}$$

kde $C_{i,n-i}$ jsou diagonální prvky kumulativního trojúhelníku v řádku *i* a sloupci *n-i*,

$\hat{\gamma}_k^{AD}(\vec{\pi})$ je $k$ – tý vývojový koeficient pro aditivní metodu vektoru $\hat{\gamma}^{AD}(\vec{\pi}) := (\hat{\gamma}_0^{AD}(\vec{\pi}), \hat{\gamma}_1^{AD}(\vec{\pi}), \dots, \hat{\gamma}_n^{AD}(\vec{\pi}))$

$\hat{\alpha}_i^{AD}(\vec{\pi})$ je $i$ – tý apriorní odhad očekávaných celkových škod vektoru $\hat{\alpha}^{AD}(\vec{\pi}) := (\hat{\alpha}_0^{AD}(\vec{\pi}), \hat{\alpha}_1^{AD}(\vec{\pi}), \dots, \hat{\alpha}_n^{AD}(\vec{\pi}))$

Získáváme vzorec

$$\hat{C}^{AD}(\vec{\pi}) = \hat{C}^{BF}\left(\hat{\gamma}^{AD}(\vec{\pi}), \hat{\alpha}^{AD}(\vec{\pi})\right) \tag{5.53}$$

pomocí kterého můžeme říci, že aditivní metoda s ohledem na $\vec{\pi}$ není nic jiného než speciálním případem B-F metody s ohledem na $\hat{\gamma}^{AD}(\vec{\pi})$ a $\hat{\alpha}^{AD}(\vec{\pi})$. [5]

# 6 PRAKTICKÉ PŘÍKLADY VÝPOČTU VYBRANÝCH METOD

V této části budou vybrané metody prakticky využity pro odhad technických rezerv. Jako vstupy budou použity následující data:

- Výplatní nekumulativní vývojový trojúhelník

**Tabulka 4: Výplatní nekumulativní vývojový trojúhelník**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | 3 063 | 2 483 | 1 151 | 986 | 688 | 424 |
| 2009 | 1 | 3 144 | 2 695 | 1 315 | 1 095 | 757 | |
| 2010 | 2 | 3 429 | 3 055 | 1 467 | 1 198 | | |
| 2011 | 3 | 3 810 | 3 243 | 1 678 | | | |
| 2012 | 4 | 4 187 | 3 446 | | | | |
| 2013 | 5 | 4 540 | | | | | |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

- Přijaté zasloužené pojistné

**Tabulka 5: Přijaté zasloužené pojistné v jednotlivých letech**

| Rok | **2008** | **2009** | **2010** | **2011** | **2012** | **2013** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| π | 10 254 | 11 580 | 12 212 | 13 442 | 14 310 | 15 838 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

- Odhad výše pojistných plnění v příštím roce, tedy v roce 2014 je 7 964
- Technická úroková míra spojená se smlouvami je 1 % p.a.
- Míra inflace v jednotlivých letech vývoje

**Tabulka 6: Míra inflace v jednotlivých letech vývoje**

| Rok | Míra inflace |
|---|---|
| 2008 | 6,30% |
| 2009 | 1% |
| 2010 | 1,50% |
| 2011 | 1,90% |
| 2012 | 3,30% |
| 2013 | 1,40% |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

- Očekávaná míra inflace v budoucích letech je 2%
- Apriorní odhady vývojových koeficientů pro kumulativní podíly získány z externích dat

**Tabulka 7: Apriorní odhady kumulativních podílů z externích dat**

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma^{external}$ | 0,33 | 0,62 | 0,75 | 0,87 | 0,95 | 1 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

- Apriorní odhady celkových škod v roce vzniku *i* získány z externích dat

**Tabulka 8: Apriorní odhady očekávaných celkových škod z externích dat**

| i | $\alpha^{external}$ |
|---|---|
| 0 | 8 800 |
| 1 | 9 600 |
| 2 | 10 200 |
| 3 | 11 400 |
| 4 | 12 200 |
| 5 | 13 300 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

V případě, že metoda bude vyžadovat výplatní kumulativní vývojový trojúhelník, vytvoříme jej z výplatního nekumulativního vývojového trojúhelníku podle vzorce (3.1). Dalším krokem bude odhad vývojových koeficientů, které jsou potřeba pro odhad dolní části trojúhelníku. Po doplnění dolního části výplatního vývojového trojúhelníku budeme odhadovat výši škodní rezervy pro jednotlivé budoucí roky a zároveň celkovou škodní rezervu. Dále bude v této práci zaokrouhlováno na tři desetinná místa.

Součástí bude také testování toho, jak dobře se metoda trefila do predikce příštího vývojového roku, porovnání bude provedeno jak absolutně, tak relativně. Pokud bychom takto počítali škodní rezervy v praxi, mohli bychom zjistit kvalitu odhadu až v příští roční závěrce.

## 6.1 Bornhuetter-Ferguson metoda

V případě metody B-F budeme pracovat s kumulativním vývojovým trojúhelníkem, tedy první úlohou bude získat kumulativní vývojový trojúhelník z nekumulativního vývojového trojúhelníku, to provedeme pomocí vzorce (3.1). Pro ilustraci si spočítáme první řádek kumulativního trojúhelníku, dosazením

$$C_{0,0} = 3\,063$$

$$C_{0,1} = 3\,063 + 2\,483 = 5\,546$$

$$C_{0,2} = 3\,063 + 2\,483 + 1\,151 = 6\,697$$

$$C_{0,3} = 3\,063 + 2\,483 + 1\,151 + 986 = 7\,683$$

$$C_{0,4} = 3\,063 + 2\,483 + 1\,151 + 986 + 688 = 8\,371$$

$$C_{0,5} = 3\,063 + 2\,483 + 1\,151 + 986 + 688 + 424 = 8\,795,$$

pokud provedeme kumulaci pro všechny řádky $i$, potom získáme kumulativní trojúhelník, který vypadá následovně

**Tabulka 9: Kumulativní vývojový trojúhelník metody BF**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | 3 063 | 5 546 | 6 697 | 7 683 | 8 371 | 8 795 |
| 2009 | 1 | 3 144 | 5 839 | 7 154 | 8 249 | 9 006 | |
| 2010 | 2 | 3 429 | 6 484 | 7 951 | 9 149 | | |
| 2011 | 3 | 3 810 | 7 053 | 8 731 | | | |
| 2012 | 4 | 4 187 | 7 633 | | | | |
| 2013 | 5 | 4 540 | | | | | |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Dále u této metody je potřeba znát dva apriorní odhady, prvním je apriorní odhad vývojových koeficientů pro kumulativní podíly a druhým je apriorní odhad celkových škod v jednotlivých letech vzniku škody $i$. V další části budeme používat externí data těchto apriorních odhadů, tedy tabulku 7 a tabulku 8.

Pokud známe tyto apriorní odhady, můžeme odhadnout dolní část vývojového trojúhelníku za pomocí vzorce (5.4), pro ilustraci si podrobněji odhadneme pouze dolní řádek dolní části kumulativního vývojového trojúhelníku

$$\hat{C}_{5,1}^{BF}(\hat{\gamma},\hat{\alpha}) = 4\,540 + (0.62 - 0.33) \cdot 13\,330 = 8\,397$$

$$\hat{C}_{5,2}^{BF}(\hat{\gamma},\hat{\alpha}) = 4\,540 + (0.75 - 0.33) \cdot 13\,330 = 10\,126$$

$$\hat{C}_{5,3}^{BF}(\hat{\gamma},\hat{\alpha}) = 4\,540 + (0.87 - 0.33) \cdot 13\,330 = 11\,722$$

$$\hat{C}_{5,4}^{BF}(\hat{\gamma},\hat{\alpha}) = 4\,540 + (0.95 - 0.33) \cdot 13\,330 = 12\,786$$

$$\hat{C}_{5,5}^{BF}(\hat{\gamma},\hat{\alpha}) = 4\,540 + (1 - 0.33) \cdot 13\,330 = 13\,451$$

Pokud bychom dále pokračovali v odhadu jednotlivých dolních proměnných přes jednotlivé řádky, získali bychom následující matici velikosti 6x6

**Tabulka 10: Kumulativní vývojový trojúhelník doplněný o dolní část metody BF**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | 3 063 | 5 546 | 6 697 | 7 683 | 8 371 | 8 795 |
| 2009 | 1 | 3 144 | 5 839 | 7 154 | 8 249 | 9 006 | 9 486 |
| 2010 | 2 | 3 429 | 6 484 | 7 951 | 9 149 | 9 965 | 10 475 |
| 2011 | 3 | 3 810 | 7 053 | 8 731 | 10 099 | 11 011 | 11 581 |
| 2012 | 4 | 4 187 | 7 633 | 9 219 | 10 683 | 11 659 | 12 269 |
| 2013 | 5 | 4 540 | 8 397 | 10 126 | 11 722 | 12 786 | 13 451 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Následně můžeme z dolní části kumulativního trojúhelníku udělat nekumulativní trojúhelník pro získání budoucích pojistných plnění a tím i získat odhad velikosti škodní rezervy. Vytvoříme nekumulativní trojúhelník z kumulativního trojúhelníku pomocí odečtení sousedních hodnot. Dolní část nekumulativního vývojového trojúhelníku pak vypadá následovně

