

**Univerzita Pardubice**

**Fakulta ekonomicko-správní**

**Aplikace úlohy o minimální kostře grafu**

**Bc. Monika Launerová**

**Diplomová práce  
2018**

Univerzita Pardubice  
Fakulta ekonomicko-správní  
Akademický rok: 2017/2018

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Monika Launerová**  
Osobní číslo: **E15633**  
Studijní program: **N6208 Ekonomika a management**  
Studijní obor: **Ekonomika a management podniku**  
Název tématu: **Aplikace úlohy o minimální kostře grafu**  
Zadávající katedra: **Ústav matematiky a kvantitativních metod**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Cíl práce: Kostra grafu, minimální, resp. maximální kostra v ohodnoceném grafu. Charakteristika nejužívanějších algoritmů pro určení minimální kostry. Řešení některých analogií základní úlohy, jako je např. nejlevnější kostra s předepsaným stupněm jednoho uzlu, kostra s minimálním poměrem dvou ohodnocení, nejlevnější steinerovský strom. Zpracování návrhu optimálního informačního systému firmy apod.

Osnova:

- Základní pojmy teorie grafů.
- Stromy a kostry grafů, minimální kostra grafu.
- Nejužívanější algoritmy pro určení minimální kostry. Historické poznámky.
- Analogie základní úlohy.
- Praktické aplikace řešení úlohy o minimální kostry grafu.

Rozsah grafických prací: —  
Rozsah pracovní zprávy: cca 50 stran  
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická  
Seznam odborné literatury:

BERGE Claude. The theory of graphs. Dover Publications, 2001. ISBN 0-486-41975-4  
ČERNÝ, Jakub. Základní grafové algoritmy. Praha: České vysoké učení technické, 2013. ISBN 978-80-01-05258-7  
DEMEL, Jiří. Grafy a jejich aplikace. Praha: Academia, 2002. ISBN 80-200-0990-6  
LINDA, Bohdan a VOLEK, Josef. Teorie grafů: aplikace v dopravě a veřejné správě. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2012. ISBN 978-80-7395-225-9  
MATOUŠEK, Jiří a NEŠETŘIL Jaroslav. Kapitoly z diskrétní matematiky. Praha: Karolinum, 2007. ISBN 978-80-246-1411-3  
MILKOVÁ, Eva. Problém minimální kostry grafu. Hradec Králové: Gaudeamus, 2001. ISBN 80-7041-436-7

Vedoucí diplomové práce:



doc. RNDr. Jaroslav Seibert, CSc.

Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: 1. září 2016

Termín odevzdání diplomové práce: 30. dubna 2018

doc. Ing. Romana Provozníková, Ph.D.

děkanka

L.S.

doc. Ing. Marcela Kožená, Ph.D.

vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 1. září 2017

## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 27. 4. 2018

Bc. Monika Launerová

## **PODĚKOVÁNÍ:**

Ráda bych poděkovala vedoucímu diplomové práce doc. RNDr. Jaroslavu Seibertovi, CSc. za spolupráci, a hlavně za čas, který mi věnoval při konzultacích. Také bych chtěla poděkovat rodině, přátelům a mému příteli za podporu během celého studia.

## **ANOTACE**

Cílem práce je použití algoritmů minimální kostry grafu v reálných aplikacích. Jsou zde popsány tři nejznámější přístupy, Borůvkův, Jarníkův a Kruskalův. Tyto postupy se využívají v různých úlohách jako součást celkového řešení. Z těchto úloh práce zmiňuje problém obchodního cestujícího. Dále jsou zmíněny některé modifikace základní úlohy. V praktické části jsou pak tyto postupy použity v reálné aplikaci.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Borůvkův algoritmus, historie problému minimální kostry grafu, Christofidova metoda, Jarníkův algoritmus, Kruskalův (hladový) algoritmus, metoda zdvojení minimální kostry, minimální kostra grafu, minimální perfektní párování, problém obchodního cestujícího, teorie grafů

## **TITLE**

Applications of the minimal spanning tree of a graph

## **ANNOTATION**

The aim of this thesis is to use algorithms of the minimal (cost) spanning tree in real applications. The three best-known approaches are mentioned there - Borůvka's, Jarník's and Kruskal's approach. These approaches are used in various tasks as a part of the overall solution. From these tasks the thesis mentions a traveling salesman problem. Furthermore, some modifications of the basic task are mentioned. In the practical part these approaches are used in a real application.

## **KEYWORDS**

Borůvka's Algorithms, History of Minimal (cost) Spanning Tree, Christofides' Algorithms, Jarník's Algorithms, Kruskal's (hungry) Algorithms, Double Minimum Spanning Tree, Minimal (cost) Spanning Tree, Minimum Perfect Matching, Traveling Salesman Problem, Graph Theory

## Obsah

|  |    |
|--|----|
| Seznam tabulek a obrázků                                       | 9  |
| Seznam zkratk a značek   | 11 |
| Úvod   | 12 |
| I. TEORETICKÁ ČÁST   | 13 |
| 1 Teorie grafů   | 13 |
| 1.1 Základní pojmy teorie grafů                                | 13 |
| 1.1.1 Souvislost grafu   | 14 |
| 1.1.2 Ohodnocené grafy   | 15 |
| 1.1.3 Orientované grafy  | 15 |
| 1.2 Stromy   | 16 |
| 1.3 Kostra grafu   | 16 |
| 1.3.1 Metody výpočtu počtu koster grafu                        | 17 |
| 2 Minimální kostra grafu                                       | 19 |
| 2.1 Historie problému minimální kostry grafu                   | 19 |
| 2.1.1 Přístup Otakara Borůvky                                  | 19 |
| 2.1.2 Přístup Vojtěcha Jarníka                                 | 21 |
| 2.1.3 Přístup Josepha B. Kruskala                              | 21 |
| 2.2 Algoritmy pro hledání minimální kostry grafu               | 21 |
| 2.2.1 Borůvkův algoritmus                                      | 22 |
| 2.2.2 Jarníkův algoritmus                                      | 24 |
| 2.2.3 Kruskalův „hladový“ algoritmus                           | 27 |
| 2.2.4 Porovnání algoritmů                                      | 29 |
| 2.3 Problém obchodního cestujícího                             | 30 |
| 2.3.1 Metoda zdvojení minimální kostry                         | 30 |
| 2.3.2 Christofidova metoda                                     | 33 |
| 2.4 Analogie základní úlohy                                    | 38 |
| 2.4.1 Nejlevnější kostra s předepsaným stupněm jednoho vrcholu | 38 |
| 2.4.2 Kostra s minimálním poměrem dvou ohodnocení              | 40 |
| 2.4.3 Nejlevnější steinerovský strom                           | 40 |
| 2.4.4 Maximální kostra grafu                                   | 41 |

|  |    |
|--|----|
| II. PRAKTICKÁ ČÁST   | 42 |
| 1 Propojení optickou sítí – využití Jarníkova algoritmu  | 42 |
| 2 Rozvoz mléčných výrobků – metoda zdvojení minimální kostry (využití Kruskalova algoritmu)            | 44 |
| 3 Rozvoz obědů – metoda zdvojení minimální kostry a Christofidova metoda (využití Borůvkova algoritmu) | 51 |
| Závěr  | 57 |
| Seznam použité literatury  | 58 |



## Seznam tabulek a obrázků

|   |    |
|---|----|
| Tabulka 1. Seznam zastávek – Mléko z farmy .....  | 45 |
| Tabulka 2. Rozvoz mléčných výrobků – matice vzdáleností zastávek.....                     | 46 |
| Tabulka 3. Rozvoz mléčných výrobků – hledání minimální kostry – 3.iterace .....           | 47 |
| Tabulka 4. Rozvoz mléčných výrobků – hledání minimální kostry – 10.iterace .....          | 48 |
| Tabulka 5. Rozvoz mléčných výrobků – hledání minimální kostry – předposlední iterace..... | 48 |
| Tabulka 6. Rozvoz mléčných výrobků – hledání minimální kostry – výsledná matice .....     | 49 |
| Tabulka 7. Rozvoz mléčných výrobků řešení.....  | 50 |
| Tabulka 8. Rozvoz obědů – seznam obcí .....   | 51 |
| Tabulka 9. Rozvoz obědů – matice vzdáleností obcí.....                                    | 51 |
| Tabulka 10. Rozvoz obědů – hledání minimální kostry – 1. krok.....                        | 52 |
| Tabulka 11. Rozvoz obědů – hledání minimální kostry – výsledná minimální kostra.....      | 53 |
| Tabulka 12. Rozvoz obědů – metoda zdvojení minimální kostry – řešení.....                 | 53 |
| Tabulka 13. Rozvoz obědů – Christofidova metoda – řešení .....                            | 56 |
| <br>  |    |
| Obrázek 1. A, B, C – komponenty grafu s 9 vrcholy.....                                    | 15 |
| Obrázek 2. Počet koster grafu G-h n=4.....  | 18 |
| Obrázek 3. Počet koster grafu G:h n=4.....  | 18 |
| Obrázek 4. Propojení bodů v rovině - obr.1.....   | 20 |
| Obrázek 5. Propojení bodů v rovině - obr.2.....   | 20 |
| Obrázek 6. Propojení bodů v rovině - obr.3.....   | 20 |
| Obrázek 7. Propojení bodů v rovině - obr.4.....   | 20 |
| Obrázek 8. Borůvkův algoritmus – fiktivní příklad.....                                    | 22 |
| Obrázek 9. Borůvkův algoritmus – 0. krok.....   | 22 |
| Obrázek 10. Borůvkův algoritmus – 1. krok.....  | 23 |
| Obrázek 11. Borůvkův algoritmus – 2. krok.....  | 23 |
| Obrázek 12. Jarníkův algoritmus – fiktivní příklad.....                                   | 24 |
| Obrázek 13. Jarníkův algoritmus – 0. krok.....  | 24 |
| Obrázek 14. Jarníkův algoritmus – 1. krok.....  | 25 |
| Obrázek 15. Jarníkův algoritmus – 2. krok.....  | 25 |
| Obrázek 16. Jarníkův algoritmus – 3. krok.....  | 26 |
| Obrázek 17. Jarníkův algoritmus – 4. krok.....  | 26 |
| Obrázek 18. Jarníkův algoritmus – 5. krok.....  | 26 |

|  |    |
|--|----|
| Obrázek 19. Kruskalův algoritmus – fiktivní příklad.....                     | 27 |
| Obrázek 20. Kruskalův algoritmus – 0. krok.....                              | 27 |
| Obrázek 21. Kruskalův algoritmus – 1. krok.....                              | 28 |
| Obrázek 22. Kruskalův algoritmus – 2. krok.....                              | 28 |
| Obrázek 23. Kruskalův algoritmus – 3. krok.....                              | 28 |
| Obrázek 24. Kruskalův algoritmus – 4. krok.....                              | 29 |
| Obrázek 25. Kruskalův algoritmus – 5. krok.....                              | 29 |
| Obrázek 26. 0. krok – metoda zdvojení minimální kostry grafu.....            | 31 |
| Obrázek 27. 1. krok – metoda zdvojení minimální kostry grafu.....            | 31 |
| Obrázek 28. 2. krok – metoda zdvojení minimální kostry grafu.....            | 32 |
| Obrázek 29. 3. krok – metoda zdvojení minimální kostry grafu.....            | 33 |
| Obrázek 30. 0. krok – Christofidova metoda.....                              | 34 |
| Obrázek 31. 1. krok – Christofidova metoda.....                              | 35 |
| Obrázek 32. 2. krok – Christofidova metoda.....                              | 37 |
| Obrázek 33. 3. krok – Christofidova metoda.....                              | 37 |
| Obrázek 34. Optická síť.....   | 42 |
| Obrázek 35. Optická síť řešení.....  | 44 |
| Obrázek 36. Nejlevnější perfektní párování – postup řešení v programu R..... | 56 |

## Seznam zkratek a značek

|           |  |
|-----------|--|
| $G$       | graf   |
| $\vec{G}$ | orientovaný graf   |
| $V$       | množina vrcholů v grafu                                  |
| $H$       | množina hran v grafu                                     |
| $v_i$     | $i$ -tý vrchol z množiny vrcholů, $i = 1, 2, \dots, n$   |
| $h_j$     | $j$ -tá hrana z množiny hran, $j = 1, 2, \dots, m$       |
| $T$       | strom  |
| $Q$       | matice   |
| $q_{ij}$  | prvky matice $Q_{ij}$                                    |
| $w(h_j)$  | ohodnocení $j$ -té hrany $h_j \in H, j = 1, 2, \dots, m$ |

## Úvod

Mnoho lidí nemá představu, k čemu se mohou matematické teorie v praxi používat. Hodně z nich má k matematice odpor, nechápou ji a ani ji nechtějí pochopit. Existuje však řada problémů, které jsou díky matematice snadno řešitelné, a často si to ani neuvědomujeme. V této práci bychom chtěli ukázat použití teorie grafů v praxi, a to skrze hledání minimální kostry grafu.

Dnešní doba je uspěchaná, všichni jsou stále v časové tísní. Globalizace s sebou nese rozvoj mezinárodního obchodu, společnosti se rozrůstají i do zahraničí, vznikají různé klastry, holdingy, koncerny a podobně. Manažeři pak objíždějí jednotlivé centrály, pobočky a navzájem si předávají znalosti. Hledání minimální kostry grafu může pomoci nalézt například nejkratší trasu mezi jednotlivými pobočkami, a tak ušetřit čas. Také díky těmto výpočtům mohou společnosti ušetřit peníze například při trasování elektrického vedení.

Tato práce pojednává o minimální kostře grafu a jejích možných modifikacích. V teoretické části jsou nejprve představeny základní pojmy teorie grafů, definovány stromy a kostry grafu včetně metod výpočtu počtu koster grafu. Dále se již práce zabývá jednotlivými přístupy pro výpočet minimální kostry grafu. Představen je postupně Borůvkův, Jarníkův a Kruskalův algoritmus. Všechny tyto přístupy jsou v praktické části využity při výpočtech. Určování minimální kostry grafu je často pouze součástí celkového řešení nějaké problematiky. Tato práce pojednává o jedné z těchto problematik, o problému obchodního cestujícího. Také jsou zde zmíněny některé analogie základní úlohy.

V této práci jsou spočítány tři reálné aplikace. Nejprve je s pomocí Jarníkova algoritmu nalezeno optimální propojení rehabilitačního zařízení optickou sítí. Poté je nalezena nejkratší trasa pro rozvoz mléčných výrobků po Pardubicích a Chrudimi. A jako poslední je nalezena nejkratší trasa pro rozvoz obědů v Jaroměři a okolí.

# I. TEORETICKÁ ČÁST

## 1 Teorie grafů

### 1.1 Základní pojmy teorie grafů

V této kapitole jsou představeny základní pojmy z teorie grafů. Veškeré podklady jsou převzaty z [3], [5], [12], [17].

**Definice 1.1** Neorientovaný graf je uspořádaná dvojice množin  $G = (V, H)$ , kde  $V$  je množina vrcholů (uzlů) a  $H$  je množina hran. Každá hrana je pak dána dvojicí vrcholů  $\{v_i, v_j\} \in H, v_i \in V, v_j \in V$ .

Předpokládejme, že množiny  $V$  a  $H$  jsou konečné.

**Definice 1.2** Sousední vrcholy jsou takové vrcholy, které jsou spojeny hranou, tj.  $\{v_i, v_j\} \in H, i, j = 1, \dots, n$ .

**Definice 1.3** Graf  $G = (V, H)$  se rovná grafu  $G' = (V', H')$ , jestliže  $V = V'$  a  $H = H'$ .

**Definice 1.4** Graf  $G = (V, H)$  je podgraf grafu  $G' = (V', H')$ , jestliže  $V \subseteq V'$  a  $H \subseteq H'$ .

**Definice 1.5** Pro každý vrchol lze určit stupeň vrcholu  $deg(v_i), i = 1, \dots, n$ , udávající počet hran, na kterých daný vrchol leží, incidentních s daným vrcholem.

**Věta 1.1** (Princip sudosti) Necht' je dán graf  $G$  s vrcholy  $v_1, \dots, v_n \in V, n \geq 1$ . Necht'  $h(G)$  je počet hran grafu  $G$ . Potom platí:  $\sum_{i=1}^n deg(v_i) = 2h(G)$ .

**Definice 1.6** Úplný graf má každé dva navzájem různé vrcholy spojené hranou.

**Definice 1.7** Násobné (paralelní) hrany spojují stejné dva vrcholy (více hran mezi dvěma vrcholy).

**Definice 1.8** Smyčka je hrana, která spojuje tentýž vrchol, tj.  $\{v_i, v_i\} \in H, i = 1, \dots, n$ .

**Definice 1.9** Graf se nazývá jednoduchý, jestliže každá dvojice vrcholů je spojena nejvýše jednou hranou a neobsahuje žádné smyčky.

**Definice 1.10** Pseudograf je graf, který není jednoduchý, tj. obsahuje smyčky a násobné hrany.

**Definice 1.11** Multigraf je graf, který obsahuje násobné hrany, ale neobsahuje smyčky.

**Definice 1.12** (Incidenční matice) Necht' je dán graf  $G(V, H), V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ . Incidenční matice grafu  $G$  je matice  $B(G)$  typu  $n \times m$ , která má prvky  $(b_{ij})$

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow v_i \text{ je incidentní s } h_j \\ 0 & \Leftrightarrow v_i \text{ není incidentní s } h_j. \end{cases}$$

**Definice 1.13** (Matice sousednosti) Necht' je dán graf  $G(V, H)$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ . Matice sousednosti grafu  $G$  je matice  $A(G)$  typu  $n \times n$ , která má prvky  $\{a_{i,j}\}$

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow [v_i, v_j] \in H \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

### 1.1.1 Souvislost grafu

**Definice 1.14** Sled délky  $k$  v grafu  $G$  je posloupnost vrcholů a hran  $v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \dots, h_k, v_k$  taková, že  $h_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

**Definice 1.15** Tah délky  $k$  v grafu  $G$  je sled délky  $k$ , ve kterém se neopakují hrany, tj.  $h_i \neq h_j \forall i \neq j$ .

**Definice 1.16** Cesta délky  $k$  v grafu  $G$  je sled délky  $k$ , ve kterém se neopakují vrcholy, tj.  $v_i \neq v_j \forall i \neq j$ .

**Definice 1.17** Uzavřený sled délky  $k$  v grafu  $G$  je sled délky  $k$ , ve kterém  $v_0 = v_k$ .

Uzavřený tah délky  $k$  v grafu  $G$  je tah délky  $k$ , ve kterém  $v_0 = v_k$ .

**Definice 1.18** Kružnice délky  $k$  v grafu  $G$  je posloupnost  $(v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \dots, h_k, v_0)$  taková, že  $h_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$ ,  $h_k = \{v_{k-1}, v_0\}$ ,  $v_i \neq v_j \forall i \neq j$  a  $k \geq 3$ .

**Definice 1.19** Souvislý graf je graf, kde mezi každými dvěma různými vrcholy existuje cesta.

**Věta 1.2** Pokud je graf  $G$  souvislý a obsahuje kružnici  $C$ , potom graf  $G - h$ , kde  $h$  je libovolná hrana kružnice  $C$ , je také souvislý.

**Definice 1.20** Hamiltonovská kružnice v grafu  $G$  je kružnice obsahující všechny vrcholy grafu  $G$ .

Hamiltonovský graf je graf, ve kterém existuje hamiltonovská kružnice.

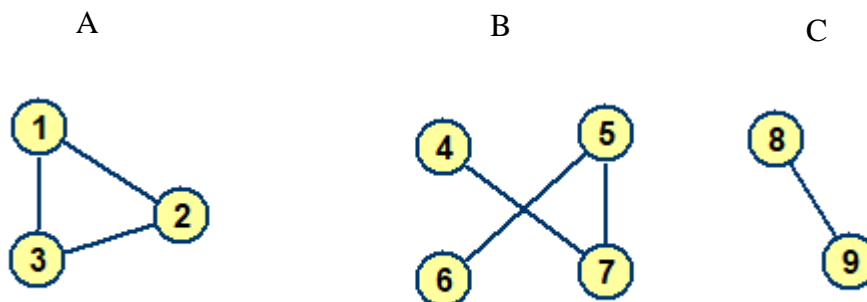
**Definice 1.21** Eulerovský tah v grafu  $G$  je uzavřený nebo otevřený tah, který obsahuje všechny hrany grafu  $G$ .

Eulerovský graf je souvislý graf  $G$ , ve kterém existuje uzavřený eulerovský tah.

**Věta 1.3** Souvislý graf  $G$  je eulerovský právě tehdy, když má všechny vrcholy sudého stupně.

**Věta 1.4** Souvislý graf  $G$  obsahuje otevřený eulerovský tah právě tehdy, když má právě dva vrcholy lichého stupně.

**Definice 1.22** Komponenta grafu  $G$  je každý souvislý podgraf grafu  $G$  (viz obrázek 1).



Obrázek 1. A, B, C – komponenty grafu s 9 vrcholy (zdroj: vlastní – zpracováno na základě [16])

### 1.1.2 Ohodnocené grafy

**Definice 1.23** Necht'  $h$  je reálná funkce definovaná na množině hran  $H$  grafu  $G = (V, H)$ . Potom se trojice  $G_h = (V, H, h)$  nazývá hranově ohodnoceným grafem.

**Definice 1.24** Necht'  $v$  je reálná funkce definovaná na množině vrcholů  $V$  grafu  $G = (V, H)$ . Potom se trojice  $G_v = (V, H, v)$  nazývá vrcholově ohodnoceným grafem.

Délkou cesty v hranově ohodnoceném grafu se rozumí součet délek ohodnocených hran, které tvoří cestu.

Dále budeme pod pojmem „ohodnocení“ uvažovat hranové ohodnocení. Pokud by bylo myšleno jiné ohodnocení, bude to v textu zdůrazněno.

### 1.1.3 Orientované grafy

**Definice 1.25** Orientovaný graf je dvojice množin  $\vec{G} = (V, H)$ , kde  $V$  je množina vrcholů a  $H$  je množina orientovaných hran. Orientované hrany jsou uspořádané dvojice  $(v_i, v_j)$ , kde  $v_i, v_j \in V$  jsou dva vrcholy grafu  $\vec{G}$ .

Tzn., že každá hrana má definovaný směr od počátečního vrcholu ke koncovému vrcholu hrany. Průchod této hrany je pak možný pouze ve směru počáteční – koncový vrchol, nikoliv opačně. Při grafickém znázornění jsou hrany opatřené šipkami.

**Definice 1.26** Orientovaným sledem v orientovaném grafu  $\vec{G}$  nazýváme posloupnost vrcholů a hran  $v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \dots, h_k, v_k$ , jestliže pro každé dva vrcholy  $(v_{i-1}, v_i)$  existuje orientovaná hrana  $h_i$  vedoucí z vrcholu  $v_{i-1}$  do vrcholu  $v_i$ , pro  $i = 1, \dots, k$ .

**Definice 1.27** Orientovaný sled, v němž se žádný vrchol nevyskytuje vícekrát se nazývá orientovaná cesta v grafu  $\vec{G}$ . Uzavřená orientovaná cesta se nazývá cyklus.

## 1.2 Stromy

**Definice 1.28** Graf, který neobsahuje kružnici, nazýváme lesem.

**Definice 1.29** Stromy jsou souvislé grafy, kde pro libovolnou dvojici vrcholů  $v_i, v_j \in V$  existuje právě jedna cesta, která je spojuje.

Obvykle se značí písmenem  $T$  podle anglického slova tree (strom).

**Definice 1.30** Triviální strom obsahuje pouze jeden vrchol. Netriviální pak má alespoň vrcholy dva.

**Věta 1.5** Počet hran ve stromu je o 1 nižší, než je počet vrcholů.

**Definice 1.31** Necht' je dán strom  $T = (V, H)$ . Vrchol  $v \in V$  stupně 1 se nazývá list stromu  $T$ . Vrchol  $v \in V$  většího stupně je vnitřní vrchol stromu  $T$ .

Jestliže odebereme ze stromu list, dostaneme opět strom.

## 1.3 Kostra grafu

**Definice 1.32** Necht'  $G = (V, H)$  je graf. Libovolný strom  $T = (V, H')$ , kde  $H' \subseteq H$ , který je podgrafem grafu  $G = (V, H)$ , nazýváme kostrou grafu  $G$ .

Tedy kostra grafu  $G$  je strom, který je podgrafem grafu  $G$  a obsahuje všechny jeho vrcholy.

**Věta 1.6** Graf  $G$  je souvislý právě tehdy, když obsahuje alespoň jednu kostru.

**Věta 1.7** Obsahuje-li graf  $G$  právě jednu kostru, pak je tento graf strom.

Otázkou počtu všech koster úplného grafu se zabýval Arthur Cayley. Jeho závěr byl jednoduchý:

**Věta 1.8** Počet koster úplného grafu s  $n$  vrcholy je  $n^{n-2}$ .



### 1.3.1 Metody výpočtu počtu koster grafu

V této práci jsou zmíněny dvě metody pro výpočet počtu koster grafu, které větu 1.8 dokazují. První metoda využívá Laplaceovy matice, druhá pak rekurentní postup. Pro další metody čtenáře odkazujeme například na [15]. Tyto dvě metody byly čerpány z [15] a [20].

a) užití Laplaceovy matice

Nechť je dán graf  $G$  s  $n$  vrcholy ( $n \geq 2$ ) a  $m$  hranami. Laplaceova matice grafu  $G$  o velikosti  $n \times n$  má prvky  $q_{ij}$  dány předpisem

$$q_{ii} = \deg_G(v_i),$$
$$q_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in H_G \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j.$$

Z této matice se vytvoří redukovaná matice  $Q_{ij}$  velikosti  $(n-1) \times (n-1)$  vyškrtnutím  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce. Dále bude využita platnost následující věty:

**Věta 1.9** Pro každý graf  $G$  je počet koster v grafu roven determinantu redukované Laplaceovy matice  $\det(Q_{11})$ .

Pro úplný graf bude mít Laplaceova matice na hlavní diagonále  $(n-1)$  a mimo tuto diagonálu prvky  $(-1)$ . Odstraněním prvního řádku a sloupce získáme matici  $(n-1) \times (n-1)$  tvaru

$$\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Nyní se již vypočítá determinant této matice. Řádkovými a sloupcovými úpravami, kdy nejprve první řádek odečteme od všech ostatních a následně k prvnímu sloupci přičteme součet ostatních sloupců, získáme matici:

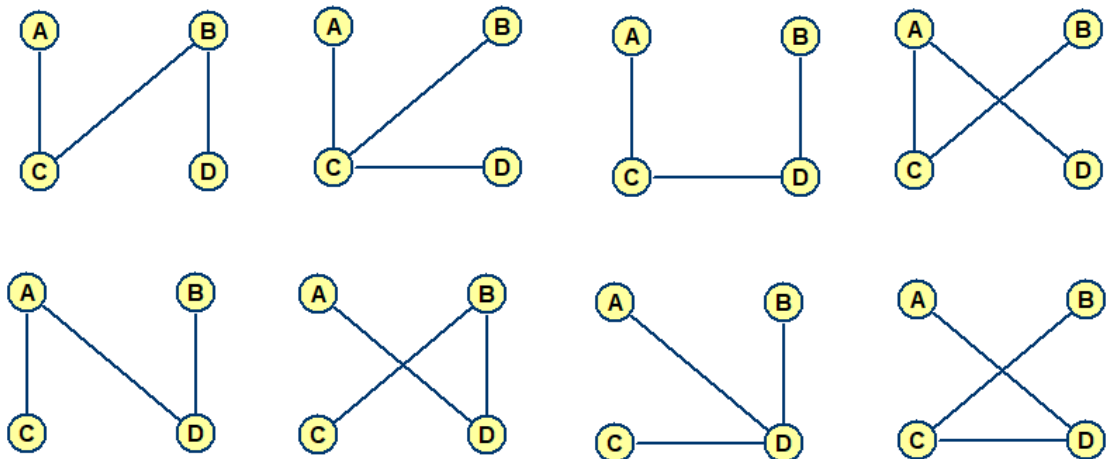
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Z této matice již lehce spočítáme determinant jako součin prvků na hlavní diagonále, neboť všechny ostatní prvky v matici jsou nulové. Tento součin je roven  $n^{n-2}$ . Tím je věta 1.8 dokázána.

b) rekurentní postup

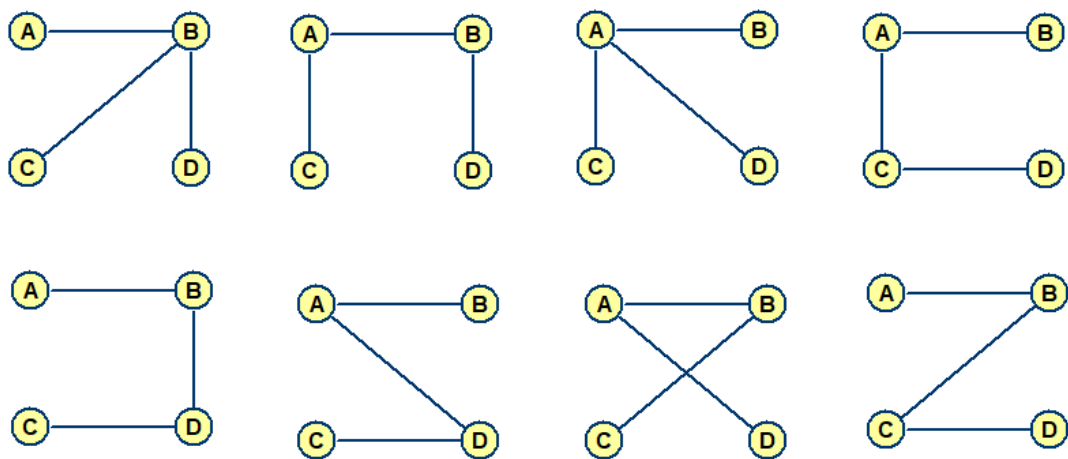
**Věta 1.10** Necht'  $G$  je libovolný souvislý neorientovaný graf a  $h$  jeho hrana, která není smyčkou. Označme  $G - h$  graf  $G$  po vynechání hrany  $h$ . Označme  $G:h$  graf, který vznikne, pokud vynecháme z grafu  $G$  hranu  $h$  a slepíme koncové vrcholy této hrany do jednoho vrcholu. Přičemž ostatní hrany se zachovají. Pak je počet koster grafu  $G$  roven součtu počtu koster grafů  $G - h$  a  $G:h$ .

Pro ilustraci budeme aplikovat tuto větu na úplný graf  $G$  se čtyřmi vrcholy. Graf  $G - h$  obsahuje osm koster grafu (viz obrázek 2, kde je vynechána hrana AB).



Obrázek 2. Počet koster grafu  $G-h$   $n=4$  (Zdroj: vlastní)

Graf  $G:h$  také obsahuje osm koster grafu (viz obrázek 3, kde je pro lepší názornost hrana AB ponechána, to nám řešení nezmění (správně by byly vrcholy A a B sloučené do jednoho)).



Obrázek 3. Počet koster grafu  $G:h$   $n=4$  (Zdroj: vlastní)

Celkový počet všech koster úplného grafu se čtyřmi vrcholy je tedy opravdu 16, což odpovídá tvrzení věty 1.8.

## 2 Minimální kostra grafu

V této práci se zaměříme na minimální kostru grafu. Minimální kostra grafu je taková kostra grafu, jejíž součet ohodnocení hran, které patří do této kostry, je minimální. Dále jsou představeny tři přístupy a algoritmy pro hledání minimální kostry grafu. Čerpáno bylo z [15], [16] a [17], a také přímo od tvůrců příslušných algoritmů – [1], [9] a [11].