**Tabulka 11: Odhad dolní části nekumulativního vývojového trojúhelníku metody BF**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | | | | | | |
| 2009 | 1 | | | | | | 480 |
| 2010 | 2 | | | | | 816 | 510 |
| 2011 | 3 | | | | 1 368 | 912 | 570 |
| 2012 | 4 | | | 1 586 | 1 464 | 976 | 610 |
| 2013 | 5 | | 3 857 | 1 729 | 1 596 | 1 064 | 665 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Pomocí dolní části nekumulativního vývojového trojúhelníku pak můžeme odhadnout výši pojistných plněný v budoucích letech, a to následujícím způsobem

$$\hat{R}_6 = 3\,857 + 1\,586 + 1\,368 + 816 + 480 = 8\,107$$

$$\hat{R}_7 = 1\,729 + 1\,464 + 912 + 510 = 4\,615$$

$$\hat{R}_8 = 1\,596 + 976 + 570 = 3\,142$$

$$\hat{R}_9 = 1\,064 + 610 = 1\,674$$

$$\hat{R}_{10} = 665$$

Velikost škodní rezervy, která je potřeba na tyto pojistná plnění vytvořit, je součtem těchto jednotlivých pojistných plnění v budoucích letech

$$Velikost\ \check{s}kodn\acute{i}\ rezervy = 8\,107 + 4\,615 + 3\,142 + 1\,674 + 665 = 18\,203$$

Následně porovnáme odhad pojistných plnění v budoucím roce se skutečností, za účelem zjištění kvality odhadu. To provedeme nejdříve absolutně

$$absolutní\, rozdíl = |7\,964 - 8\,107| = 143$$

a následně relativně

$$relativní\, rozdíl = \frac{|7\,964 - 8\,107|}{7\,964} = 1.79\,\%$$

V našem případě tato metoda využívá velkou část externích dat pro odhad škodní rezervy. V tomto případě odhad pomocí metody B-F s ohledem na využití externích dat odhaduje škodní rezervu s relativně velkou přesností.

## 6.2 Metoda loss-development

U metody loss-development potřebujeme pouze kumulativní vývojový trojúhelník a apriorní odhad kumulativních podílů z externích dat. Nejdříve začneme kumulativním trojúhelníkem, který se získá stejně jako v předchozí podkapitole z nekumulativního vývojového trojúhelníku. Pomocí jednotlivých kumulací škod v letech vzniku *i* přes vývojové roky *k*, získáme následující kumulativní vývojový trojúhelník

**Tabulka 12: Kumulativní vývojový trojúhelník metody LD**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | 3 063 | 5 546 | 6 697 | 7 683 | 8 371 | 8 795 |
| 2009 | 1 | 3 144 | 5 839 | 7 154 | 8 249 | 9 006 | |
| 2010 | 2 | 3 429 | 6 484 | 7 951 | 9 149 | | |
| 2011 | 3 | 3 810 | 7 053 | 8 731 | | | |
| 2012 | 4 | 4 187 | 7 633 | | | | |
| 2013 | 5 | 4 540 | | | | | |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Jako vývojové koeficienty budeme používat apriorní odhady získané z tabulky 7. Dále můžeme odhadnout dolní část vývojového trojúhelníku pomocí metody loss-development, a to pomocí vzorce (5.10), pro ilustraci si názorně ukážeme odhad dolního řádku dolní části kumulativního vývojového trojúhelníku

$$\hat{C}_{5,1}^{LD} = 0.62 \cdot \frac{4\,540}{0.33} = 8\,397$$

$$\hat{C}_{5,2}^{LD} = 0.62 \cdot \frac{4\,540}{0.75} = 10\,126$$

$$\hat{C}_{5,3}^{LD} = 0.62 \cdot \frac{4\,540}{0.87} = 11\,722$$

$$\hat{C}_{5,4}^{LD} = 0.62 \cdot \frac{4\,540}{0.95} = 12\,786$$

$$\hat{C}_{5,1}^{LD} = 0.62 \cdot \frac{4\,540}{1} = 13\,451$$

Pokud bychom takhle dále pokračovali přes všechny řádky, získali bychom následující kumulativní vývojový trojúhelník doplněný o dolní část, tedy matici 6x6

**Tabulka 13: Kumulativní vývojový trojúhelník doplněný o dolní část metody LD**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | 3 063 | 5 546 | 6 697 | 7 683 | 8 371 | 8 795 |
| 2009 | 1 | 3 144 | 5 839 | 7 154 | 8 249 | 9 006 | 9 480 |
| 2010 | 2 | 3 429 | 6 484 | 7 951 | 9 149 | 9 990 | 10 516 |
| 2011 | 3 | 3 810 | 7 053 | 8 731 | 10 128 | 11 059 | 11 641 |
| 2012 | 4 | 4 187 | 7 633 | 9 233 | 10 711 | 11 696 | 12 311 |
| 2013 | 5 | 4 540 | 8 530 | 10 318 | 11 969 | 13 070 | 13 758 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Pro to abychom mohli odhadnout velikost jednotlivých budoucích pojistných plnění, musíme upravit dolní část kumulativního vývojového trojúhelníku na nekumulativní. Odečteme tedy od sebe sousední hodnoty, tak abychom dostali nekumulativní dolní část vývojového trojúhelníku, který vypadá následovně

**Tabulka 14: Odhad dolní části nekumulativního vývojového trojúhelníku metody BF**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | | | | | | |
| 2009 | 1 | | | | | | 474 |
| 2010 | 2 | | | | | 841 | 526 |
| 2011 | 3 | | | | 1 397 | 931 | 582 |
| 2012 | 4 | | | 1 600 | 1 477 | 985 | 616 |
| 2013 | 5 | | 3 990 | 1 788 | 1 651 | 1 101 | 688 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Po získání nekumulativní dolní části vývojového trojúhelníku, můžeme začít odhadovat jednotlivá pojistná plnění pro budoucí roky

$$\hat{R}_6 = 3\,990 + 1\,600 + 1\,397 + 841 + 474 = 8\,302$$

$$\hat{R}_7 = 1\,788 + 1\,477 + 931 + 526 = 4\,723$$

$$\hat{R}_8 = 1\,651 + 985 + 582 = 3\,218$$

$$\hat{R}_9 = 1\,101 + 616 = 1\,716$$

$$\hat{R}_{10} = 688$$

Celkovou škodní rezervu, kterou by měla pojišťovna natvořit na tyto škody je sumou jednotlivých budoucích pojistných plnění, tedy

$$Velikost\ škodní\ rezervy = 8\,302 + 4\,723 + 3\,218 + 1\,716 + 688 = 18\,647$$

Následně porovnáme odhad pojistných plnění v budoucím roce se skutečností, za účelem zjištění kvality odhadu. To provedeme nejdříve absolutně

$$absolutní\ rozdíl = |7\,964 - 8\,302| = 338$$

a dále relativně

$$relativní\ rozdíl = \frac{|7\,964 - 8\,302|}{7\,964} = 4.25\ \%$$

## 6.3 Standardní metoda chain-ladder

Další metoda je chain-ladder, kde první úlohou bude získat kumulativní vývojový trojúhelník z nekumulativního vývojového trojúhelníku, to provedeme stejně jako u předešlé metody, pokud provedeme kumulaci pro všechny řádky *i*, potom získáme kumulativní trojúhelník, který vypadá následovně

**Tabulka 15: Kumulativní vývojový trojúhelník metody CL**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | 3 063 | 5 546 | 6 697 | 7 683 | 8 371 | 8 795 |
| 2009 | 1 | 3 144 | 5 839 | 7 154 | 8 249 | 9 006 | |
| 2010 | 2 | 3 429 | 6 484 | 7 951 | 9 149 | | |
| 2011 | 3 | 3 810 | 7 053 | 8 731 | | | |
| 2012 | 4 | 4 187 | 7 633 | | | | |
| 2013 | 5 | 4 540 | | | | | |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Úlohou je získat dolní část trojúhelníku. Po získání kumulativního vývojového trojúhelníku je potřeba odhadnout jednotlivé vývojové faktory, to provedeme za pomocí dosazení do vzorce (5.18). Jednotlivé vývojové faktory jsou proměnnými vektoru $\vec{\varphi}^{CL}$, následně si odhadneme všech pět vývojových koeficientů

$$\hat{\varphi}_1^{CL} = \frac{5\,546 + 5\,839 + 6\,484 + 7\,053 + 7\,633}{3\,063 + 3\,144 + 3\,429 + 3\,810 + 4187} = 1.846$$

$$\hat{\varphi}_2^{CL} = \frac{6\,697 + 7\,154 + 7\,951 + 8\,731}{5\,546 + 5\,839 + 6\,484 + 7\,053} = 1.225$$

$$\hat{\varphi}_3^{CL} = \frac{7\,683 + 8\,429 + 9\,149}{6697 + 7\,154 + 7\,951} = 1.15$$

$$\hat{\varphi}_4^{CL} = \frac{8\,371 + 9\,006}{7\,683 + 8\,429} = 1.091$$

$$\hat{\varphi}_5^{CL} = \frac{8\,795}{8\,371} = 1.051$$

Můžeme si všimnout, že jednotlivé vývojové faktory jsou větší než 1 a že tyto vývojové koeficienty v jednotlivých vývojových letech posloupně klesají. Po odhadu vývojových koeficientů můžeme odhadnout dolní část kumulativního vývojového trojúhelníku, a to pomocí vzorce (5.17), následně odhadneme pro ilustraci tři horní řádku dolní části tohoto trojúhelníku

$$\hat{C}_{1,5}^{CL} = 9\,006 \cdot 1.051 = 9\,462$$

$$\hat{C}_{2,4}^{CL} = 9\,149 \cdot 1.091 = 9\,979$$

$$\hat{C}_{2,5}^{CL} = 9\,149 \cdot 1.091 \cdot 1.051 = 10\,484$$

$$\hat{C}_{3,3}^{CL} = 8\,731 \cdot 1.15 = 10\,044$$

$$\hat{C}_{3,4}^{CL} = 8\,731 \cdot 1.15 \cdot 1.091 = 10\,955$$

$$\hat{C}_{3,5}^{CL} = 8\,731 \cdot 1.15 \cdot 1.091 \cdot 1.051 = 11\,510$$

Pokud bychom dále pokračovali dostali bychom ve výsledku matici o velikosti 6x6, která vypadá následovně