**Definice 2.1** Necht' jsou dány vrcholy  $v_i, v_j$ . Potom se vzdálenost mezi vrcholy  $v_i$  a  $v_j$  definuje jako délka nejkratší cesty z  $v_i$  do  $v_j$ , pokud vůbec nějaká existuje. Pokud neexistuje, pak je tato vzdálenost rovna nekonečnu.

**Definice 2.2** Necht' je dán graf  $G = (V, H)$  a necht' pro každou hranu  $h_i \in H, i = 1, \dots, m$ , je dáno její nezáporné ohodnocení  $w(h_i) \in \mathbb{R}^+$ . Nalezne-li se mezi všemi kostrami grafu  $G$  taková kostra  $T = (V, H')$ , pro kterou součet ohodnocení hran  $w(T) = \sum_i w(h_i), h_i \in H'$ , nabývá minimální hodnoty, pak se tato kostra  $T$  nazývá minimální kostra grafu  $G$  a  $w(T)$  cena kostry  $T$ .

Může se stát, že pro nalezení minimální kostry grafu, je potřeba některá spojení vyloučit (tzv. zakázané hrany) a jiná se v řešení musí nacházet (tzv. povinné hrany). Potom se musí graf upravit. Povinným hranám přidělíme ohodnocení -1 a zakázané hrany z grafu odebereme.

Také se může stát, že se v grafu objeví více minimálních koster. Například pokud máme graf, kde jsou všechny hrany ohodnoceny stejným číslem. Potom je počet minimálních koster roven počtu všech koster.

### 2.1 Historie problému minimální kostry grafu

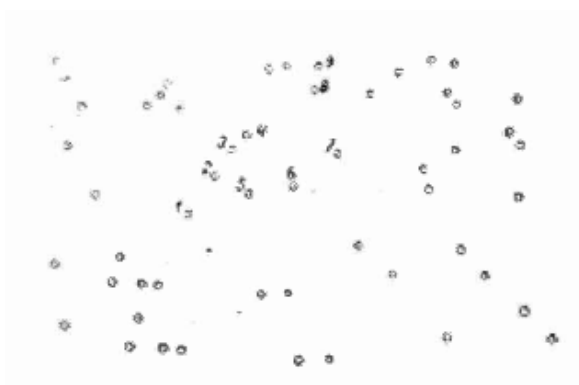
U zrodu problému minimální kostry grafu stáli dva významní čeští matematici. Nejprve je uveden přístup Otakara Borůvky, který jako první na tuto problematiku aplikoval vlastní algoritmus. Následně nezávisle na něm vytvořil vlastní postup Vojtěch Jarník. Ze zahraničních autorů je pak zmíněn přístup Josepha B. Kruskala. [17]

#### 2.1.1 Přístup Otakara Borůvky

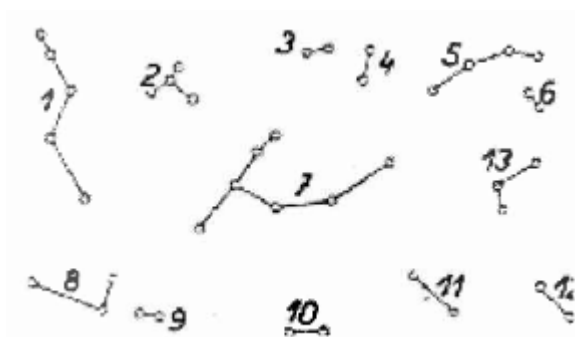
Na přelomu let 1925/26 se český matematik Otakar Borůvka seznámil s pracovníkem elektráren, který ho požádal o pomoc. Potřeboval vyřešit problém kudy a jak vést trasu vedení

mezi několika desítkami obcí na Moravě, aby byla co nejkratší a tím co nejúspornější. Borůvka začal tuto problematiku zkoumat a našel řešení. Své myšlenky a postupy zaznamenal do článku „Příspěvek k řešení otázky ekonomické stavby elektrovodných sítí“ (viz [2]) a matematické zpracování problému zaznamenal na 16 stran článku „O jistém problému minimálním“ (viz [1]). Tenkrát bylo velmi obtížné tento problém matematicky popsat, neboť ještě neexistovala terminologie teorie grafů. [16]

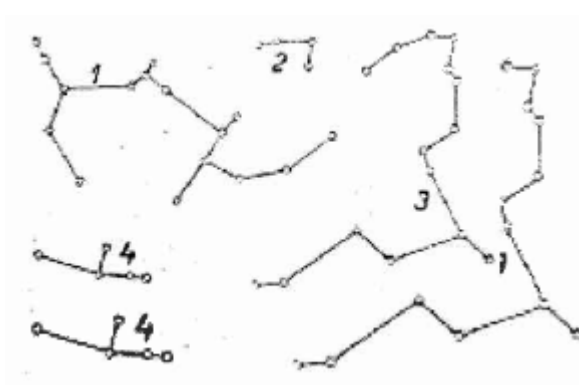
Dále Otakar Borůvka aplikoval algoritmus v elektrotechnickém časopise na příkladu – jak propojit 40 bodů v rovině, které mají různé vzdálenosti, tak, aby celková délka sítě byla co nejmenší. Celý postup ilustroval následujícími čtyřmi obrázky. [17]



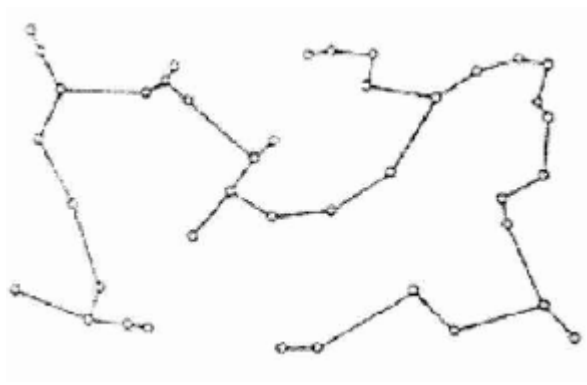
Obrázek 4. Propojení bodů v rovině - obr.1 (Zdroj: [17])



Obrázek 5. Propojení bodů v rovině - obr.2 (Zdroj: [17])



Obrázek 6. Propojení bodů v rovině - obr.3 (Zdroj: [17])



Obrázek 7. Propojení bodů v rovině - obr.4 (Zdroj: [17])

Nejprve propojil každý bod (obrázek 4) s nejbližším bodem, čímž získal řadu tahů (obrázek 5). Tyto tahy pak spojil nejkratším možným způsobem (obrázek 6) a ty opět spojil nejkratším možným způsobem tak, aby získal jediný polygonální tah (obrázek 7), čímž bylo získáno řešení dané úlohy. [17]

### 2.1.2 Přístup Vojtěcha Jarníka

Vojtěch Jarník reagoval na článek Otakara Borůvky „O jistém problému minimálním“ [1] stejnojmenným dopisem s podtitulem „Z dopisu panu O. Borůvkovi“, neboť na první pohled nebyl Borůvkův algoritmus příliš průhledný. Jarník navrhl jiný a jednodušší postup pro vytvoření požadované konstrukce, kdy vycházel z geometrické představy problému. Uvažoval  $n$  kuliček, které jsou očíslovány od 1 do  $n$  a jsou po dvojicích spojeny tyčemi v počtu  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Tyče mohou být prohnuté tak, aby se navzájem nedotýkaly. Úkolem je pak odstranit takové tyče, aby všech  $n$  kuliček bylo stále pohromadě a „hmota“ zbylých tyčí byla co nejmenší. [16]

Oba čeští matematici tak předběhli svou dobu. Zájem o tento problém propukl až v 50. letech 20. století s rozvojem počítačů. Borůvkův i Jarníkův přístup byl nezávisle objeven ještě několikrát. Důvodem bylo, že jejich práce byly sepsány v mateřském jazyce, tedy většině matematiků byly nedostupné. [16]

### 2.1.3 Přístup Josepha B. Kruskala

Třetí možné řešení odlišné od předchozích dvou vytvořil Joseph B. Kruskal v článku „On the shortest spanning tree of a graph and the traveling salesman problem“ (viz [11]). Jeho práce obsahovala výtah z Borůvkova článku. Dokázal, že kostra je právě jedna, jestliže žádné dvě hrany nemají stejné ohodnocení. Snažil se zjednodušit Borůvkovy komplikované myšlenky, což se mu také podařilo a v roce 1956 zveřejnil vlastní konstrukci minimální kostry grafu. I Kruskalův algoritmus byl několikrát nezávisle znovuobjeven. [16] Přehled prací, které se zabývají problémem minimální kostry grafu do roku 1985 je zpracován v článku „On the history of the minimum spanning tree problem“ autorů R. L. Grahama a P. Hella (viz. [7]).

## 2.2 Algoritmy pro hledání minimální kostry grafu

V této sekci nahlédneme na jednotlivé algoritmy pro vyhledávání minimální kostry grafu. Postupně představíme Borůvkův, Jarníkův a Kruskalův algoritmus. Jejich postup aplikujeme na jednoduchých příkladech. V závěru této kapitoly jsou tyto algoritmy porovnány.

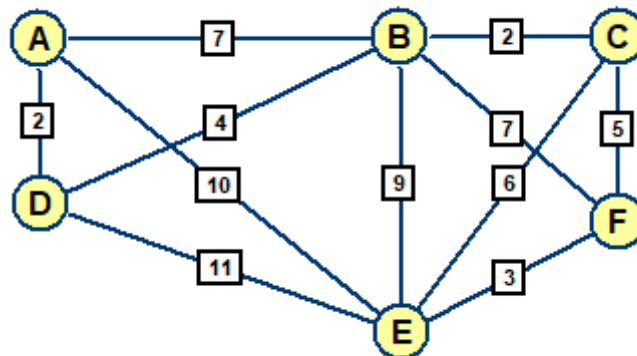
## 2.2.1 Borůvkův algoritmus

Nechť je dán souvislý ohodnocený graf  $G = (V, H)$  s  $n$  vrcholy a  $m$  hranami, jehož každá hrana je neobarvená. Necht' hrany mají navzájem různá ohodnocení a necht' každý vrchol grafu představuje zelený strom, tj. uvažujeme zelený les, který je složený z  $n$  zelených stromů.

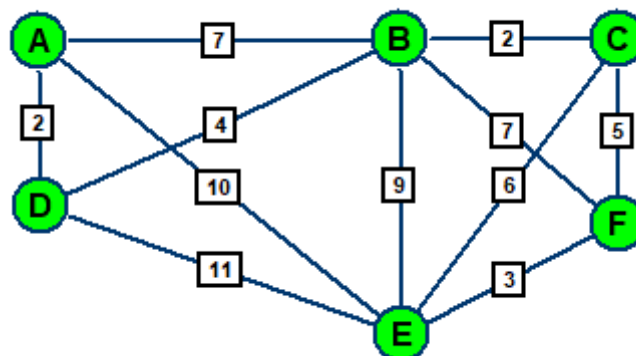
Pro každý zelený strom najdeme mezi všemi hranami, jejichž jeden vrchol leží v uvažovaném stromu a druhý nikoliv, hranu s nejmenším ohodnocením a obarvíme ji zeleně. Tím získáme nový zelený les. Celý algoritmus funguje, dokud zelené hrany netvoří jeden zelený strom, tj. minimální kostru grafu. [17]

Tento algoritmus by se také mohl nazývat bublinkový, pokud graf  $G$  pokryjeme souborem bublinek (kterých je jak borůvek v lese). Mezi bublinkami se pak snažíme nalézt nejkratší spojení, které vede k tomu, že se bublinky spojí v jednu. [15]

Nyní aplikujeme algoritmus na jednoduchém příkladu. Mějme fiktivní síť, která má 6 vrcholů a ohodnocené hrany (viz obrázek 8). Chceme nalézt minimální kostru grafu.



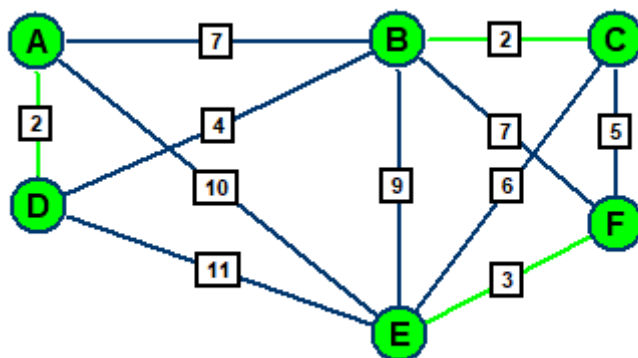
Obrázek 8. Borůvkův algoritmus – fiktivní příklad (Zdroj: vlastní – zpracováno na základě [4])



Obrázek 9. Borůvkův algoritmus – 0. krok (Zdroj: vlastní – zpracováno na základě [4])

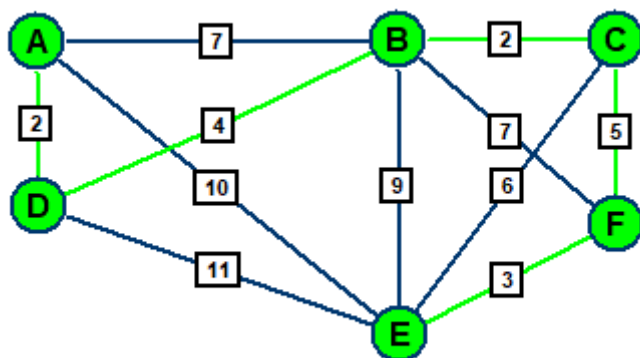
Nejprve barevně označíme všech  $n$  vrcholů, v tomto případě 6 vrcholů (obrázek 9).

V první iteraci (obrázek 10) zvolíme pro každý vrchol hranu s nejnižším ohodnocením, která z něj vede, a obarvíme ji. Pro vrchol A vybereme hranu AD, stejně tak pro vrchol D vybereme hranu AD. Dále pro vrcholy B a C vybereme hranu BC a pro vrcholy E a F hranu EF.



Obrázek 10. Borůvkův algoritmus – 1. krok (Zdroj: vlastní – zpracováno na základě [4])

V druhé iteraci (obrázek 11) je vybrána opět hrana s nejmenším ohodnocením, která vede z obarvené komponenty někam ven. Pro komponentu {A;D} vybereme hranu DB, pro komponentu {B;C} také hranu DB a pro komponentu {E;F} hranu CF.



Obrázek 11. Borůvkův algoritmus – 2. krok (Zdroj: vlastní – zpracováno na základě [4])

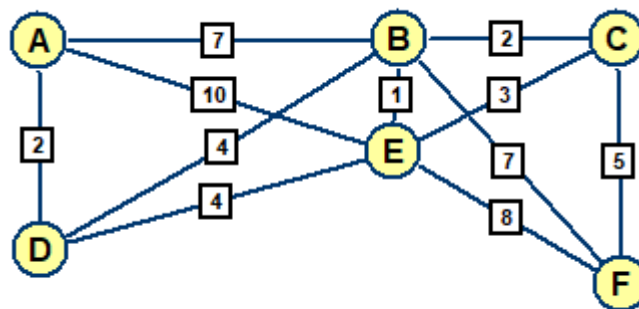
Tím jsme získali minimální kostru tohoto grafu a součet jejích hranových ohodnocení je  $2+4+2+5+3 = 16$ .

## 2.2.2 Jarníkův algoritmus

Název „Jarníkův algoritmus“ anglickému ani americkému čtenáři nic neřekne, neboť se v těchto zemích uchytil jako algoritmus Primův, i když Primova práce vznikla až v roce 1957. [15]

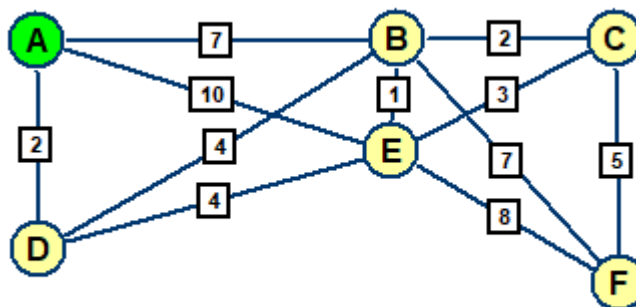
Nechť je dán souvislý ohodnocený graf  $G = (V, H)$  s  $n$  vrcholy a  $m$  hranami. Nechť je každá hrana grafu  $G$  neobarvená. Provedeme výběr libovolného vrcholu, který budeme považovat za zelený strom. V každé iteraci obarvíme zeleně takovou hranu, která má minimální ohodnocení a zároveň jeden vrchol leží v zeleném stromu a druhý nikoliv. Musí být zvolena taková hrana, aby jejím obarvením nevznikla kružnice. Existuje-li takovýchto hran více, vybereme libovolnou z nich. Algoritmus končí získáním zeleného stromu, tj. po  $(n - 1)$  krocích. Tím jsme získali minimální kostru grafu  $G$ . [17]

Algoritmus opět aplikujeme na jednoduchém příkladu fiktivní sítě s 6 vrcholy (viz obrázek 12).