**Tabulka 16: Kumulativní vývojový trojúhelník doplněný o dolní část metody CL**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | 3 063 | 5 546 | 6 697 | 7 683 | 8 371 | 8 795 |
| 2009 | 1 | 3 144 | 5 839 | 7 154 | 8 249 | 9 006 | 9 462 |
| 2010 | 2 | 3 429 | 6 484 | 7 951 | 9 149 | 9 979 | 10 484 |
| 2011 | 3 | 3 810 | 7 053 | 8 731 | 10 044 | 10 955 | 11 510 |
| 2012 | 4 | 4 187 | 7 633 | 9 352 | 10 758 | 11 734 | 12 328 |
| 2013 | 5 | 4 540 | 8 382 | 10 269 | 11 814 | 12 885 | 13 538 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

V dalším kroku odhadneme dolní nekumulativní vývojový trojúhelník, a to analogicky jako jsme vytvořili z nekumulativního vývojového trojúhelníku kumulativní vývojový trojúhelník. Pro ilustraci odhadneme tři horní řádky dolní části nekumulativního vývojového trojúhelníku

$$\hat{Z}_{1,5}^{CL} = 9\,462 - 9\,006 = 456$$

$$\hat{Z}_{2,4}^{CL} = 9\,979 - 9\,149 = 830$$

$$\hat{Z}_{2,5}^{CL} = 10\,484 - 9\,979 = 505$$

$$\hat{Z}_{2,5}^{CL} = 10\,484 - 9\,979 = 505$$

$$\hat{Z}_{3,3}^{CL} = 10\,044 - 8\,731 = 1\,313$$

$$\hat{Z}_{3,4}^{CL} = 10\,955 - 10\,044 = 911$$

$$\hat{Z}_{3,5}^{CL} = 11\,510 - 10\,955 = 555$$

Pokud bychom dále pokračovali, dostali bychom následující odhad dolní části vývojového nekumulativního trojúhelníku

**Tabulka 17: Odhad dolní části nekumulativního vývojového trojúhelníku metody CL**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | | | | | | |
| 2009 | 1 | | | | | | 456 |
| 2010 | 2 | | | | | 830 | 505 |
| 2011 | 3 | | | | 1 313 | 911 | 555 |
| 2012 | 4 | | | 1 719 | 1 406 | 976 | 594 |
| 2013 | 5 | | 3 842 | 1 887 | 1 544 | 1 071 | 653 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Po odhadu dolní části nekumulativního vývojového trojúhelníku může konečně následovat odhad výše pojistných plnění pro jednotlivá budoucí období, a to tak, že se sečtou jednotlivé odhady na diagonálách. Pro lepší představivost následně uvedeme výpočet odhadů pro jednotlivá budoucí období

$$\hat{R}_6 = 3\,842 + 1\,719 + 1\,313 + 830 + 456 = 8\,160$$

$$\hat{R}_7 = 1\,887 + 1\,406 + 911 + 505 = 4\,710$$

$$\hat{R}_8 = 1\,544 + 976 + 555 = 3\,075$$

$$\hat{R}_9 = 1\,071 + 594 = 1\,666$$

$$\hat{R}_{10} = 653$$

Celková škodní rezerva, kterou by měla pojišťovna na tyto pojistná plnění vytvořit je sumou jednotlivých těchto pojistných plnění budoucích let, tedy

$$Velikost\ škodní\ rezervy = 18\,263$$

Za předpokladu znalosti skutečné výše pojistných plnění v budoucím roce, tedy $R_6$, můžeme vypočítat absolutní rozdíl mezi odhadem a skutečností

$$absolutní\ rozdíl = |7\,964 - 8\,160| = 196$$

a dále relativní rozdíl mezi odhadem a skutečností

$$relativní\, rozdíl = \frac{|7\,964 - 8\,160|}{7\,964} = 2.46\%$$

Na základě tohoto porovnání, můžeme říci, že metoda relativně dobře odhaduje budoucí pojistná plnění i přes svou jednoduchost. Dále je potřeba uvést, že je škodní rezerva mírně nadhodnocená, což je lepší, než kdyby byla podhodnocena.

## 6.4 Metoda chain-ladder s inflačním vyrovnáním

V případě této metody budeme pracovat s více vstupními daty. První úlohou je inflačně upravit nekumulativní vývojový trojúhelník, tak aby byli ve vývojovém trojúhelníku obsaženy inflační vlivy, toto se provede pomocí vzorce (5.25). Pro ilustraci vypočítáme první řádek inflačně upraveného nekumulativního vývojového trojúhelníku za pomocí získaných inflačních měr, které jsou v tabulce 3

$$Z_{0,0}^{Inf} = 3063 \cdot (1+0.063) \cdot (1+0.01) \cdot (1+0.015) \cdot (1+0.019) \cdot (1+0.033) \cdot (1+0.014) = 3\,536$$

$$Z_{0,1}^{Inf} = 2\,483 \cdot (1+0.01) \cdot (1+0.015) \cdot (1+0.019) \cdot (1+0.033) \cdot (1+0.014) = 2\,717$$

$$Z_{0,2}^{Inf} = 1\,151 \cdot (1+0.015) \cdot (1+0.019) \cdot (1+0.033) \cdot (1+0.014) = 1\,247$$

$$Z_{0,3}^{Inf} = 986 \cdot (1+0.019) \cdot (1+0.033) \cdot (1+0.014) = 1\,052$$

$$Z_{0,4}^{Inf} = 688 \cdot (1+0.033) \cdot (1+0.014) = 721$$

$$Z_{0,5}^{Inf} = 424 \cdot (1+0.014) = 430$$

Pokud bychom takhle postupovali dále po řádcích získali bychom inflačně upravený nekumulativní vývojový trojúhelník, který by vypadal následovně

**Tabulka 18: Inflačně upravený nekumulativní trojúhelník metody $CL^{Inf}$**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | 3 563 | 2 717 | 1 247 | 1 052 | 721 | 430 |
| 2009 | 1 | 3 440 | 2 920 | 1 404 | 1 147 | 768 | |
| 2010 | 2 | 3 715 | 3 261 | 1 537 | 1 215 | | |
| 2011 | 3 | 4 067 | 3 397 | 1 701 | | | |
| 2012 | 4 | 4 386 | 3 494 | | | | |
| 2013 | 5 | 4 604 | | | | | |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Z takto vytvořeného nekumulativního vývojového trojúhelníku můžeme vytvořit stejně jako u standardní metody chain-ladder kumulativní vývojový trojúhelník pomocí vzorce (3.1).

Úplný inflačně upravený kumulativní vývojový trojúhelník vypadá pak následovně

**Tabulka 19: Inflačně upravený kumulativní vývojový trojúhelník metody $CL^{Inf}$**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | 3 563 | 6 280 | 7 527 | 8 579 | 9 300 | 9 730 |
| 2009 | 1 | 3 440 | 6 360 | 7 763 | 8 910 | 9 678 | |
| 2010 | 2 | 3 715 | 6 976 | 8 512 | 9 727 | | |
| 2011 | 3 | 4 067 | 7 464 | 9 165 | | | |
| 2012 | 4 | 4 386 | 7 880 | | | | |
| 2013 | 5 | 4 604 | | | | | |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

V dalším kroku je potřeba odhadnout vývojové faktory, které odhadneme pomocí vzorce (5.18). Po odhadu jednotlivých vývojových koeficientů stejně jako u standardní metody odhadneme dolní část kumulativního vývojového trojúhelníku. Doplněný kumulativní vývojový trojúhelník o dolní část pak vypadá následovně

**Tabulka 20: Inflačně upravený kumulativní trojúhelník doplněný metodou $CL^{Inf}$**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | 3 563 | 6 280 | 7 527 | 8 579 | 9 300 | 9 730 |
| 2009 | 1 | 3 440 | 6 360 | 7 763 | 8 910 | 9 678 | 10 125 |
| 2010 | 2 | 3 715 | 6 976 | 8 512 | 9 727 | 10 555 | 11 043 |
| 2011 | 3 | 4 067 | 7 464 | 9 165 | 10 480 | 11 371 | 11 897 |
| 2012 | 4 | 4 386 | 7 880 | 9 594 | 10 970 | 11 903 | 12 453 |
| 2013 | 5 | 4 604 | 8 395 | 10 221 | 11 687 | 12 681 | 13 267 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Následně se z dolní části nekumulativního vývojového trojúhelníku musí udělat nekumulativní, a to stejně jako v případě standartní metody chain-ladder, tedy odečíst od sebe sousední hodnoty. Následně detailně odhadneme pouze dolní řádek dolní části nekumulativního vývojového trojúhelníku

$$\hat{Z}_{5,1}^{CL} = 8\,395 - 4\,604 = 3\,791$$

$$\hat{Z}_{5,2}^{CL} = 10\,221 - 8\,395 = 1\,826$$

$$\hat{Z}_{5,3}^{CL} = 11\,687 - 10\,221 = 1\,466$$

$$\hat{Z}_{5,4}^{CL} = 12\,681 - 11\,687 = 994$$

$$\hat{Z}_{5,5}^{CL} = 13\,267 - 12\,681 = 586$$

Celá odhadnutá dolní část nekumulativního inflačně upraveného vývojového trojúhelníku pak vypadá takto