Obrázek 12. Jarníkův algoritmus – fiktivní příklad (Zdroj: vlastní – zpracování na základě [4])

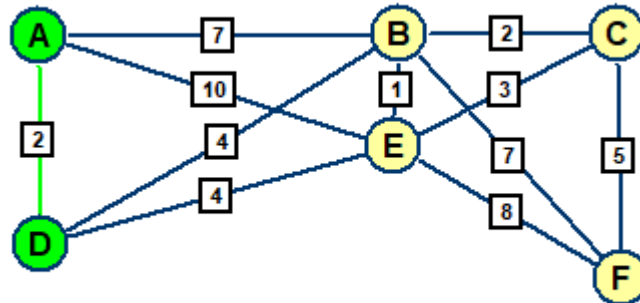
Nejprve libovolně zvolíme počáteční vrchol, například můžeme jít podle abecedy, tedy vybereme vrchol A (obrázek 13).



Obrázek 13. Jarníkův algoritmus – 0. krok (Zdroj: vlastní – zpracováno na základě [4])

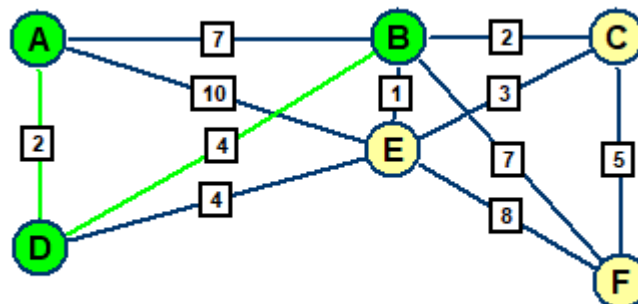


V prvním kroku hledáme hranu s nejmenším ohodnocením, která vede z vrcholu A do libovolného neobarveného vrcholu. Pro vrchol A to je hrana AD, kterou obarvíme spolu s vrcholem D (obrázek 14).



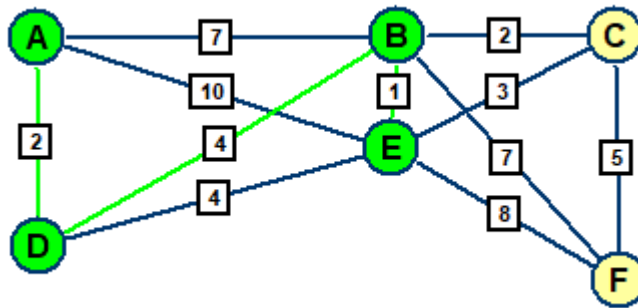
Obrázek 14. Jarníkův algoritmus – 1. krok (Zdroj: vlastní – zpracováno na základě [4])

V druhém kroku opět hledáme hranu s nejmenším ohodnocením, která spojuje některý z obarvených vrcholů s vrcholem doposud neobarveným. Z vrcholu A vedou hrany s ohodnocením 7 a 10, z vrcholu D dvě hrany s ohodnocením 4. Vycházíme tedy z vrcholu D. Vzhledem k tomu, že nejmenší ohodnocení je u dvou hran stejné (hrany DB a DE), vybereme libovolnou z nich a obarvíme ji. Zvolíme hranu DB (obrázek 15).



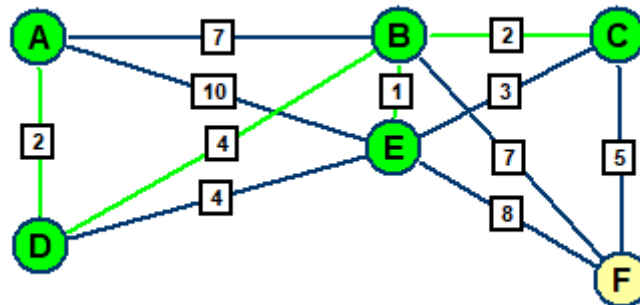
Obrázek 15. Jarníkův algoritmus – 2. krok (Zdroj: vlastní – zpracováno na základě [4])

Dále již pokračujeme stejně. Opět chceme nalézt hranu s nejmenším ohodnocením, která spojuje obarvený vrchol s neobarveným. Možnosti jsou: AE s ohodnocením 10, DE s ohodnocením 4, BE s ohodnocením 1, BC s ohodnocením 2 a BF s ohodnocením 7. Nejnižší ohodnocení má tedy hrana BE, kterou obarvíme (obrázek 16).



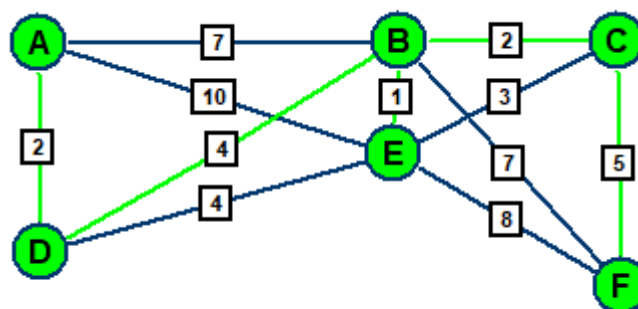
Obrázek 16. Jarníkův algoritmus – 3. krok (Zdroj: vlastní – zpracováno na základě [4])

Ve čtvrtém kroku se obarví hrana BC s ohodnocením 2 (obrázek 17).



Obrázek 17. Jarníkův algoritmus – 4. krok (Zdroj: vlastní – zpracováno na základě [4])

V pátém kroku pak dobarvíme poslední neobarvený vrchol *F* a hranu z něj vycházející s nejmenším ohodnocením *CF* (obrázek 18).



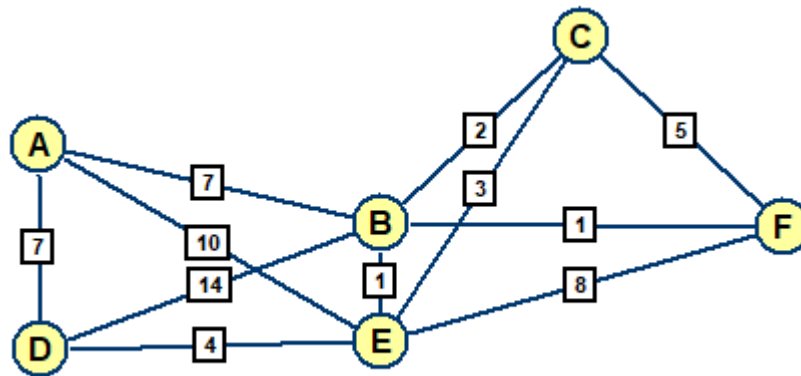
Obrázek 18. Jarníkův algoritmus – 5. krok (Zdroj: vlastní – zpracováno na základě [4])

Tím jsme získali minimální kostru grafu a součet jejích hranových ohodnocení je  $2+4+1+2+5 = 14$ .

### 2.2.3 Kruskalův „hladový“ algoritmus

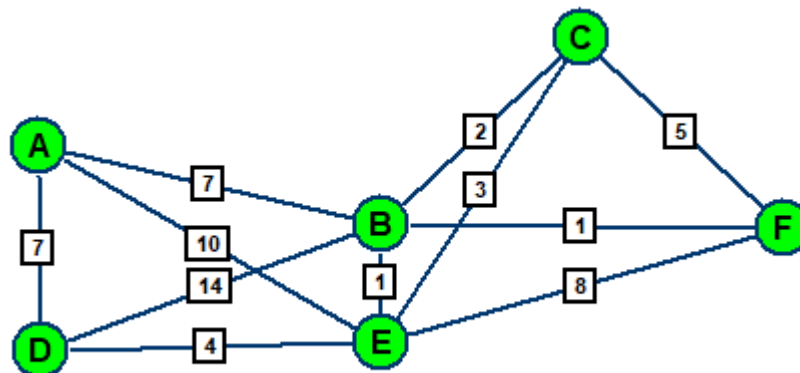
Nechť je dán souvislý ohodnocený graf  $G = (V, H)$  s  $n$  vrcholy a  $m$  hranami. Uspořádáme si vzestupně hrany grafu podle jejich ohodnocení. Každý vrchol grafu považujeme za zelený strom. Následující krok opakujeme, dokud nezískáme minimální kostru grafu. Mezi všemi doposud neobarvenými hranami nalezneme takovou hranu s nejmenším ohodnocením, aby nevytvářela kružnice s již obarvenými hranami. Algoritmus končí získáním zeleného stromu, tj. po  $(n - 1)$  krocích, čímž jsme získali minimální kostru grafu  $G$ . [11]

Kruskalův hladový algoritmus aplikujeme opět na fiktivní síti s 6 vrcholy (viz obrázek 19).



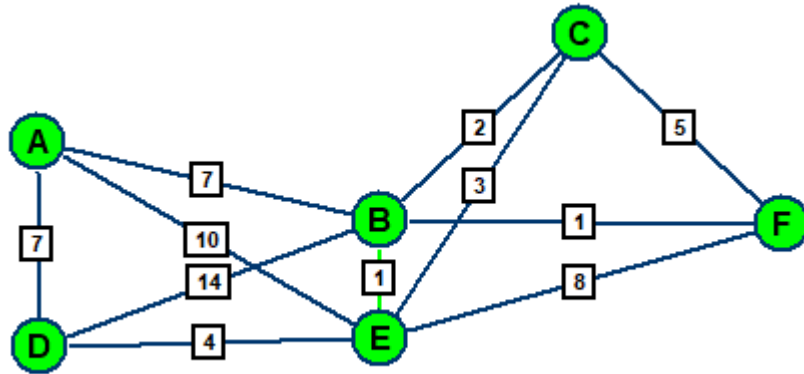
Obrázek 19. Kruskalův algoritmus – fiktivní příklad (Zdroj: vlastní – zpracováno na základě [4])

Nejprve barevně označíme všech  $n$  vrcholů, v tomto případě 6 vrcholů (obrázek 20).



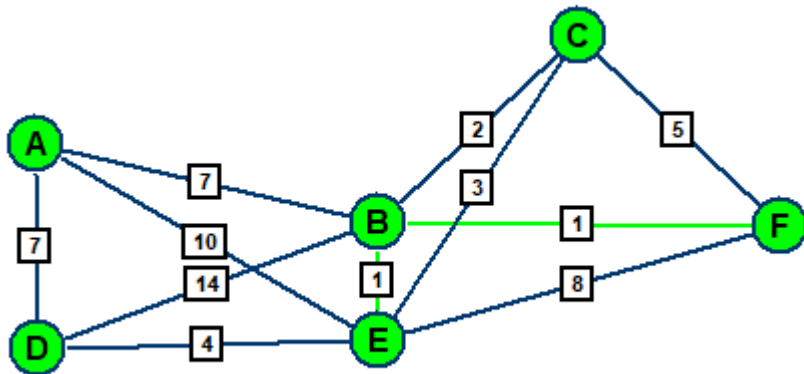
Obrázek 20. Kruskalův algoritmus – 0. krok (Zdroj: vlastní – zpracování na základě [4])

Nyní uspořádáme ohodnocení hran podle velikosti:  $1 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 7 \leq 7 \leq 8 \leq 10 \leq 14$ . V prvním kroku máme na výběr ze dvou nejméně ohodnocených hran (BE a BF), vybereme libovolnou z nich a obarvíme ji. Zvolíme hranu BE (obrázek 21).



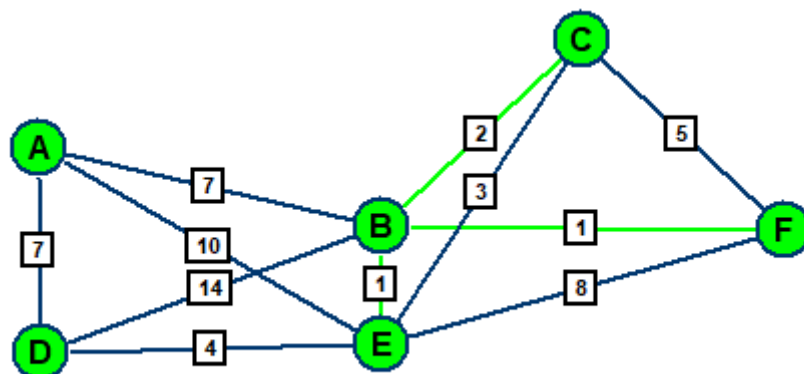
Obrázek 21. Kruskalův algoritmus – 1. krok (Zdroj: vlastní – zpracování na základě [4])

Stále nám zůstává hrana BF s ohodnocením 1. Tuto hranu obarvíme v druhém kroku, neboť jejím obarvením nevznikne kružnice (obrázek 22).



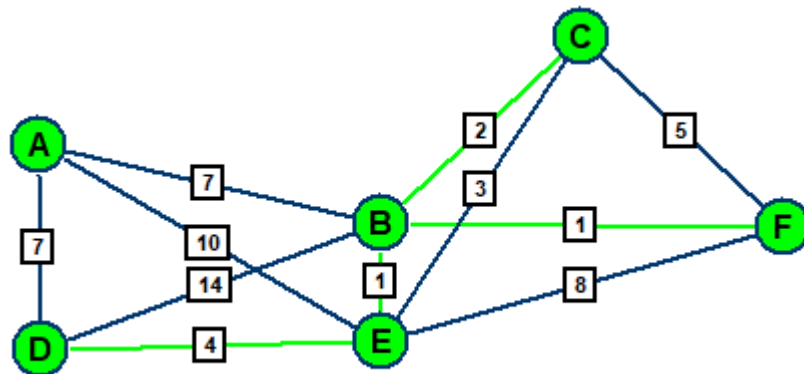
Obrázek 22. Kruskalův algoritmus – 2. krok (Zdroj: vlastní – zpracování na základě [4])

Další doposud neobarvená hrana s nejmenším ohodnocením je hrana BC (obrázek 23).



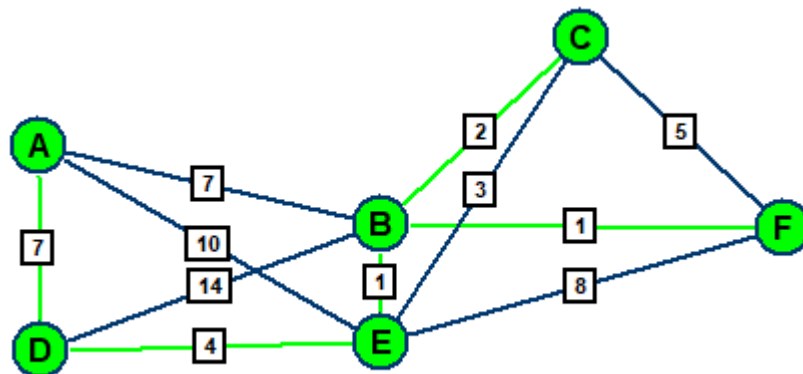
Obrázek 23. Kruskalův algoritmus – 3. krok (Zdroj: vlastní – zpracování na základě [4])

Dále je v pořadí nejméně ohodnocená hrana CE, ale jejím obarvením by vznikla kružnice. Tedy ji vynecháme a v dalším kroku obarvíme hranu DE s ohodnocením 4 (obrázek 24).