**Tabulka 21: Dolní část inflačně upraveného nekumulativního trojúhelníku metody $CL^{Inf}$**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | | | | | | |
| 2009 | 1 | | | | | | 447 |
| 2010 | 2 | | | | | 828 | 488 |
| 2011 | 3 | | | | 1 315 | 892 | 526 |
| 2012 | 4 | | | 1 714 | 1 376 | 933 | 550 |
| 2013 | 5 | | 3 791 | 1 826 | 1 466 | 994 | 586 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Nyní můžeme odhadnout budoucí pojistná plnění pro jednotlivá budoucí období, a to pomocí součtu odhadů na diagonálách, odhady pro jednotlivé budoucí roky jsou následující

$$\hat{R}_6 = 3\,791 + 1\,714 + 1\,315 + 828 + 447 = 8\,095$$

$$\hat{R}_7 = 1\,826 + 1\,376 + 892 + 488 = 4\,581$$

$$\hat{R}_8 = 1\,466 + 933 + 526 = 2\,925$$

$$\hat{R}_9 = 994 + 550 = 1\,554$$

$$\hat{R}_{10} = 586$$

Avšak i tyto odhady je potřeba inflačně upravit pomocí očekávané míry inflace, to provedeme pomocí vzorce (5.19). Inflačně upravené odhady pojistných plnění v jednotlivých budoucích letech jsou následující

$$\hat{R}_6^{Inf} = 8\,095 \cdot (1 + 0.02)^{\frac{1}{2}} = 8\,175$$

$$\hat{R}_7^{Inf} = 4\,581 \cdot (1 + 0.02)^{\frac{3}{2}} = 4\,720$$

$$\hat{R}_8^{Inf} = 2\,925 \cdot (1 + 0.02)^{\frac{5}{2}} = 3\,074$$

$$\hat{R}_9^{Inf} = 1\,554 \cdot (1 + 0.02)^{\frac{7}{2}} = 1\,656$$

$$\hat{R}_{10}^{Inf} = 586 \cdot (1 + 0.02)^{\frac{9}{2}} = 641$$

Tyto upravené odhady se musí ještě zdiskontovat, takže v první řadě musíme vypočítat diskont pomocí vzorce (5.27). Pro výpočet diskontu potřebujeme znát technickou úrokovou míru, která je v zadání 1 % p.a.

$$discont = \frac{1}{1 + 0.01} = 0.99$$

Následně už můžeme pomocí diskontování získat konečné odhady pro pojistná plnění v jednotlivých budoucích letech, a to dosazením do vzorce (5.28). Upravené odhady pojistných plnění pro jednotlivé budoucí roky jsou níže

$$\hat{R}_6^* = 8\,175 \cdot 0.99^{\frac{1}{2}} = 8\,135$$

$$\hat{R}_7^* = 4\,720 \cdot 0.99^{\frac{3}{2}} = 4\,650$$

$$\hat{R}_8^* = 3\,074 \cdot 0.99^{\frac{5}{2}} = 2\,998$$

$$\hat{R}_9^* = 1\,656 \cdot 0.99^{\frac{7}{2}} = 1\,599$$

$$\hat{R}_{10}^* = 641 \cdot 0.99^{\frac{9}{2}} = 613$$

Výše škodní rezervy, kterou by pojišťovna měla vytvořit je suma všech pojistných plnění v jednotlivých budoucích letech

$$Velikost\ \check{s}kodn\acute{\imath}\ rezervy = 17\,994$$

Dále na základě znalosti pojistného plnění v budoucím roce, je možné provést kvalitu odhadu, kterou nejdříve provedeme pomocí absolutního porovnání

$$absolutn\acute{\imath}\ rozd\acute{\imath}l = |7\,964 - 8\,135| = 171$$

a dále pak můžeme provést relativní porovnání

$$relativn\acute{\imath}\ rozd\acute{\imath}l = \frac{|7\,964 - 8\,135|}{7\,964} = 2.15\ \%$$

Na základě znalosti kvality odhadu standardní metody chain-ladder a metody chain-ladder s inflačním vyrovnáním můžeme říci, že je kvalita odhadu u této metody o něco přesnější.

## 6.5 Metoda Cape-Cod

Metoda Cape-Cod pracuje s kumulativním trojúhelníkem, proto je potřeba nejdříve vytvořit z nekumulativního vývojového trojúhelníku vývojový trojúhelník kumulativní. Protože jsme si v předešlých podkapitolách podrobněji ukázali, jak získat z nekumulativního trojúhelníku trojúhelník kumulativní, nebudeme v této kapitole uvádět podrobnější postup výpočtu jednotlivých proměnných ve vývojovém trojúhelníku, ale rovnou si uvedeme kumulativní vývojový trojúhelník. Kumulativní vývojový trojúhelník pro metodu Cape-Cod vypadá následovně

**Tabulka 22: Kumulativní vývojový trojúhelník metody CC**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | 3 063 | 5 546 | 6 697 | 7 683 | 8 371 | 8 795 |
| 2009 | 1 | 3 144 | 5 839 | 7 154 | 8 249 | 9 006 | |
| 2010 | 2 | 3 429 | 6 484 | 7 951 | 9 149 | | |
| 2011 | 3 | 3 810 | 7 053 | 8 731 | | | |
| 2012 | 4 | 4 187 | 7 633 | | | | |
| 2013 | 5 | 4 540 | | | | | |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

V dalším kroku je potřeba odhadnout vývojové koeficienty pro kumulativní podíly, které tato metoda využívá k odhadu dolní části matice. Ne vždy se tyto vývojové koeficienty musí odhadovat, někdy se využívá externích dat, ale v našem případě k odhadu dolní části trojúhelníku budeme používat interních dat, tedy $\hat{\gamma}_k$ odhadneme z kumulativního vývojového trojúhelníku. Následně si jednotlivé vývojové koeficienty $\hat{\gamma}_k$ odhadneme pomocí vzorce (5.32), vývojové koeficienty se v tomto případě odhadují odzadu

$$\hat{\gamma}_5 = 1$$

$$\hat{\gamma}_4 = \frac{1}{1.051} = 0.952$$

$$\hat{\gamma}_3 = \frac{0.952}{1.091} = 0.873$$

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{0.873}{1.15} = 0.759$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{0.759}{1.225} = 0.62$$

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{0.62}{1.846} = 0.336$$

Jednotlivé vývojové koeficienty pro kumulativní podíly lze interpretovat, jako podíl vyplacených škod do roku *k* na celkových škodách. Tedy např. do čtvrtého vývojového roku bylo vyplaceno 82.3 % všech škod, do druhého vývojového roku bylo vyplaceno 75.9 % škod a tak dále.

Dalším předpokladem je existence vektoru $\vec{\pi}$, který je předem znám a tvoří ho přijaté zasloužené pojistné v jednotlivých letech vzniku, v našem případě využijeme tabulky 5. Přijaté zasloužené pojistné je potřeba upravit, tak aby jejich vývoj byl přiměřený k vývoji pojistných plnění, tedy následovně využijeme vzorec (5.33), pomocí kterého upravíme jednotlivé pojistné

$$\pi_0^* = 10\,254 \cdot 1 = 10\,254$$

$$\pi_1^* = 11\,580 \cdot 0.952 = 11\,022$$

$$\pi_2^* = 12\,212 \cdot 0.873 = 10\,657$$

$$\pi_3^* = 13\,442 \cdot 0.759 = 10\,197$$

$$\pi_4^* = 14\,310 \cdot 0.62 = 8\,860$$

$$\pi_5^* = 15\,838 \cdot 0.336 = 5\,311$$

Následně můžeme odhadnout škodní poměr, pro metodu Cape-Cod, který se odhaduje pomocí vzorce (5.34), podrobnější výpočet škodního poměru je následující

$$\hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}) = \frac{8\,975 + 9\,006 + 9\,149 + 8\,731 + 7\,633 + 4\,540}{10\,254 + 11\,022 + 10\,657 + 10\,197 + 8\,860 + 5\,311} = 0.85$$

Správnost odhadu škodního poměru si můžeme ověřit pomocí vzorce (5.26), kde proměnná *kontrola* by měla vyjít nula nebo velmi malé číslo. Po dosazení do vzorce *kontrola* vychází následovně

$$kontrola = 56\,300.57 \cdot 0.85 - 47\,854 = 0$$

Můžeme tedy říci, že jsme při odhadu škodního poměru neudělali chybu. Po odhadu škodního poměru a následné kontrole, můžeme odhadnout dolní část trojúhelníku, a to za pomocí vzorce (5.35), pro ilustraci si uvedeme podrobnější odhad posledního řádku dolní části vývojového trojúhelníku

$$\hat{C}_{5,1}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}) = 4\,540 + (0.62 - 0.336) \cdot 15\,838 \cdot 0.85 = 8\,630$$

$$\hat{C}_{5,2}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}) = 8\,360 + (0.759 - 0.62) \cdot 15\,838 \cdot 0.85 = 10\,237$$

$$\hat{C}_{5,3}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}) = 10\,237 + (0.873 - 0.759) \cdot 15\,838 \cdot 0.85 = 11\,773$$

$$\hat{C}_{5,4}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}) = 11\,773 + (0.952 - 0.873) \cdot 15\,838 \cdot 0.85 = 12\,838$$

$$\hat{C}_{5,5}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}) = 12\,838 + (1 - 0.952) \cdot 15\,838 \cdot 0.85 = 13\,487$$