Obrázek 24. Kruskalův algoritmus – 4. krok (Zdroj: vlastní – zpracování na základě [4])

Nyní nám zbývá propojit poslední vrchol, vrchol A. Zde vidíme, že jsou dvě hrany se stejným nejmenším ohodnocením (hrana AD a AB) a ani jedna by svým obarvením nevytvořila kružnici, tedy volíme libovolnou z nich. Zvolíme hranu AD (obrázek 25).



Obrázek 25. Kruskalův algoritmus – 5. krok (Zdroj: vlastní – zpracování na základě [4])

Tím jsme získali minimální kostru grafu se součtem jejích hranových ohodnocení  $1+1+2+4+7 = 15$ .

## 2.2.4 Porovnání algoritmů

Borůvkův algoritmus byl historicky prvním postupem pro řešení minimální kostry grafu, a proto se tento postup zdá být nejsložitější. Algoritmus je ale velmi rychlý, protože v každém kroku dochází ke spojení všech navzájem si nejbližších zelených stromů, tedy počet komponent lesa se každým krokem zmenšuje minimálně o polovinu. Počet kroků bude tedy maximálně  $\log_2 n$ . Borůvkův algoritmus se stal koncepčním základem pro rychlejší algoritmy na hledání minimální kostry a funguje za předpokladu různého ohodnocení hran. [5]

Jarníkův a Kruskalův algoritmus v každém kroku spojuje právě dva nejbližší stromy v jeden strom. U Jarníkova algoritmu se v každém kroku rozšiřuje jediný zelený strom o nejbližší vrchol. U Kruskalova algoritmu jsou tyto dva spojované stromy určeny pořadím hranového ohodnocení. [16]

## 2.3 Problém obchodního cestujícího

Hledání minimální kostry grafu je v mnohých úlohách pouze součástí celkového řešení. Takovou úlohou může být například problém obchodního cestujícího, který si představíme v této kapitole. Čerpáno je z [13], [14] a [19].

Problém obchodního cestujícího je řešen již od pradávna, kdy se stejnou myšlenkou nevědomky zabývali pravěcí lovci. Prvním známým problémem, který by se dal zařadit k problému obchodního cestujícího, je procházka jezdce po šachovnici, kdy má jezdec navštívit všechna pole šachovnice o velikosti  $8 \times 8$  právě jednou. Touto problematikou se začal v 18. století zabývat švýcarský matematik Leonhard Euler. Dalším slavným matematikem, který problém zkoumal v 19. století, byl W. R. Hamilton. V této době vznikly pojmy hamiltonovská cesta a hamiltonovský cyklus. Ve 20. století se začaly objevovat různé metodiky řešení problému obchodního cestujícího, ve třicátých letech problém poštovního doručovatele, ve čtyřicátých letech se již problém řešil pod nyní používaným názvem – traveling salesman problem (problém obchodního cestujícího).

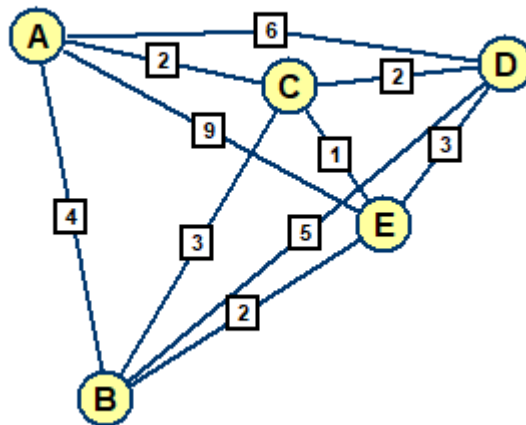
Základním principem úlohy obchodního cestujícího je projít všechna uvažovaná místa právě jednou a následně se vrátit do místa výchozího tak, aby byla uražena co nejkratší vzdálenost. Bude se tedy hledat uzavřená cesta, která obsahuje všechny vrcholy grafu. Tato optimalizační úloha má velké uplatnění v reálných aplikacích. Jak již bylo zmíněno, řešením tohoto problému se zabývalo mnoho vědců. Představeny jsou zde dvě metody, které ve svém algoritmu hledají minimální kostru grafu.

### 2.3.1 Metoda zdvojení minimální kostry

Jednou z metod, jak problém obchodního cestujícího vyřešit, je metoda zdvojení minimální kostry (Double tree heuristic). Již z názvu je patrné, že se při ní hledá minimální kostra grafu. Avšak tady navíc musíme postup upravit tak, abychom získali uzavřenou cestu.

Uvažujme úplný ohodnocený graf  $G = (V, H)$ . Nejprve se nalezne minimální kostra grafu  $G$  pomocí některého z výše zmíněných algoritmů. Následně se zdvojí její hrany, čímž získáme graf, jehož vrcholy jsou sudého stupně. Toto je nutná a postačující podmínka pro existenci eulerova tahu. V posledním kroku algoritmu se musí transformovat na hamiltonovský cyklus tak, že vynecháme ty vrcholy, které se v posloupnosti vrcholů eulerova tahu již vyskytly. Jsou vynechány ty části této posloupnosti, které začínají i končí ve stejném vrcholu.

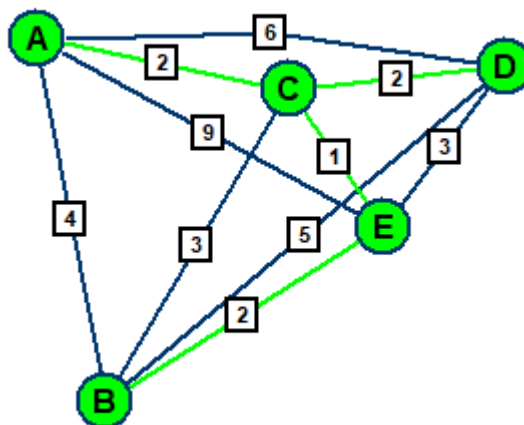
Tento postup znázorníme na vzorovém příkladu. Mějme úplný graf  $G$  (viz obrázek 26).



Obrázek 26. 0. krok – metoda zdvojení minimální kostry grafu  
(Zdroj: vlastní)

### 1. krok – nalézt minimální kostru grafu

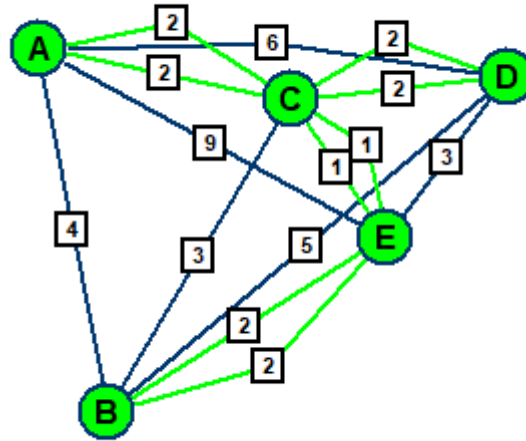
Zvolíme Borůvkův algoritmus pro nalezení minimální kostry grafu. Postup je stejný jako v kapitole 2.2.1. Získaná minimální kostra má celkové ohodnocení 7 a je znázorněna na obrázku 27.



Obrázek 27. 1. krok – metoda zdvojení minimální kostry grafu  
(Zdroj: vlastní)

## 2. krok – zdvojit všechny hrany kostry

Nejprve zdvojíme všechny hrany, které tvoří minimální kostru grafu (viz obrázek 28).



Obrázek 28. 2. krok – metoda zdvojení minimální kostry grafu  
(Zdroj: vlastní)

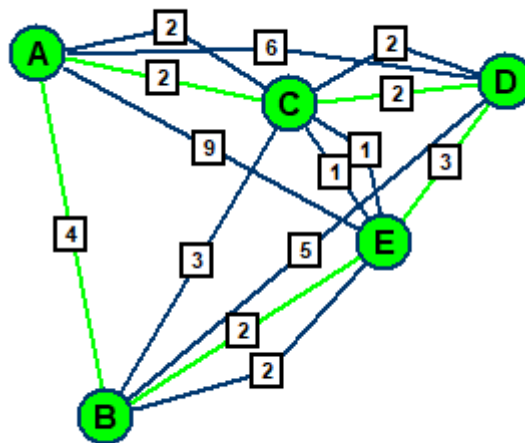
Zvolíme výchozím vrcholem například vrchol A. Od tohoto vrcholu postupně procházíme hranami zdvojeného grafu. Vždy vynecháme vybranou hranu a pokračujeme některou navazující hranou. Tedy z vrcholu A jdeme do vrcholu C a jednu hranu AC obarvíme. Nyní jsou tři možnosti, kam pokračovat z vrcholu C – do A (neboť ještě jedna hrana AC nebyla obarvena), D nebo E. Vzhledem k tomu, že v A má algoritmus končit, ale ještě jsme neprošli všechny vrcholy, druhou neobarvenou hranu AC ne zvolíme.

Pokračovat je možné například do vrcholu D, tedy obarvíme jednu hranu CD. Z vrcholu D vede jen jediná neobarvená hrana, a to zpět do vrcholu C. Z vrcholu C je možné jít nyní do vrcholu A nebo E. Stále jsme neprošli všechny vrcholy, a tedy volíme hranu CE. Takto by se pokračovalo dál. Eulerův tah je nalezen, pokud jsou všechny hrany zařazeny právě jednou, a tedy posloupnost vrcholů by byla takováto: A-C-D-C-E-B-E-C-A.

## 3. krok – vytvoření hamiltonova cyklu



Hamiltonův cyklus se vytvoří tak, že z eulerova tahu vynecháme ty vrcholy, které se již v posloupnosti vrcholů vyskytly. Z vrcholu A jdeme do vrcholu C, protože vrchol C se ještě v posloupnosti nevyskytl. Z C můžeme jít do D, ale zpět do C již jít nejde, protože ve vrcholu C jsme již byli. Z D tedy půjdeme rovnou do E, z E do B, ale jít zpět opět není možné. Již jsou obarvené všechny vrcholy, tedy je třeba se vrátit do výchozího vrcholu, aby byl hamiltonův cyklus utvořen. Výsledná posloupnost vrcholů tedy bude: A-C-D-E-B-A a celková délka hamiltonova cyklu je  $2+2+3+2+4=11$ .



Obrázek 29. 3. krok – metoda zdvojení minimální kostry grafu  
(Zdroj: vlastní)

Obrázek 29 znázorňuje jen jedno z možných řešení tvorby cyklu, protože výsledek je závislý na volbě počátečního vrcholu. Nejhorší možný výsledek této metody je

$$\frac{\text{délka hamiltonovského cyklu získaného metodou zdvojení minimální kostry}}{\text{délka nejkratšího hamiltonovského cyklu v grafu}} < 2.$$

Časová náročnost algoritmu je  $n^2$  a průměrná kvalita výsledku okolo 38 %.

### 2.3.2 Christofidova metoda

Další metodou pro nalezení optimálního řešení problému obchodního cestujícího s využitím minimální kostry grafu je Christofidova metoda. Postup konstrukce je podobný jako u metody zdvojení minimální kostry. Je uvažován úplný ohodnocený graf  $G = (V, H)$ . V prvním kroku se nalezne minimální kostra grafu. Tentokrát se ale nezdvojnásobují hrany, ale naleznou se vrcholy lichého stupně. Ty se spojí pomocí metody nejlevnějšího perfektního párování (postup této metody je naznačen v následujícím odstavci). Získané hrany jsou přidány k minimální kostře grafu. Tak vznikne eulerův tah. Vrcholů s lichým stupněm má kostra vždy

sudý počet, a proto je možné párování vždy nalézt. Poté je již postup transformace na hamiltonův cyklus stejný, jako tomu bylo u metody zdvojení minimální kostry.

Metodou perfektního párování s minimálními náklady je myšleno hledání optimálního řešení přiřazovacího problému. Tento model je možné vyjádřit jako

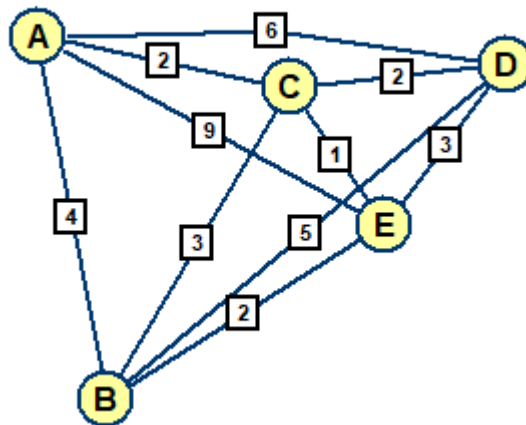
$$\min z = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{j-1} x_{ij} + \sum_{k=j+1}^m x_{jk} = 1,$$

kde  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $x_{ij}$  nabývá hodnot 0 nebo 1,  $j = i + 1, i + 2, \dots, m$ ,  $m$  značí počet vrcholů lichého stupně a  $c_{ij}$  značí vzdálenost  $i$ -tého a  $j$ -tého vrcholu lichého stupně. Hrana  $\{v_i, v_j\}$  bude přidána k minimální kostře, pokud  $x_{ij}$  nabývá hodnotu 1. V opačném případě tato hrana uvažována nebude. Takto postupně vznikne požadovaný eulerův tah.

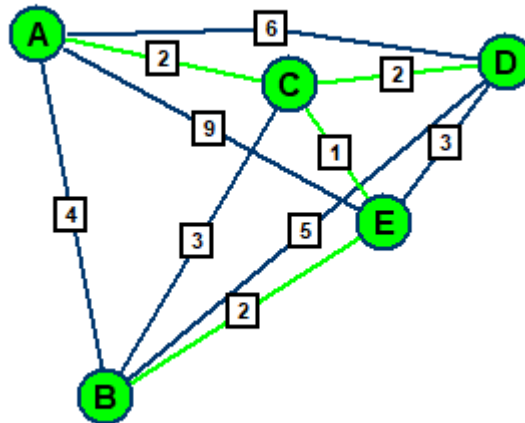
Nyní znázorníme popsany postup na stejném vzorovém příkladu. Mějme úplný graf  $G$  (viz obrázek 30).



Obrázek 30. 0. krok – Christofidova metoda (Zdroj: vlastní)

1. krok – nalézt minimální kostru grafu

Opět pomocí Borůvkova algoritmu nalezneme minimální kostru grafu (viz obrázek 31).



Obrázek 31. 1. krok – Christofidova metoda (Zdroj: vlastní)

2. krok – určení vrcholů lichého stupně a jejich spojení pomocí metody nejlevnějšího perfektního párování

Vrcholy lichého stupně jsou v tomto případě čtyři – vrcholy A, B, C a D, tedy  $m = 4$ .

$$\min z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 c_{ij}x_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{j-1} x_{ij} + \sum_{k=j+1}^4 x_{jk} = 1.$$

Minimalizujeme tedy rovnici:

$$\min z = c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{34}x_{34}$$

za podmínek

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1,$$

$$x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1,$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1.$$

Pro lepší orientaci nahradíme číselné označení názvy vrcholů

$$\min z = c_{AB}x_{AB} + c_{AC}x_{AC} + c_{AD}x_{AD} + c_{BC}x_{BC} + c_{BD}x_{BD} + c_{CD}x_{CD}$$

a doplníme ohodnocení hran

$$\min z = 4x_{AB} + 2x_{AC} + 6x_{AD} + 3x_{BC} + 5x_{BD} + 2x_{CD}$$

za podmínek

$$x_{AB} + x_{AC} + x_{AD} = 1,$$

$$x_{AB} + x_{BC} + x_{BD} = 1,$$

$$x_{AC} + x_{BC} + x_{CD} = 1,$$

$$x_{AD} + x_{BD} + x_{CD} = 1.$$

Postup výpočtu:

1. Zvolíme-li  $x_{AB} = 1$ .

$$1 + x_{AC} + x_{AD} = 1 \rightarrow x_{AC} + x_{AD} = 0 \rightarrow x_{AC} = x_{AD} = 0,$$

$$1 + x_{BC} + x_{BD} = 1 \rightarrow x_{BC} + x_{BD} = 0 \rightarrow x_{BC} = x_{BD} = 0,$$

$$0 + 0 + x_{CD} = 1 \rightarrow x_{CD} = 1.$$

Dosazením do rovnice získáme

$$z_1 = 4 * 1 + 2 * 0 + 6 * 0 + 3 * 0 + 5 * 0 + 2 * 1 = 4 + 2 = 6.$$

2. Zvolíme-li  $x_{AC} = 1$ .

$$x_{AB} + 1 + x_{AD} = 1 \rightarrow x_{AB} + x_{AD} = 0 \rightarrow x_{AB} = x_{AD} = 0,$$

$$1 + x_{BC} + x_{CD} = 1 \rightarrow x_{BC} + x_{CD} = 0 \rightarrow x_{BC} = x_{CD} = 0,$$

$$0 + 0 + x_{BD} = 1 \rightarrow x_{BD} = 1.$$

Dosazením do rovnice získáme

$$z_2 = 4 * 0 + 2 * 1 + 6 * 0 + 3 * 0 + 5 * 1 + 2 * 0 = 2 + 5 = 7.$$

3. Zvolíme-li  $x_{AD} = 1$ .

$$x_{AB} + x_{AC} + 1 = 1 \rightarrow x_{AB} + x_{AC} = 0 \rightarrow x_{AB} = x_{AC} = 0,$$

$$1 + x_{BD} + x_{CD} = 1 \rightarrow x_{BD} + x_{CD} = 0 \rightarrow x_{BD} = x_{CD} = 0,$$

$$0 + x_{BC} + 0 = 1 \rightarrow x_{BC} = 1.$$

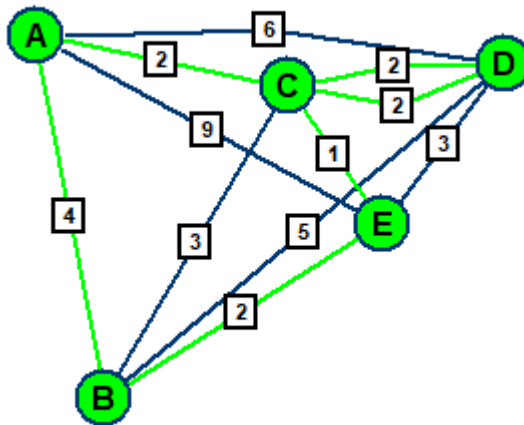
Dosazením do rovnice získáme

$$z_3 = 4 * 0 + 2 * 0 + 6 * 1 + 3 * 1 + 5 * 0 + 2 * 0 = 6 + 3 = 9.$$

Chceme ale nejlevnější perfektní párování, tedy hledáme minimum:

$$\min_{i=1,2,3} z_i = \min(6,7,9) = 6.$$

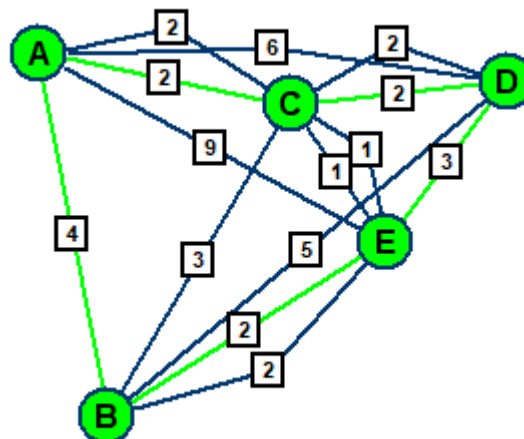
Nejlevnější perfektní párování vrcholů ABCD bude tedy takové, že spárujeme vrcholy AB a CD, a to tak, že zavedeme hranu AB a zdvojíme hranu CD (viz obrázek 32). Eulerův tah bude vypadat takto: A-C-D-C-E-B-A.



Obrázek 32. 2. krok – Christofidova metoda (Zdroj: vlastní)

### 3. krok – vytvoření hamiltonova cyklu

Nyní již jen vytvoříme hamiltonův cyklus stejně, jako tomu bylo u metody zdvojení minimální kostry grafu. Výsledný cyklus je opět: A-C-D-E-B-A (viz obrázek 33).



Obrázek 33. 3. krok – Christofidova metoda (Zdroj: vlastní)

Tato metoda zabere více času než metoda předchozí, její časová náročnost je  $n^3$ . Tedy pro složitější úlohy je opravdu velmi časově náročná. Avšak neposkytuje horší výsledek než

$$\frac{\text{délka hamilt. cyklu získaného metodou min. kostry a optimálního párování}}{\text{délka nejkratšího hamiltonovského cyklu v grafu}} < \frac{3}{2}$$

Neexistuje žádný jiný známý polynomiální algoritmus, který by zaručil tento poměr lepší než  $\frac{3}{2}$  (dle [8]).

## 2.4 Analogie základní úlohy

Existuje velké množství různých modifikací základní úlohy hledání minimální kostry grafu. V této práci jsou vybrány jen některé z nich. Tyto modifikace byly čerpány z [6] a [18].

### 2.4.1 Nejlevnější kostra s předepsaným stupněm jednoho vrcholu

Jednou z modifikací základní úlohy hledání minimální kostry grafu je hledání minimální kostry grafu, kde má jeden vrchol předem předepsaný stupeň.

Nechť je dán ohodnocený graf  $G$  a nechť  $\deg v_0 = k$  je stupeň vrcholu  $v_0$  v grafu  $G$ . Hledáme minimální kostru grafu, ve které má vrchol  $v_0$  stupeň  $k$ . Takovýto požadavek může vzniknout třeba při konstrukci různých sítí. Například u počítačové sítě bychom mohli požadovat, aby měl hlavní počítač vysoký „stupeň“, protože jinak by přenos informací nemusel být vždy zabezpečen.

Algoritmus pro řešení tohoto problému je založen na několika větech, které jsou dále zmíněné.

**Věta 2.1** Necht'  $T$  a  $T'$  jsou kostry grafu  $G$ . Potom existuje takové bijektivní zobrazení  $\varphi$  množiny hran  $H(T) - H(T')$  na množinu hran  $H(T') - H(T)$ , že  $T - h - \varphi(h)$  je kostra grafu  $G$  pro každou hranu  $h \in H(T) - H(T')$ .

Dále označíme  $H_0$  množinu hran grafu  $G$ , které jsou incidentní s vrcholem  $v_0$ , a její prvky budou mít vždy index 0. Kostra  $T$  se nazývá přípustná, pokud obsahuje právě  $k$  hran z množiny  $H_0$ .

**Věta 2.2** Necht' je dán graf  $G$  a jeho kostra  $T$ . Dále nechť jsou dány hrany  $h_0, h \in T$  a  $h'_0, h' \in G - T$ . Potom pokud ani jeden z grafů  $T + h' - h$  a  $T + h'_0 - h_0$  není kostrou grafu  $G$ , pak jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní.

a)  $T + h' - h_0$  a  $T + h'_0 - h$  jsou kostry.

b)  $T + h' + h'_0 - h - h_0$  je kostra.

Nechť je dána kostra  $T$  grafu  $G$ . Hrany  $h \in T$  a  $h' \notin T$  jsou zaměnitelné, pokud  $T - h - h'$  je kostra grafu  $G$ .

**Věta 2.3** Přípustná kostra  $T$  není optimální pro nalezení minimální kostry s předepsaným stupněm jednoho vrcholu právě tehdy, když je splněna alespoň jedna z následujících třech podmínek:

a) Pro kostru  $T$  grafu  $G$  existuje záměnná dvojice hran  $(h, h')$  taková, že délka hrany  $h'$  je menší než délka hrany  $h$ , tzn. že  $T + h' - h$  je nejlevnější přípustná kostra.

b) Pro kostru  $T$  grafu  $G$  existuje záměnná dvojice hran  $(h_0, h'_0)$  taková, že délka hrany  $h'_0$  je menší než délka hrany  $h_0$ , tzn. že  $T + h'_0 - h_0$  je nejlevnější přípustná kostra.

c) Neplatí-li ani a) ani b) a existují-li hrany  $h, h_0 \in T$  a  $h', h'_0 \notin T$  takové, že každé dvojice hran  $(h_0, h')$ ,  $(h, h'_0)$  jsou pro kostru  $T$  záměnné a součet délek hran  $h'$  a  $h'_0$  je menší než součet délek hran  $h$  a  $h_0$ . Pak ekvivalentně neplatí a) ani b) a  $T + h' + h'_0 - h - h_0$  je nejlevnější přípustná kostra.

**Věta 2.4** Nechť  $T$  je optimální kostra při hledání minimální kostry grafu s předepsaným stupněm jednoho vrcholu  $k$ .

1) Nechť jsou dány hrany  $h \in T$  a  $h'_0 \notin T$  takové, že  $T' := T + h'_0 - h$  je kostra. Pokud je rozdíl délek hran  $h'_0$  a  $h$  minimální, pak je  $T'$  optimální kostra při hledání minimální kostry grafu s předepsaným stupněm vrcholu  $k + 1$ .

2) Nechť jsou dány hrany  $h_0 \in T$  a  $h' \notin T$  takové, že  $T' := T + h' - h_0$  je kostra. Pokud je rozdíl délek hran  $h'$  a  $h_0$  minimální, pak je  $T'$  optimální kostra při hledání minimální kostry grafu s předepsaným stupněm vrcholu  $k - 1$ .

Pro důkazy těchto vět odkážeme čtenáře například na [18].

Na základě věty 2.4 je možné sestavit algoritmus pro řešení problému hledání minimální kostry grafu  $G$  s předepsaným stupněm  $k$  vrcholu  $v_0$ . Nejprve nalezneme minimální kostru  $T$  grafu  $G$  pomocí některého z algoritmů zmíněných v kapitole 2.2. Nechť  $deg_T(v_0) = s$ . Pokud je  $s < k$ , aplikujeme větu 2.4 část 1)  $(k - s)$ -krát a tím získáme hledanou optimální kostru. Pokud je  $s > k$ , pak aplikujeme větu 2.4 část 2)  $(s - k)$ -krát a tím získáme hledané optimum.

Z důvodu rozsahu této práce není možné se více touto problematikou zabývat, pro více informací můžeme čtenáře odkázat například na [6].

### 2.4.2 Kostra s minimálním poměrem dvou ohodnocení

Tato úloha je další možnou modifikací základního problému nalezení minimální kostry grafu. Z důvodu rozsahu práce zmíníme pouze hlavní myšlenku tohoto problému. Zájemce o tento problém odkážeme například na [18], odkud je tato podkapitola čerpána.

Nechť je dán graf  $G$  takový, že každá hrana  $h \in H(G)$  má dvě ohodnocení  $a_h$  a  $b_h$ . Úkolem je nalézt kostru  $T$  grafu  $G$ , která minimalizuje poměr  $\sum_{h \in T} a_h / \sum_{h \in T} b_h$ . Příklad využití této modifikace může být takovýto: Při konstrukci elektrického zařízení chceme propojit  $n$  svorek do souvislé sítě. Za toto propojení získáme  $p$  korun. Vodič, který spájí svorky  $i$  a  $j$ , stojí  $c_{ij}$  korun a instalace trvá  $t_{ij}$  časových jednotek. Za předpokladu, že takovýchto zařízení chceme vyrábět mnoho, bude kladen požadavek na maximalizaci průměrného zisku za časovou jednotku. Optimální propojení samozřejmě musí být kostrou a pokud pro hranu  $h_{ij}$  položíme  $a_{h_{ij}} := c_{h_{ij}} - \frac{p}{n-1}$  a  $b_{h_{ij}} := t_{h_{ij}}$ , pak získáváme hledané řešení.

### 2.4.3 Nejlevnější steinerovský strom

Poslední modifikací pro hledání minimální kostry, kterou zmíníme, je nejlevnější steinerovský strom. Opět byla tato problematika čerpána z [18], kam odkazujeme pro více podrobností.

Tato metoda pochází z 19. století, kdy Jakob Steiner vyřešil následující problém. Nechť jsou dány tři body v rovině –  $A$ ,  $B$  a  $C$ . Tyto body chceme spojit nejkratší možnou spojovací sítí. Každá spojovací síť má tvar „stromu“ a proto se metoda nazývá nejlevnější steinerovský strom. Postupem času se objevovala zevšeobecnění tohoto problému pro více bodů či v  $n$ -rozměrném eukleidovském prostoru.

Dále je zmíněna základní myšlenka této metody. Nechť je dán souvislý graf  $G$ . Pro danou množinu tzv. základních vrcholů  $B \subseteq V(G)$  je třeba nalézt nejlevnější strom  $T \subseteq G$ , který obsahuje množinu  $B$ . Libovolný souvislý podgraf  $H \subseteq G$  obsahující množinu  $B$  se nazývá steinerovský podgraf. Je-li  $H$  strom, pak se nazývá steinerovský strom. Steinerovský strom může kromě základních vrcholů obsahovat i jiné vrcholy, tzv. steinerovské. Platí-li v nějakém cyklu  $Z$  grafu  $G$ , že délka hrany  $h \in Z$  je větší než délka  $Z - h$ , pak hranu  $h$  nikdy nepoužijeme v optimálním steinerovském stromě, a tedy ji můžeme úplně vynechat.



## 2.4.4 Maximální kostra grafu

Ač se s kostrou grafu častěji spojuje hledání minimální kostry grafu, může se v některých aplikacích požadovat nalezení kostry maximální. Maximální kostra grafu je souvislý podgraf, jehož celkové ohodnocení hran je maximální.

Pro nalezení maximální kostry je možné využít i algoritmy pro hledání minimální kostry grafu, kdy na začátku změníme znaménko ohodnocení hran na opačné (kladné na záporné). Dále již postupujeme stejně jako kdybychom hledali minimální kosteru grafu. Po nalezení této kostry opět otočíme znaménko a máme nalezenou maximální kosteru grafu.

Další možností je upravit Kruskalův algoritmus tak, že hrany na začátku seřadíme sestupně. Nejprve tedy do kostry přidáváme hranu s největším ohodnocením, poté s druhým největším ohodnocením atd. [10]

Příkladem aplikace maximální kostry grafu může být situace, kdy vrcholy grafu znázorňují produkty v obchodě a ohodnocení hran nabývá hodnot od 0 do 1. Nula znamená, že produkty spojené touto hranou nebývají kupovány společně a jedna naopak znamená, že tyto dva produkty jsou společně nakupovány vždy. Čím je tedy vyšší hodnota ukazatele mezi dvěma typy produktů, tím jsou tyto produkty kupovány častěji společně.