Pokud bychom takhle dále pokračovali, získali bychom matici o velikosti 6x6, kompletně vyplněná matice pak vypadá následovně

**Tabulka 23: Kumulativní vývojový trojúhelník doplněný o dolní část metody CC**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | 3 063 | 5 546 | 6 697 | 7 683 | 8 371 | 8 795 |
| 2009 | 1 | 3 144 | 5 839 | 7 154 | 8 249 | 9 006 | 9 481 |
| 2010 | 2 | 3 429 | 6 484 | 7 951 | 9 149 | 9 971 | 10 471 |
| 2011 | 3 | 3 810 | 7 053 | 8 731 | 10 034 | 10 939 | 11 490 |
| 2012 | 4 | 4 187 | 7 633 | 9 329 | 10 716 | 11 679 | 12 265 |
| 2013 | 5 | 4 540 | 8 360 | 10 237 | 11 773 | 12 838 | 13 487 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Po odhadu dolní části trojúhelníku můžeme odhadnout výši pojistných plnění v budoucích letech a tím i velikost škodní rezervy potřebnou pro likvidaci těchto škod. Pro odhad pojistných plnění v budoucích letech u metody Cape-Cod, dosadíme do vzorce (5.37) a tím odhadneme celkovou škodní rezervu

$$Velikost\ škodní\ rezervy = 65\,989 - 47\,854 = 18\,135$$

Tento výsledek můžeme interpretovat, jako velikost škodní rezervy potřebné k likvidaci škod, které vznikli v jednotlivých letech *i* a nebyli dosud nahlášeny.

Pro porovnání metod potřebujeme získat dolní část nekumulativního trojúhelníku, který se získá z kumulativního trojúhelníku, a to analogicky jako v případě získání kumulativního trojúhelníku z nekumulativního trojúhelníku, tedy odečtením sousedních hodnot. Dolní část nekumulativního dolního trojúhelníku vypadá následovně

**Tabulka 24: Odhad dolní části nekumulativního vývojového trojúhelníku metody CC**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | | | | | | |
| 2009 | 1 | | | | | | 475 |
| 2010 | 2 | | | | | 822 | 500 |
| 2011 | 3 | | | | 1 303 | 904 | 551 |
| 2012 | 4 | | | 1 696 | 1 388 | 963 | 586 |
| 2013 | 5 | | 3 820 | 1 877 | 1 536 | 1 065 | 649 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Pojistná plnění v jednotlivých budoucích letech se pak odhadují z dolní části nekumulativního vývojového trojúhelníku stejně jako u předešlých metod. Odhad budoucích pojistných plnění vypadá následovně

$$\hat{R}_6 = 3\,820 + 1\,696 + 1\,303 + 872 + 475 = 8\,116$$

$$\hat{R}_7 = 1\,877 + 1\,388 + 904 + 500 = 4\,669$$

$$\hat{R}_8 = 1\,536 + 963 + 551 = 3\,049$$

$$\hat{R}_9 = 1\,065 + 586 = 1\,652$$

$$\hat{R}_{10} = 649$$

Suma těchto pojistných plnění pak musí souhlasit s odhadnutou škodní rezervou pomocí vzorce (5.37). Dále na základě znalosti pojistného plnění v budoucím roce, je možné provést kvalitu odhadu, kterou nejdříve provedeme pomocí absolutního porovnání

$$absolutní\, rozdíl = |7\,964 - 8\,116| = 151$$

a dále pak můžeme provést relativní porovnání

$$relativní\, rozdíl = \frac{|7\,964 - 8\,116|}{7\,964} = 1.9\ \%$$

Na základě porovnání mezi skutečností a odhadem metody Cape-Cod, můžeme říci, že tato metoda podává v tomto případě lepší odhad, než předešle zmíněné metody, na druhou stranu je metoda náročnější na vstupní data.

## 6.6 Aditivní metoda

Aditivní metoda oproti předchozím metodám využívá v našem případě nekumulativního vývojového trojúhelníků. Nejdříve si ukážeme nekumulativní vývojový trojúhelník, který nemusíme nikterak upravovat, nekumulativní vývojový trojúhelník, který budeme pro tuto metodu používat je následující

**Tabulka 25: Výplatní nekumulativní vývojový trojúhelník metody AD**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | 3 563 | 2 717 | 1 247 | 1 052 | 721 | 430 |
| 2009 | 1 | 3 440 | 2 920 | 1 404 | 1 147 | 768 | |
| 2010 | 2 | 3 715 | 3 261 | 1 537 | 1 215 | | |
| 2011 | 3 | 4 067 | 3 397 | 1 701 | | | |
| 2012 | 4 | 4 386 | 3 494 | | | | |
| 2013 | 5 | 4 604 | | | | | |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Z nekumulativního vývojového trojúhelníku následně můžeme odhadnout vývojové koeficienty pro škodní průběhy, pro odhad těchto vývojových koeficientů využijeme vzorec (5.46). Následovně si jednotlivé vývojové koeficienty pro škodní průběhy podrobněji odhadneme

$$\hat{\xi}_0^{AD}(\vec{\pi}) = \frac{3\,063 + 3\,144 + 3\,429 + 3\,810 + 4\,187 + 4\,540}{10\,254 + 11\,580 + 12\,212 + 13\,442 + 14\,310 + 15\,838} = 0.286$$

$$\hat{\xi}_1^{AD}(\vec{\pi}) = \frac{2\,483 + 2\,695 + 3\,055 + 3\,243 + 3\,446}{10\,254 + 11\,580 + 12\,212 + 13\,442 + 14\,310} = 0.242$$

$$\hat{\xi}_2^{AD}(\vec{\pi}) = \frac{1\,151 + 1\,315 + 1\,467 + 1\,678}{10\,254 + 11\,580 + 12\,212 + 13\,442} = 0.118$$

$$\hat{\xi}_3^{AD}(\vec{\pi}) = \frac{986 + 1\,095 + 1\,198}{10\,254 + 11\,580 + 12\,212} = 0.096$$

$$\hat{\xi}_4^{AD}(\vec{\pi}) = \frac{688 + 757}{10\,254 + 11\,580} = 0.066$$

$$\hat{\xi}_5^{AD}(\vec{\pi}) = \frac{424}{10\,254} = 0.041$$

Po získaní odhadů jednotlivých vývojových koeficientů, můžeme odhadnout dolní část nekumulativního vývojového trojúhelníku, a to za pomocí vzorce (5.45), pro ilustraci si odhadneme pouze dolní řádek dolní části nekumulativního vývojového trojúhelníku

$$\hat{Z}_{5,1}^{AD}(\vec{\pi}) = 15\,838 \cdot 0.242 = 3\,824$$

$$\hat{Z}_{5,2}^{AD}(\vec{\pi}) = 15\,838 \cdot 0.118 = 1\,871$$

$$\hat{Z}_{5,3}^{AD}(\vec{\pi}) = 15\,838 \cdot 0.096 = 1\,525$$

$$\hat{Z}_{5,4}^{AD}(\vec{\pi}) = 15\,838 \cdot 0.066 = 1\,048$$

$$\hat{Z}_{5,5}^{AD}(\vec{\pi}) = 15\,838 \cdot 0.041 = 655$$

Pokud bychom dále pokračovali s odhady dolní části trojúhelníku přes všechny řádky, získali bychom následující matici 6x6

**Tabulka 26: Nekumulativní vývojový trojúhelník doplněný o dolní část metody AD**

| Rok | i / k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0 | 3 063 | 2 483 | 1 151 | 986 | 688 | 424 |
| 2009 | 1 | 3 144 | 2 695 | 1 315 | 1 095 | 757 | 479 |
| 2010 | 2 | 3 429 | 3 055 | 1 467 | 1 198 | 808 | 505 |
| 2011 | 3 | 3 810 | 3 243 | 1 678 | 1 295 | 890 | 556 |
| 2012 | 4 | 4 187 | 3 446 | 1 691 | 1 378 | 947 | 592 |
| 2013 | 5 | 4 540 | 3 824 | 1 871 | 1 525 | 1 048 | 655 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Po odhadu dolní části nekumulativního vývojového trojúhelníku můžeme dále odhadnout velikost pojistných plnění v jednotlivých budoucích letech, to provedeme stejně jako u předchozích metod, a tedy součtem jednotlivých diagonál

$$\hat{R}_6 = 3\,824 + 1\,691 + 1\,295 + 808 + 479 = 8\,097$$

$$\hat{R}_7 = 1\,871 + 1\,378 + 890 + 505 = 4\,644$$

$$\hat{R}_8 = 1\,525 + 947 + 556 = 3\,028$$

$$\hat{R}_9 = 1\,048 + 592 = 1\,640$$

$$\hat{R}_{10} = 655$$

Celkovou velikost škodní rezervy na tyto škody pak tvoří suma těchto budoucích pojistných plnění

$$Velikost\ škodní\ rezervy = 8\,097 + 4\,644 + 3\,028 + 1\,640 + 655 = 18\,064$$

Následně porovnáme odhad pojistných plnění v budoucím roce se skutečností, za účelem zjištění kvality odhadu. To provedeme nejdříve absolutně

$$absolutní\ rozdíl = |7\,964 - 8\,097| = 133$$

a dále relativně

$$relativní\ rozdíl = \frac{|7\,964 - 8\,097|}{7\,964} = 1.67\ \%$$

Na základě porovnání mezi skutečností a odhadem Aditivní metody, můžeme říci, že tato metoda podává v tomto případě nejlepší odhad.