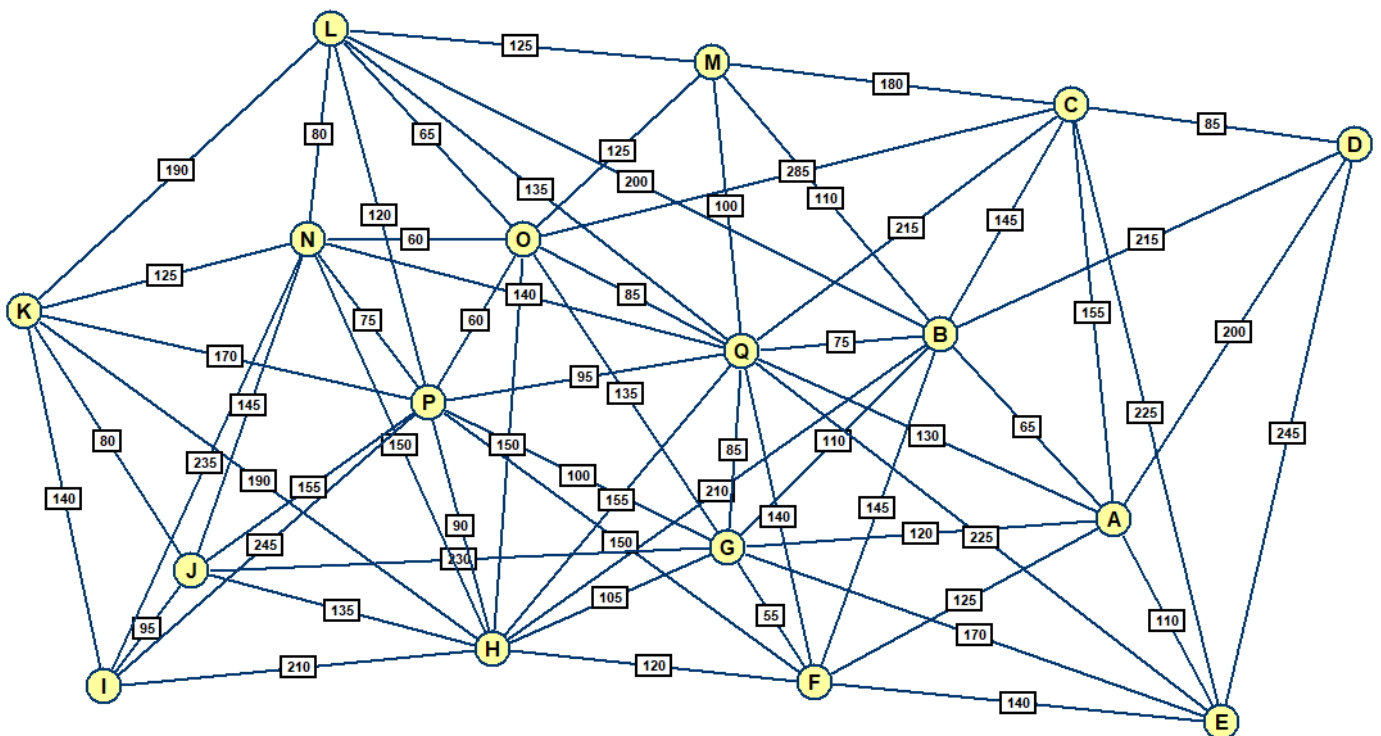
Další aplikace maximální kostry grafu by mohla být například ve skladu, kdy se bude rozhodovat o nákupu stroje, který bude převážet zboží z místa A do místa B. Existují různé široké cesty mezi těmito dvěma místy a my bychom měli rozhodnout, jaký stroj koupit, aby uvezl co nejširší náklad, který je možný alespoň jednou cestou dostat z místa A do místa B. Tedy ohodnocením hran budou šířky jednotlivých cest.

Poslední aplikací, kterou zde zmíníme, je možná kombinace hledání minimální a maximální kostry grafu. Tu představíme na jednoduchém příkladu. Představme si rozsáhlé lyžařské středisko, které má mnoho vleků a mnoho sjezdářských tratí. Budeme chtít vyjet až úplně nahoru nejkratší trasou, abychom netrávili zbytečně mnoho času na vlecích (hledáme minimální kosteru grafu) a naopak dolů chceme jet co nejdelší trasou, abychom si lyžování užili (hledáme maximální kosteru grafu).

## II. PRAKTICKÁ ČÁST

### 1 Propojení optickou sítí – využití Jarníkova algoritmu

V tomto příkladu je pomocí Jarníkova algoritmu určena nejkratší možná cesta optické sítě mezi několika domy rehabilitačního zařízení. Optická síť je potřeba pro připojení k internetu. Společnost Ariston Pardubice, spol s r.o., která data poskytla, se zabývá převážně instalací těchto kabelových rozvodů. Cílem je objevit nejkratší možnou optickou trasu, tedy aby bylo použito co nejmenší množství materiálu – kabelu. Celkem je třeba propojit 17 budov označených písmeny A až Q (viz obrázek 34), hlavní rozvod je v budově A. Vzdálenosti mezi budovami jsou uvedeny v metrech.



Obrázek 34. Optická síť (Zdroj: vlastní s pomocí [21])

Postup:

Jako výchozí bod je zvolena hlavní budova A. V první iteraci se tedy hledá hrana vycházející z tohoto bodu. Možnosti jsou:

- hrana AB o délce 65 m
- hrana AC o délce 155 m

- hrana AD o délce 200 m
- hrana AE o délce 110 m
- hrana AF o délce 125 m
- hrana AG o délce 120 m
- hrana AQ o délce 130 m

✓ nejkratší je hrana AB, která je obarvena.

V druhé iteraci se musí uvažovat doposud neobarvené hrany vycházející z vrcholu A, ale také hrany vycházející z vrcholu B:

- hrana AC o délce 155 m
- hrana AD o délce 200 m
- hrana AE o délce 110 m
- hrana AF o délce 125 m
- hrana AG o délce 120 m
- hrana AQ o délce 130 m
- hrana BC o délce 145 m
- hrana BD o délce 215 m
- hrana BF o délce 145 m
- hrana BG o délce 110 m
- hrana BH o délce 210 m
- hrana BQ o délce 75 m
- hrana BL o délce 200 m
- hrana BM o délce 110 m

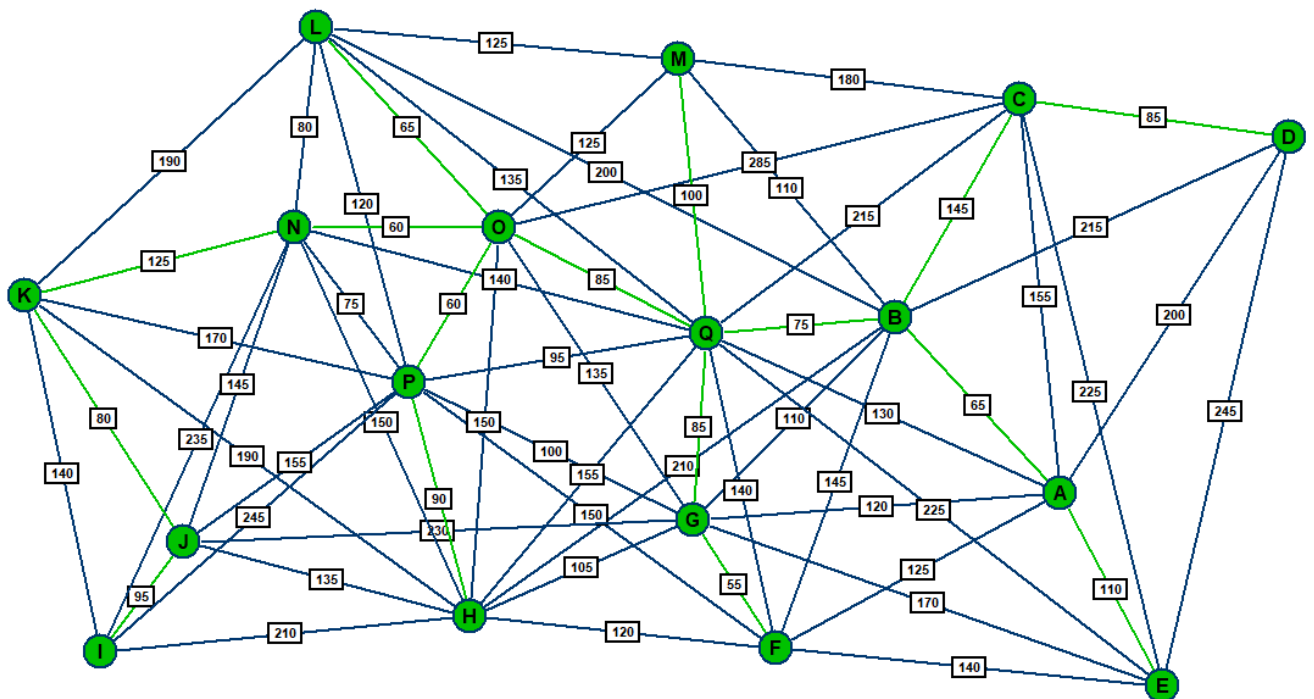
✓ nejkratší je hrana BQ, která je obarvena.

Ve třetí iteraci se hledají neobarvené hrany vycházející z vrcholu A, B či Q. Nejkratší délku 85 metrů mají dvě hrany – hrana QG a hrana QO. Je možné zvolit libovolnou z nich, zde je zvolena hrana QO.

V následujících iteracích je postup stejný. Ve čtvrté iteraci jsou opět dvě nejkratší hrany s délkou 60 metrů – hrana OP a ON, je zvolena hrana OP. V páté iteraci je stále nejkratší délka 60, tedy je vybrána hrana ON. V šesté je vybrána hrana OL o délce 65 m. V sedmé iteraci je nejkratší hrana QG o délce 85 m. V osmé je nejkratší hrana GF s délkou 55 m, v deváté hrana PH s délkou 90 m, v desáté hrana QM dlouhá 100 m, v jedenácté hrana AE o velikosti 110 m, ve dvanácté hrana NK s délkou 125 m, ve třinácté iteraci je to hrana KJ o délce 80 metrů, ve čtrnácté hrana JI o délce 95 m, v patnácté hrana BC s délkou 145 m a v poslední šestnácté iteraci je vybrána hrana CD o délce 85 m.

Jsou tedy propojeny všechny vrcholy (viz obrázek 35). K propojení všech budov bude potřeba celkem

$65+75+85+60+60+65+85+55+90+100+110+125+80+95+145+85 = 1380$  metrů kabelu.



Obrázek 35. Optická síť řešení (Zdroj: vlastní s pomocí [21])

## 2 Rozvoz mléčných výrobků – metoda zdvojení minimální kostry (využití Kruskalova algoritmu)

Společnost Mléko z farmy, kterou založili dva středočeští farmáři, dodává mléčné výrobky lidem téměř po celé republice. Tato služba je založena na principu přímého prodeje

z chladících dodávek. Každá dodávka má danou trasu se zastávkami, na kterých v daných časech probíhá prodej. Není potřeba tedy nic objednávat, ale stačí si vybrat zastávku a tam v daný čas nakoupit. [22] Jedna z jejich tras vede přes obce Chrudim a Pardubice. A právě tuto trasu jsme vybrali a pomocí metody zdvojení minimální kostry grafu spočítáme, zda jsou zastávky na této trase objížďeny minimální možnou vzdáleností.

Tato trasa má celkem 29 zastávek, tedy jejich zobrazení do grafu by bylo poměrně nepřehledné. Tabulka 1 obsahuje seznam zastávek s jejich přesnou GPS polohou:

*Tabulka 1. Seznam zastávek – Mléko z farmy (Zdroj: [22])*

Chrudim

| Číslo | Název                          | GPS                                    |
|-------|--------------------------------|--|
| 1     | Tovární 290                    | N: 49.956807298136, E: 15.802722098148 |
| 2     | Masarykovo náměstí             | N: 49.952827330861, E: 15.788792414122 |
| 3     | Fontinova – V Tejnecku         | N: 49.948087798803, E: 15.80093868728  |
| 4     | Budovatelů (u domu č.p. 91)    | N: 49.945825608264, E: 15.806044298811 |
| 5     | Václavská (u domu č.p. 1091)   | N: 49.936725034897, E: 15.813915413414 |
| 6     | Na Větrníku (u domu č.p. 1295) | N: 49.955580024161, E: 15.814089773541 |
| 7     | Malecká (u domu č.p. 221)      | N: 49.955797, E: 15.810451             |
| 8     | Na Šancích (u domu č.p. 1182)  | N: 49.951512501512, E: 15.816227046033 |
| 9     | Družstevní – Topolská          | N: 49.951123, E: 15.809087             |
| 10    | Bohuslava Martinů – Škroupova  | N: 49.946553, E: 15.791682             |

Pardubice

| Číslo | Název                            | GPS                                    |
|-------|----------------------------------|--|
| 11    | Bezdičkova – Na Drážce           | N: 50.038916, E: 15.799175             |
| 12    | Ludka Matyry (u domu č.p. 852)   | N: 50.042192276837, E: 15.806412819902 |
| 13    | Judr. Krpaty (u domu č.p. 1146)  | N: 50.04057768461, E: 15.787217972353  |
| 14    | Svobody – Marty Exnarové         | N: 50.02332, E: 15.775634              |
| 15    | K Višňovce – Rokycanova          | N: 50.02623002595, E: 15.775099957672  |
| 16    | Smilova (konec ulice)            | N: 50.03551616988, E: 15.777201561408  |
| 17    | Jiráskova – U Husova sboru       | N: 50.034519, E: 15.781248             |
| 18    | Pod Vinicí (u domu č. p. 2840)   | N: 50.027883568986, E: 15.780886216008 |
| 19    | Československé Armády – Staňkova | N: 50.023128, E: 15.763333             |
| 20    | Artura Krause – Sokolovská       | N: 50.021616, E: 15.755908             |
| 21    | Sokolovská – Josefa Ressler      | N: 50.024063, E: 15.7552               |
| 22    | Gorkého (u domu č.p. 2148)       | N: 50.025062914377, E: 15.760242571164 |
| 23    | Javorová (u domu č.p. 202)       | N: 50.053034823331, E: 15.77442370954  |
| 24    | K Olšině (u domu č.p. 312)       | N: 50.053204629557, E: 15.759308214778 |
| 25    | Sluneční (u domu č.p. 301)       | N: 50.0481508, E: 15.7542477           |
| 26    | Družby (na velkém parkovišti)    | N: 50.046157039129, E: 15.756156512164 |
| 27    | Dubová (střed ulice)             | N: 50.022355068493, E: 15.731671235443 |
| 28    | Školní – Kostnická               | N: 50.028046, E: 15.735278             |
| 29    | Ke Stájím – Dostihová            | N: 50.023813816939, E: 15.726979164557 |

Vzhledem k tomu, že se obě farmy, ze kterých se výrobky vozí, nachází kousek od Prahy, přidáme ještě místo č. 0 s GPS souřadnicemi N: 50.0607375, E: 15.7487772, odkud dodávka přijede a po objetí všech zastávek tudy bude pokračovat zpět na dálnici směr Praha. Vzdálenosti mezi všemi zastávkami v km obsahuje tabulka 2. Aktuální délka trasy, kterou Mléko z farmy každý čtvrtek objíždí, je 81,6 km (nepočítáme-li cestu z farmy do vrcholu 0 a zpět).