## 6.7 Propojenost Bornhuetter-Ferguson metody s ostatními

V této části se budeme zabývat propojením jednotlivých metod, které spadají do třídy Bornhuetter-Ferguson a jsou s touto metodou spjaty. Nejdříve je potřeba odhadnout apriorní odhady pro kumulativní podíly u metodu chain-ladder a aditivní metodu. Pro metodu loss-development známe apriorní odhady pro kumulativní podíly z tabulky 7 a metoda cape-cod využívá interních dat pro odhad kumulativních podílů.

Nejdříve začneme odhadem apriorních odhadů pro kumulativní podíly pro metodu chain-ladder, tedy $\hat{\gamma}^{CL}$. Pro tento odhad použijeme vzorec (5.21), pak jednotlivé odhady $\hat{\gamma}_k^{CL}$ jsou následující

$$\hat{\gamma}_0^{CL} = \frac{1}{1.846} \cdot \frac{1}{1.225} \cdot \frac{1}{1.15} \cdot \frac{1}{1.091} \cdot \frac{1}{1.051} = 0.335$$

$$\hat{\gamma}_1^{CL} = \frac{1}{1.225} \cdot \frac{1}{1.15} \cdot \frac{1}{1.091} \cdot \frac{1}{1.051} = 0.62$$

$$\hat{\gamma}_2^{CL} = \frac{1}{1.15} \cdot \frac{1}{1.091} \cdot \frac{1}{1.051} = 0.759$$

$$\hat{\gamma}_3^{CL} = \frac{1}{1.091} \cdot \frac{1}{1.051} = 0.873$$

$$\hat{\gamma}_4^{CL} = \frac{1}{1.051} = 0.9518$$

$$\hat{\gamma}_5^{CL} = 1$$

V dalším kroku zjistíme apriorní odhady pro kumulativní podíly pro aditivní metodu, tedy $\hat{\gamma}^{AD}(\vec{\pi})$. Pro tento odhad použijeme vzorec (5.44) a jednotlivé odhady $\hat{\gamma}_k^{AD}(\vec{\pi})$ jsou následující

$$\hat{\gamma}_0^{AD}(\vec{\pi}) = \frac{0.286}{0.849} = 0.336$$

$$\hat{\gamma}_1^{AD}(\vec{\pi}) = \frac{0.242}{0.849} = 0.621$$

$$\hat{\gamma}_2^{AD}(\vec{\pi}) = \frac{0.118}{0.849} = 0.76$$

$$\hat{\gamma}_3^{AD}(\vec{\pi}) = \frac{0.096}{0.849} = 0.873$$

$$\hat{\gamma}_4^{AD}(\vec{\pi}) = \frac{0.0618}{0.849} = 0.621$$

$$\hat{\gamma}_5^{AD}(\vec{\pi}) = 1$$

Apriorní odhady pro kumulativní podíly můžeme pro lepší přehled seskupit do následující tabulky

**Tabulka 27: Apriorní odhady kumulativních podílů**

| Apriorní odhady | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma^{external}$ | 0,33 | 0,62 | 0,75 | 0,87 | 0,95 | 1 |
| γAD(π) | 0,33637 | 0,62076 | 0,75992 | 0,87335 | 0,9513 | 1 |
| γCL | 0,33536 | 0,61916 | 0,75856 | 0,87264 | 0,95179 | 1 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Z tabulky lze vidět, že apriorní odhady kumulativních podílů mají mezi jednotlivými metodami minimální odchylku.

Dále pro metodu Cape-Cod potřebujeme apriorní odhady celkových škodních průběhů, protože známe tři verze apriorních dohadů pro kumulativní podíly, tedy $\hat{\gamma}^{AD}(\vec{\pi})$, $\hat{\gamma}^{CL}$ a $\hat{\gamma}^{external}$, můžeme odhadovat tři apriorní odhady škodních průběhů. Jednotlivé apriorní odhady škodních průběhů odhadneme pomocí vzorce (5.34), které jsou následně podrobněji uvedeny

$$\hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{external}) = \frac{4\,540 + 7\,633 + 8\,731 + 9\,149 + 9\,006 + 8\,795}{3\,384 + 7\,180 + 9\,159 + 11\,695 + 13\,595 + 15\,838} = 0.854$$

$$\hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{CL}) = \frac{4\,540 + 7\,633 + 8\,731 + 9\,149 + 9\,006 + 8\,795}{3\,439 + 7\,170 + 9\,264 + 11\,730 + 13\,620 + 15\,838} = 0.85$$

$$\hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{AD}(\vec{\pi})\,) = \frac{4\,540 + 7\,633 + 8\,731 + 9\,149 + 9\,006 + 8\,795}{3\,449 + 7\,188 + 9\,280 + 11\,740 + 13\,613 + 15\,838} = 0.85$$

Pomocí získaných apriorních odhadů pro kumulativní podíly a apriorních odhadů škodních průběhů, můžeme odhadnout pro jednotlivé metody uvedené v této práci apriorní odhady očekávaných celkových škod.

Nejdříve začneme metodou loss-development, ta pro apriorní odhad očekávaných celkových škod používá externí data apriorních odhadů pro kumulativní podíly, v této práci máme tři verze apriorních odhadů pro kumulativní podíly a to $\hat{\gamma}^{AD}(\vec{\pi})$, $\hat{\gamma}^{CL}$ a $\hat{\gamma}^{external}$. Apriorní odhad očekávaných celkových škod $\hat{\alpha}^{LD}(\hat{\gamma}^{external})$ získáme pomocí vzorce (5.13) a jednotlivé apriorní odhady očekávaných celkových škod s ohledem na $\hat{\gamma}^{external}$ jsou následující

$$\hat{\alpha}_0^{LD}(\hat{\gamma}^{external}) = \frac{8\,975}{1} = 8\,975$$

$$\hat{\alpha}_1^{LD}(\hat{\gamma}^{external}) = \frac{9\,006}{0.95} = 9\,480$$

$$\hat{\alpha}_2^{LD}(\hat{\gamma}^{external}) = \frac{9\,149}{0.87} = 10\,516$$

$$\hat{\alpha}_3^{LD}(\hat{\gamma}^{external}) = \frac{8\,731}{0.75} = 11\,641$$

$$\hat{\alpha}_4^{LD}(\hat{\gamma}^{external}) = \frac{7\,633}{0.62} = 12\,311$$

$$\hat{\alpha}_5^{LD}(\hat{\gamma}^{external}) = \frac{4\,540}{0.33} = 13\,758$$

Dále se stejný apriorní odhad provede pro $\hat{\alpha}^{LD}(\hat{\gamma}^{AD})$ a $\hat{\alpha}^{LD}(\hat{\gamma}^{CL})$, kde se akorát budou měnit proměnné v podílu, pokud bychom udělali všechny apriorní odhady očekávaných celkových škod, získali bychom následující tabulku

**Tabulka 28: Apriorní odhady očekávaných celkových škod metody LD**

| | $\alpha^{LD}(\gamma^{external})$ | $\alpha^{LD}(\gamma^{AD})$ | $\alpha^{LD}(\gamma^{CL})$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 8 795 | 8 795 | 8 795 |
| 1 | 9 480 | 9 467 | 9 462 |
| 2 | 10 516 | 10 476 | 10 484 |
| 3 | 11 641 | 11 489 | 11 510 |
| 4 | 12 311 | 12 296 | 12 328 |
| 5 | 13 758 | 13 497 | 13 538 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

V další části zjistíme apriorní odhady očekávaných celkových škod pro metodu Cape-Cod, to provedeme pomocí vzorce (5.40), a protože máme v této práci tři typy apriorních odhadů škodních průběhů, a to $\hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{external})$, $\hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{CL})$ a $\hat{\kappa}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{AD}(\vec{\pi}),)$ i zde budeme mít tři verze apriorních odhadů očekávaných celkových škod a to $\hat{\alpha}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{external})$, $\hat{\alpha}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{AD})$ a $\hat{\alpha}^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{CL})$. Nejdříve začneme apriorním odhadem očekávaných celkových škod s ohledem na $\hat{\gamma}^{external}$ a $\vec{\pi}$, jednotlivé odhady jsou následující

$$\hat{\alpha}_0^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{external}) = 10\,254 \cdot 0.856 = 8\,753$$

$$\hat{\alpha}_1^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{external}) = 11\,580 \cdot 0.856 = 9\,885$$

$$\hat{\alpha}_2^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{external}) = 12\,212 \cdot 0.856 = 10\,425$$

$$\hat{\alpha}_3^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{external}) = 13\,442 \cdot 0.856 = 11\,474$$

$$\hat{\alpha}_4^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{external}) = 14\,310 \cdot 0.856 = 12\,215$$

$$\hat{\alpha}_5^{CC}(\vec{\pi}, \hat{\gamma}^{external}) = 15\,838 \cdot 0.856 = 13\,520$$

Další dvě verze apriorního odhadu očekávaných celkových škod s ohledem na $\hat{\gamma}^{AD}$ a $\hat{\gamma}^{CL}$ lze získat stejným způsobem, následně si uvedeme tabulku, kde jsou výsledky i pro další dvě verze odhadu

**Tabulka 29: Apriorní odhady očekávaných celkových škod metody CC**

| | $\alpha^{CC}(\pi,\gamma^{external})$ | $\alpha^{CC}(\pi,\gamma^{AD})$ | $\alpha^{CC}(\pi,\gamma^{CL})$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 8 753 | 8 706 | 8 716 |
| 1 | 9 885 | 9 832 | 9 843 |
| 2 | 10 424 | 10 369 | 10 380 |
| 3 | 11 474 | 11 413 | 11 425 |
| 4 | 12 215 | 12 150 | 12 163 |
| 5 | 13 520 | 13 447 | 13 462 |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Poslední metodou, u které nám zbývá apriorní odhad očekávaných celkových škod je aditivní metoda, v případě této metody se nevyužívá žádných externích dat, proto je pro tuto metodu uvedena pouze jedna verze. K získání apriorních odhadů očekávaných celkových škod využijeme vzorec (5.51) jednotlivé odhady jsou následující

$$\hat{\alpha}_0^{AD}(\vec{\pi}) = 10\,254 \cdot 0.849 = 8\,706$$

$$\hat{\alpha}_1^{AD}(\vec{\pi}) = 11\,580 \cdot 0.849 = 9\,832$$

$$\hat{\alpha}_2^{AD}(\vec{\pi}) = 12\,212 \cdot 0.849 = 10\,369$$

$$\hat{\alpha}_3^{AD}(\vec{\pi}) = 13\,442 \cdot 0.849 = 11\,413$$

$$\hat{\alpha}_4^{AD}(\vec{\pi}) = 14\,310 \cdot 0.849 = 12\,150$$

$$\hat{\alpha}_5^{AD}(\vec{\pi}) = 15\,838 \cdot 0.849 = 13\,448$$

Následně když známe apriorní odhady potřebné pro metodu B-F, můžeme provést odhad velikosti rezerv v jednotlivých budoucích letech. Nejdříve je však potřeba odhadnout dolní část kumulativního vývojového trojúhelníku, pro ilustraci si ukážeme odhad dolního řádku dolní části kumulativního vývojového trojúhelníku, a to při využití apriorních odhadů $\hat{\alpha}^{AD}(\vec{\pi})$ a $\hat{\gamma}^{external}$

$$\hat{C}_{5,1}^{BF}\left(\hat{\alpha}^{AD}(\vec{\pi}), \hat{\gamma}^{external}\right) = 4\,540 + (0.62 - 0.33) \cdot 13\,348 = 8\,440$$

$$\hat{C}_{5,2}^{BF}\left(\hat{\alpha}^{AD}(\vec{\pi}), \hat{\gamma}^{external}\right) = 4\,540 + (0.75 - 0.33) \cdot 13\,348 = 10\,188$$

$$\hat{C}_{5,3}^{BF}\left(\hat{\alpha}^{AD}(\vec{\pi}), \hat{\gamma}^{external}\right) = 4\,540 + (0.87 - 0.33) \cdot 13\,348 = 11\,802$$

$$\hat{C}_{5,4}^{BF}\left(\hat{\alpha}^{AD}(\vec{\pi}), \hat{\gamma}^{external}\right) = 4\,540 + (0.95 - 0.33) \cdot 13\,348 = 12\,877$$

$$\hat{C}_{5,5}^{BF}\left(\hat{\alpha}^{AD}(\vec{\pi}), \hat{\gamma}^{external}\right) = 4\,540 + (1 - 0.33) \cdot 13\,348 = 13\,550$$

Pokud budeme takto pokračovat přes všechny řádky získáme matici 6x6, kde stejně jako v předešlých případech vytvoříme z dolní části kumulativního trojúhelníku trojúhelník nekumulativní rozdílem sousedních hodnot. Dále v případě odhadu škodních rezerv v jednotlivých budoucích letech sečteme hodnoty na diagonálách, v tomto případě se jednotlivé budoucí rezervy odhadnou následovně

$$\hat{R}_6 = 3\,900 + 1\,580 + 1\,370 + 830 + 635 = 8\,313$$

$$\hat{R}_7 = 1\,748 + 1\,458 + 913 + 518 = 4\,638$$

$$\hat{R}_8 = 1\,614 + 972 + 571 = 3\,156$$

$$\hat{R}_9 = 1\,076 + 608 = 1\,683$$

$$\hat{R}_{10} = 672$$

Velikost škodní rezervy je pak dána součtem těchto odhadů

$$Velikost\ škodní\ rezervy = 8\,313 + 4\,638 + 3\,156 + 1\,683 + 672 = 18\,463$$

Dále na základě znalosti pojistného plnění v budoucím roce, je možné provést kvalitu odhadu, kterou nejdříve provedeme pomocí absolutního porovnání

$$absolutní\ rozdíl = |7\,964 - 8\,313| = 349$$

a dále pak můžeme provést relativní porovnání

$$relativní\ rozdíl = \frac{|7\,964 - 8\,313|}{7\,964} = 4.38\ \%$$

V následující části již nebudeme podrobněji ukazovat jednotlivé odhady škod, ale uvádíme je následující tabulkou včetně kvality odhadu

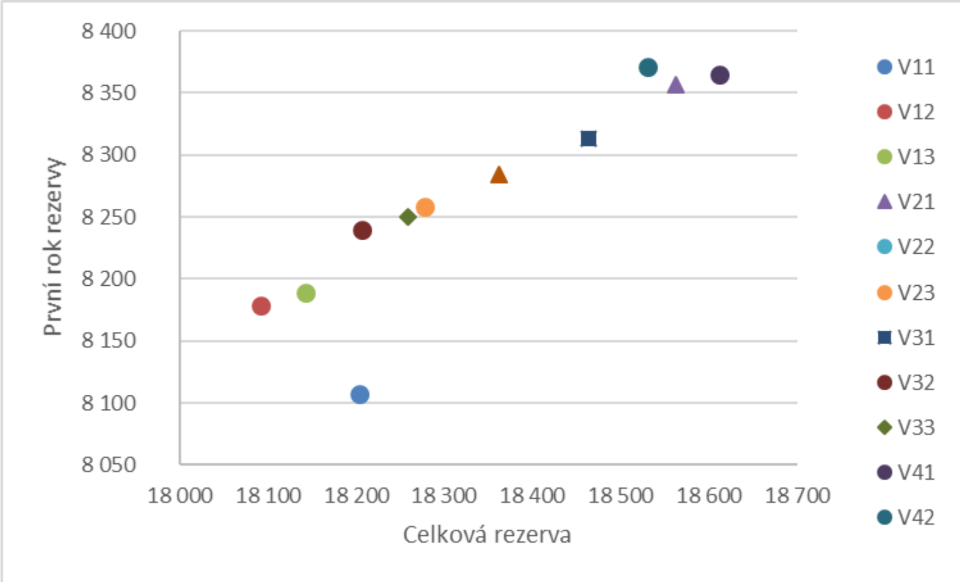
**Tabulka 30: Odhad výše škodních rezerv a kvalita odhadu metody BF jednotlivých verzí**

| | Apriorní odhad očekávaných celkových škod | Apriorní podíl | První rok rezervy | Celková rezerva | Abs. rozdíl | Rel. rozdíl |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V11 | $\alpha^{external}$ | $\gamma^{external}$ | 8 107 | 18 203 | 143 | 1,79% |
| V12 | $\alpha^{external}$ | $\gamma^{AD}(\pi)$ | 8 179 | 18 092 | 215 | 2,70% |
| V13 | $\alpha^{external}$ | $\gamma^{CL}$ | 8 189 | 18 143 | 225 | 2,82% |
| V21 | $\alpha^{CC}(\pi,\gamma^{external})$ | $\gamma^{external}$ | 8 357 | 18 561 | 393 | 4,93% |
| V22 | $\alpha^{CC}(\pi,\gamma^{AD}(\pi))$ | $\gamma^{AD}(\pi)$ | 8 240 | 18 207 | 276 | 3,46% |
| V23 | $\alpha^{CC}(\pi,\gamma^{CL})$ | $\gamma^{CL}$ | 8 259 | 18 278 | 295 | 3,70% |
| V31 | $\alpha^{AD}(\pi)$ | $\gamma^{external}$ | 8 313 | 18 463 | 349 | 4,38% |
| V32 | $\alpha^{AD}(\pi)$ | $\gamma^{AD}(\pi)$ | 8 240 | 18 207 | 276 | 3,46% |
| V33 | $\alpha^{AD}(\pi)$ | $\gamma^{CL}$ | 8 250 | 18 258 | 286 | 3,59% |
| V41 | $\alpha^{LD}(\gamma^{external})$ | $\gamma^{external}$ | 8 365 | 18 611 | 401 | 5,03% |
| V42 | $\alpha^{LD}(\gamma^{AD}(\pi))$ | $\gamma^{AD}(\pi)$ | 8 371 | 18 530 | 407 | 5,11% |
| V43 | $\alpha^{LD}(\gamma^{CL})$ | $\gamma^{CL}$ | 8 284 | 18 361 | 320 | 4,02% |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Na základě získané tabulky můžeme říci, že v našem případě nejlépe odhadovala budoucí rok metoda s apriorními odhady z tabulky 7 a 8. Naopak nejhůře odhadla výši budoucí rezervy metoda B-F v případě využití apriorních odhadů celkových škod z metody loss-development a apriorních podílů z tabulky 7.

Následně si můžeme uvést graf, který znázorňuje závislost prvního roku rezervy na celkové výši rezervy




**Obrázek 1: Graf závislosti odhadu škod budoucího roku na celkové rezervě**

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Na předešlém grafu, můžeme vidět, že velká většina pojistného plnění je v prvním roce, to lze vidět už pomocí kumulativních podílů, proto nás zajímá první rok odhadu nejvíce. Dále lze vidět relativně velkou volatilitu mezi odhadem výše škod u jednotlivých verzí výpočtu B-F. Můžeme také vidět, že u všech těchto verzí odhad prvního roku pojistných plnění překročil hranici 8 100, na základě znalosti pojistného plnění v budoucím roce, a to ve výši 7 964, můžeme říci, že všechny verze nadhodnocují. Nejvíce nadhodnocují verze V41, V21 a V42, nejméně pak verze V11, V12 a V13. V našem případě nejlepší odhad jsme získali pomocí verze V11.

# 7 POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ METOD

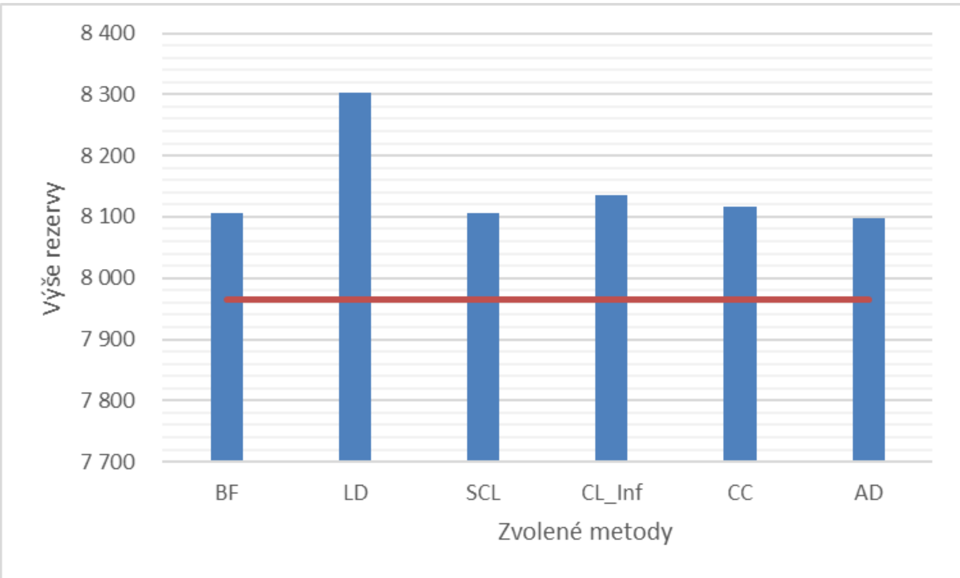
V této kapitole budeme porovnávat kvalitu odhadu škodních rezerv pomocí jednotlivých metod, které byly pro tuto práci zvoleny, v tomto případě bereme výsledky B-F metody, kde apriorní odhady byly získány z tabulek 7 a 8. Nejdříve si uvedeme tabulku, kde budou u jednotlivých metod odhady pro budoucí rok, absolutní rozdíl, relativní rozdíl a celková odhadnutá velikost škodní rezervy

**Tabulka 31: Výše odhadů škodních rezerv a kvalita odhadu jednotlivých metod**

| | Rezerva pro první rok | Celková rezerva | Absolutní rozdí | Relativní rozdíl |
|---|---|---|---|---|
| BF | 8 107 | 18 203 | 143 | 1.97% |
| LD | 8 302 | 18 647 | 338 | 4.25% |
| SCL | 8 106 | 18 263 | 196 | 2.46% |
| CL_Inf | 8 135 | 17 994 | 171 | 2.15% |
| CC | 8 116 | 18 135 | 151 | 1.9% |
| AD | 8 097 | 18 064 | 133 | 1.67% |

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Z tabulky lze vidět, že v našem případě nejlépe vychází aditivní metoda, s nejnižší odchylkou a to 133 absolutně a 1.67 % relativně, druhou nejlepší metodou pro náš příklad je metoda Cape-Cod. Naopak nejhůře dopadla metoda loss-development a jako druhá nejhůře umístěná skončila standardní metoda chain-ladder. Ostatní metody podávají relativně stejný výsledek. Odhady rezerv pro první rok si můžeme dále vykreslit graficky




**Obrázek 2: Graf kvality odhadu škod budoucího roku pomocí jednotlivých metod**

*Zdroj: Vlastní zpracování*

Červenou spojnici v grafu představuje skutečná výše pojistného plnění v budoucím roku, modré sloupce pak jednotlivé odhady výši pojistných plnění v budoucím roce pomocí metod. Z grafu lze vidět, že všechny metody nadhodnocují rezervu v prvním roce, nejlépe v našem případě odhaduje první budoucí rok Aditivní metoda, dále pak metoda B-F, chain-ladder. Naopak nejhůře odhaduje první budoucí rok v našem případě metoda loss-development. Na základě znalosti výše prvního roku budoucích plnění ve výši 7 964, můžeme říci, že všechny metody v našem případě nadhodnocují skutečnost.

# ZÁVĚR

Tato diplomová práce se zabývala technickými rezervami a metodami ze třídy Bornhuetter-Ferguson, které se pro odhad technických rezerv využívají. Stěžejný metodou pro odhad metod z této třídy je metoda Bornhuetter-Ferguson, ostatní metody uvedené v této práci jsou rozšířením této metody. Dále se zabývala přesností odhadu jednotlivých metod na praktickém příkladu.

V první části byla tato diplomová práce zaměřena obecně na technické rezervy, rozdělení na životní a neživotní technické rezervy, které byly dále rozděleny. Další část této práce byla zaměřena na požadavky Solvency II na technické rezervy, kterými se musí pojišťovny v dnešní době řídit. Následně se práce zaměřila na škodní rezervy, které se odhadují pomocí matematicko-statistických metod. Dále vývojovými trojúhelníky, které se využívají pro odhad těchto rezerv, které byly následně rozděleny na kumulativní vývojové trojúhelníky a nekumulativní vývojové trojúhelníky, dále vývojové trojúhelníky byly rozděleny na výplatní a incurred. Další kapitolu tvořily vývojové koeficienty, kterých je celá řada, každá metoda může využívat jiného druhu vývojového koeficientu. Poslední část teoretické části pak byla zaměřena na jednotlivé metody z třídy Bornhuetter-Ferguson a jejich předpoklady.

Praktická část byla zaměřena na využití metod z třídy Bornhuetter-Ferguson pro odhad škodních rezerv na praktickém příkladu a poukázat na provázanost jednotlivých metod se stěžejní metodou Bornhuetter-Ferguson. Následně byla zjištěna kvalita odhadu využitých metod na základě znalosti prvního budoucího. V tomto případě bylo pro odhad technických rezerv využito metod Bornhuetter-Ferguson, loss-development, chain-ladder, kde byla tato metoda ještě rozšířena o inflační vyrovnání, dále metoda Cape-Cod a aditivní metoda. Nejvíce nás zajímal odhad prvního budoucího roku pojistných plnění, který tvoří největší část celkových škod. Z těchto všech metod v našem případě jsme nejlepší odhad získali pomocí metody Bornhuetter-Ferguson s využitím apriorních odhadů z externích dat. Nejhorší odhad jsme pak získali pomocí metody loss-development. Je potřeba podotknou, že ikdyž metoda Bornhuetter-Ferguson na našem modelovém příkladu nejlépe odhadla pojistná plnění v budoucím prvním roce, neznamená to, že zvolená metoda je nejlepší. Součástí praktické části byl také odhad škodních rezerv pomocí metody Bornhuetter-Ferguson, která využívá různých apriorních odhadů získaných z různých metod, které byly v této práci uvedeny. I v tomto případě nejlepší odhad byl získán pomocí apriorních odhadů získaných z externích dat, které byly předem známé.

# POUŽITÁ LITERATURA


[1] CIPRA, Tomáš. Kapitálová přiměřenost ve financích a solventnost v pojišťovnictví. Praha: Ekopress, 2002. ISBN 80-86119-54-8.

[2] [online]. [cit. 2018-03-06]. Dostupné z: https://zakony.kurzy.cz/277-2009-zakon-o-pojistovnictvi/paragraf-64/

[3] [online]. [cit. 2018-03-06]. Dostupné z: http://solvency-ii-best-estimate.com

[4] [online]. [cit. 2018-03-06]. Dostupné z: https://www.ceskapojistovna.cz/rezervy

[5] Schmidt, Klaus D, and Mathias Zocher, "The Bornhuetter-Ferguson Principle," Variance 2:1, 2008, pp. 85-110.

[6] BOOTH, P. *Modern actuarial theory and practice*. 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, c2005. ISBN 1-58488-368-5.

[7] *Handbook on loss reserving*. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg, 2016. ISBN 9783319300542.