Tabulka 2. Rozvoz mléčných výrobků – matice vzdáleností zastávek (Zdroj: vlastní – zpracováno na základě [22] s pomocí [21])

| 0  | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   | 21   | 22   | 23   | 24   | 25   | 26   | 27   | 28   | 29   |      |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0  | 0    | 13,7 | 13,3 | 14,3 | 14,7 | 15,8 | 15,4 | 14,4 | 15,1 | 14,6 | 14,3 | 7,5  | 8,4  | 4,8  | 5,2  | 6,1  | 4,3  | 6,4  | 6,4  | 5,3  | 5,4  | 5,1  | 4,9  | 2,7  | 1,6  | 2,1  | 2,9  | 5,8  | 5,8  | 6,9  |
| 1  | 13,7 | 0    | 1,2  | 1,7  | 2,1  | 3,3  | 3,4  | 3,2  | 2,9  | 2,1  | 3,0  | 19,3 | 20,2 | 16,9 | 13,8 | 14,1 | 15,2 | 18,2 | 14,8 | 14,2 | 15,7 | 15,5 | 15,3 | 17,6 | 17,4 | 17,4 | 17,7 | 16,2 | 16,2 | 17,2 |
| 2  | 13,3 | 1,2  | 0    | 1,4  | 2,5  | 3,7  | 3,3  | 1,9  | 2,8  | 1,9  | 0,9  | 15,8 | 16,8 | 11,9 | 8,8  | 9,1  | 10,2 | 10,7 | 9,9  | 9,2  | 12,3 | 12,0 | 11,9 | 12,6 | 12,4 | 13,9 | 14,3 | 12,8 | 12,8 | 13,8 |
| 3  | 14,3 | 1,7  | 1,4  | 0    | 0,6  | 1,7  | 2,1  | 1,9  | 1,6  | 0,8  | 2,9  | 18,5 | 19,4 | 16,2 | 13,1 | 13,4 | 14,5 | 17,4 | 14,1 | 13,4 | 15,0 | 14,7 | 14,5 | 16,8 | 16,7 | 16,6 | 17,0 | 15,4 | 15,4 | 16,5 |
| 4  | 14,7 | 2,1  | 2,5  | 0,6  | 0    | 1,8  | 2,3  | 2,0  | 1,7  | 0,9  | 3,0  | 18,1 | 19,0 | 15,7 | 12,6 | 13,0 | 14,0 | 17,0 | 13,7 | 13,0 | 14,5 | 14,3 | 14,1 | 16,4 | 16,3 | 16,2 | 16,5 | 15,0 | 15,0 | 16,0 |
| 5  | 15,8 | 3,3  | 3,7  | 1,7  | 1,8  | 0    | 3,4  | 3,2  | 2,9  | 2,1  | 3,0  | 19,3 | 20,2 | 16,9 | 13,8 | 14,1 | 15,2 | 18,2 | 14,8 | 14,2 | 15,7 | 15,5 | 15,3 | 17,6 | 17,4 | 17,4 | 17,7 | 16,2 | 16,2 | 17,2 |
| 6  | 15,4 | 3,4  | 3,3  | 2,1  | 2,3  | 3,4  | 0    | 1,0  | 1,0  | 1,4  | 4,6  | 19,7 | 20,6 | 17,3 | 14,2 | 14,6 | 15,6 | 18,6 | 15,3 | 14,6 | 16,1 | 15,9 | 15,7 | 18,0 | 17,9 | 17,8 | 18,1 | 16,6 | 16,6 | 17,6 |
| 7  | 14,4 | 3,2  | 1,9  | 1,9  | 2,0  | 3,2  | 1,0  | 0    | 0,7  | 1,1  | 2,7  | 16,0 | 16,9 | 13,6 | 10,5 | 10,8 | 11,9 | 14,9 | 11,6 | 10,9 | 12,4 | 12,2 | 12,0 | 14,3 | 14,1 | 14,1 | 14,4 | 12,9 | 12,9 | 13,9 |
| 8  | 15,1 | 2,9  | 2,8  | 1,6  | 1,7  | 2,9  | 1,0  | 0,7  | 0    | 0,8  | 4,1  | 19,2 | 20,1 | 16,8 | 13,7 | 14,0 | 15,1 | 18,1 | 14,8 | 14,1 | 15,6 | 15,4 | 15,2 | 17,5 | 17,3 | 17,3 | 17,6 | 16,1 | 16,1 | 17,1 |
| 9  | 14,6 | 2,1  | 1,9  | 0,8  | 0,9  | 2,1  | 1,4  | 1,1  | 0,8  | 0    | 3,3  | 18,3 | 19,3 | 16,0 | 12,9 | 13,2 | 14,3 | 17,2 | 13,9 | 13,2 | 14,8 | 14,5 | 14,4 | 16,7 | 16,5 | 16,4 | 16,8 | 15,3 | 15,3 | 16,3 |
| 10 | 14,3 | 3,0  | 0,9  | 2,9  | 3,0  | 3,0  | 4,6  | 2,7  | 4,1  | 3,3  | 0    | 16,6 | 17,5 | 12,7 | 9,6  | 9,9  | 11,0 | 11,4 | 10,6 | 10,0 | 13,1 | 12,8 | 12,6 | 13,4 | 13,2 | 14,7 | 15,1 | 13,5 | 13,5 | 14,6 |
| 11 | 7,5  | 19,3 | 15,8 | 18,5 | 18,1 | 19,3 | 19,7 | 16,0 | 19,2 | 18,3 | 16,6 | 0    | 1,0  | 1,2  | 3,2  | 3,0  | 3,1  | 2,5  | 2,6  | 4,2  | 4,8  | 4,6  | 4,4  | 4,9  | 4,8  | 5,6  | 4,4  | 6,3  | 6,3  | 7,3  |
| 12 | 8,4  | 20,2 | 16,8 | 19,4 | 19,0 | 20,2 | 20,6 | 16,9 | 20,1 | 19,3 | 17,5 | 1,0  | 0    | 1,9  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 2,9  | 3,5  | 5,1  | 5,7  | 5,6  | 5,1  | 5,7  | 5,5  | 5,6  | 5,1  | 7,2  | 7,2  | 8,2  |
| 13 | 4,8  | 16,9 | 11,9 | 16,2 | 15,7 | 16,9 | 17,3 | 13,6 | 16,8 | 16,0 | 12,7 | 1,2  | 1,9  | 0    | 2,6  | 2,4  | 2,1  | 1,3  | 2,0  | 3,6  | 4,2  | 4,1  | 3,6  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 3,5  | 5,7  | 5,7  | 6,7  |
| 14 | 5,2  | 13,8 | 8,8  | 13,1 | 12,6 | 13,8 | 14,2 | 10,5 | 13,7 | 12,9 | 9,6  | 3,2  | 4,1  | 2,6  | 0    | 0,6  | 2,0  | 1,9  | 0,9  | 0,9  | 1,8  | 1,6  | 1,4  | 4,4  | 4,3  | 4,4  | 3,9  | 3,9  | 3,9  | 4,9  |
| 15 | 6,1  | 14,1 | 9,1  | 13,4 | 13,0 | 14,1 | 14,6 | 10,8 | 14,0 | 13,2 | 9,9  | 3,0  | 3,9  | 2,4  | 0,6  | 0    | 1,7  | 1,9  | 1,1  | 1,2  | 2,0  | 1,9  | 1,4  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 3,5  | 3,5  | 3,5  | 4,5  |
| 16 | 4,3  | 15,2 | 10,2 | 14,5 | 14,0 | 15,2 | 15,6 | 11,9 | 15,1 | 14,3 | 11,0 | 3,1  | 4,0  | 2,1  | 2,0  | 1,7  | 0    | 1,3  | 1,7  | 3,3  | 3,9  | 3,8  | 3,3  | 4,5  | 4,4  | 4,0  | 4,0  | 5,4  | 5,4  | 6,4  |
| 17 | 6,4  | 18,2 | 10,7 | 17,4 | 17,0 | 18,2 | 18,6 | 14,9 | 18,1 | 17,2 | 11,4 | 2,5  | 2,9  | 1,3  | 1,9  | 1,9  | 1,3  | 0    | 1,2  | 2,8  | 3,4  | 3,2  | 2,7  | 3,6  | 3,5  | 3,6  | 3,1  | 4,9  | 4,9  | 5,9  |
| 18 | 6,4  | 14,8 | 9,9  | 14,1 | 13,7 | 14,8 | 15,3 | 11,6 | 14,8 | 13,9 | 10,6 | 2,6  | 3,5  | 2,0  | 0,9  | 1,1  | 1,7  | 1,2  | 0    | 1,7  | 2,6  | 2,5  | 2,0  | 4,4  | 4,2  | 4,3  | 3,8  | 4,1  | 4,1  | 5,1  |
| 19 | 5,3  | 14,2 | 9,2  | 13,4 | 13,0 | 14,2 | 14,6 | 10,9 | 14,1 | 13,2 | 10,0 | 4,2  | 5,1  | 3,6  | 0,9  | 1,2  | 3,3  | 2,8  | 1,7  | 0    | 0,7  | 0,7  | 0,4  | 4,6  | 4,5  | 4,4  | 4,1  | 3,0  | 3,0  | 4,0  |
| 20 | 5,4  | 15,7 | 12,3 | 15,0 | 14,5 | 15,7 | 16,1 | 12,4 | 15,6 | 14,8 | 13,1 | 4,8  | 5,7  | 4,2  | 1,8  | 2,0  | 3,9  | 3,4  | 2,6  | 0,7  | 0    | 0,3  | 0,7  | 5,3  | 5,1  | 4,5  | 4,8  | 3,0  | 3,0  | 4,0  |
| 21 | 5,1  | 15,5 | 12,0 | 14,7 | 14,3 | 15,5 | 15,9 | 12,2 | 15,4 | 14,5 | 12,8 | 4,6  | 5,6  | 4,1  | 1,6  | 1,9  | 3,8  | 3,2  | 2,5  | 0,7  | 0,3  | 0    | 0,4  | 5,1  | 5,0  | 4,3  | 4,6  | 2,8  | 2,8  | 3,8  |
| 22 | 4,9  | 15,3 | 11,9 | 14,5 | 14,1 | 15,3 | 15,7 | 12,0 | 15,2 | 14,4 | 12,6 | 4,4  | 5,1  | 3,6  | 1,4  | 1,4  | 3,3  | 2,7  | 2,0  | 0,4  | 0,7  | 0,4  | 0    | 4,6  | 4,5  | 4,0  | 4,1  | 2,5  | 2,5  | 3,6  |
| 23 | 2,7  | 17,6 | 12,6 | 16,8 | 16,4 | 17,6 | 18,0 | 14,3 | 17,5 | 16,7 | 13,4 | 4,9  | 5,7  | 4,1  | 4,4  | 4,1  | 4,5  | 3,6  | 4,4  | 4,6  | 5,3  | 5,1  | 4,6  | 0    | 1,7  | 2,6  | 2,1  | 6,8  | 6,8  | 7,8  |
| 24 | 1,6  | 17,4 | 12,4 | 16,7 | 16,3 | 17,4 | 17,9 | 14,1 | 17,3 | 16,5 | 13,2 | 4,8  | 5,5  | 3,9  | 4,3  | 3,9  | 4,4  | 3,5  | 4,2  | 4,5  | 5,1  | 5,0  | 4,5  | 1,7  | 0    | 1,4  | 1,3  | 6,6  | 6,6  | 5,7  |
| 25 | 2,1  | 17,4 | 13,9 | 16,6 | 16,2 | 17,4 | 17,8 | 14,1 | 17,3 | 16,4 | 14,7 | 5,6  | 5,6  | 4,0  | 4,4  | 4,0  | 4,0  | 3,6  | 4,3  | 4,4  | 4,5  | 4,3  | 4,0  | 2,6  | 1,4  | 0    | 0,7  | 5,9  | 4,5  | 4,8  |
| 26 | 2,9  | 17,7 | 14,3 | 17,0 | 16,5 | 17,7 | 18,1 | 14,4 | 17,6 | 16,8 | 15,1 | 4,4  | 5,1  | 3,5  | 3,9  | 3,5  | 4,0  | 3,1  | 3,8  | 4,1  | 4,8  | 4,6  | 4,1  | 2,1  | 1,3  | 0,7  | 0    | 6,2  | 4,7  | 5,1  |
| 27 | 5,8  | 16,2 | 12,8 | 15,4 | 15,0 | 16,2 | 16,6 | 12,9 | 16,1 | 15,3 | 13,5 | 6,3  | 7,2  | 5,7  | 3,9  | 3,5  | 5,4  | 4,9  | 4,1  | 3,0  | 3,0  | 2,8  | 2,5  | 6,8  | 6,6  | 5,9  | 6,2  | 0    | 0,8  | 1,5  |
| 28 | 5,8  | 16,2 | 12,8 | 15,4 | 15,0 | 16,2 | 16,6 | 12,9 | 16,1 | 15,3 | 13,5 | 6,3  | 7,2  | 5,7  | 3,9  | 3,5  | 5,4  | 4,9  | 4,1  | 3,0  | 3,0  | 2,8  | 2,5  | 6,8  | 6,6  | 4,5  | 4,7  | 0,8  | 0    | 1,4  |
| 29 | 6,9  | 17,2 | 13,8 | 16,5 | 16,0 | 17,2 | 17,6 | 13,9 | 17,1 | 16,3 | 14,6 | 7,3  | 8,2  | 6,7  | 4,9  | 4,5  | 6,4  | 5,9  | 5,1  | 4,0  | 4,0  | 3,8  | 3,6  | 7,8  | 5,7  | 4,8  | 5,1  | 1,5  | 1,4  | 0    |

Nejprve je nutné nalézt minimální kostru grafu pomocí Kruskalova algoritmu. Tedy uspořádáme všechny vzdálenosti nad hlavní diagonálou podle velikosti. Nejkratší vzdálenost mezi zastávkami je 300 m, následně dvakrát 400 m. Obarvením těchto tří hran nevznikne kružnice, tedy je obarvíme zeleně. Pro přehlednost hrany, které již nelze obarvit, neboť by kružnice vznikla, obarvíme červeně (viz tabulka 3).

Tabulka 3. Rozvoz mléčných výrobků – hledání minimální kostry – 3. iterace (Zdroj: vlastní s pomocí [21])

| 0 | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   | 21   | 22   | 23   | 24   | 25   | 26   | 27   | 28   | 29   |    |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----|
| 0 | 13,7 | 13,3 | 14,3 | 14,7 | 15,8 | 15,4 | 14,4 | 15,1 | 14,6 | 14,3 | 7,5  | 8,4  | 4,8  | 5,2  | 6,1  | 4,3  | 6,4  | 6,4  | 5,3  | 5,4  | 5,1  | 4,9  | 2,7  | 1,6  | 2,1  | 2,9  | 5,8  | 5,8  | 6,9  | 0  |
|   | 0    | 1,2  | 1,7  | 2,1  | 3,3  | 3,4  | 3,2  | 2,9  | 2,1  | 3,0  | 19,3 | 20,2 | 16,9 | 13,8 | 14,1 | 15,2 | 18,2 | 14,8 | 14,2 | 15,7 | 15,5 | 15,3 | 17,6 | 17,4 | 17,4 | 17,7 | 16,2 | 16,2 | 17,2 | 1  |
|   |      | 0    | 1,4  | 2,5  | 3,7  | 3,3  | 1,9  | 2,8  | 1,9  | 0,9  | 15,8 | 16,8 | 11,9 | 8,8  | 9,1  | 10,2 | 10,7 | 9,9  | 9,2  | 12,3 | 12,0 | 11,9 | 12,6 | 12,4 | 13,9 | 14,3 | 12,8 | 12,8 | 13,8 | 2  |
|   |      |      | 0    | 0,6  | 1,7  | 2,1  | 1,9  | 1,6  | 0,8  | 2,9  | 18,5 | 19,4 | 16,2 | 13,1 | 13,4 | 14,5 | 17,4 | 14,1 | 13,4 | 15,0 | 14,7 | 14,5 | 16,8 | 16,7 | 16,6 | 17,0 | 15,4 | 15,4 | 16,5 | 3  |
|   |      |      |      | 0    | 1,8  | 2,3  | 2,0  | 1,7  | 0,9  | 3,0  | 18,1 | 19,0 | 15,7 | 12,6 | 13,0 | 14,0 | 17,0 | 13,7 | 13,0 | 14,5 | 14,3 | 14,1 | 16,4 | 16,3 | 16,2 | 16,5 | 15,0 | 15,0 | 16,0 | 4  |
|   |      |      |      |      | 0    | 3,4  | 3,2  | 2,9  | 2,1  | 3,0  | 19,3 | 20,2 | 16,9 | 13,8 | 14,1 | 15,2 | 18,2 | 14,8 | 14,2 | 15,7 | 15,5 | 15,3 | 17,6 | 17,4 | 17,4 | 17,7 | 16,2 | 16,2 | 17,2 | 5  |
|   |      |      |      |      |      | 0    | 1,0  | 1,0  | 1,4  | 4,6  | 19,7 | 20,6 | 17,3 | 14,2 | 14,6 | 15,6 | 18,6 | 15,3 | 14,6 | 16,1 | 15,9 | 15,7 | 18,0 | 17,9 | 17,8 | 18,1 | 16,6 | 16,6 | 17,6 | 6  |
|   |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,7  | 1,1  | 2,7  | 16,0 | 16,9 | 13,6 | 10,5 | 10,8 | 11,9 | 14,9 | 11,6 | 10,9 | 12,4 | 12,2 | 12,0 | 14,3 | 14,1 | 14,1 | 14,4 | 12,9 | 12,9 | 13,9 | 7  |
|   |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 4,1  | 19,2 | 20,1 | 16,8 | 13,7 | 14,0 | 15,1 | 18,1 | 14,8 | 14,1 | 15,6 | 15,4 | 15,2 | 17,5 | 17,3 | 17,3 | 17,6 | 16,1 | 16,1 | 17,1 | 8  |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 3,3  | 18,3 | 19,3 | 16,0 | 12,9 | 13,2 | 14,3 | 17,2 | 13,9 | 13,2 | 14,8 | 14,5 | 14,4 | 16,7 | 16,5 | 16,4 | 16,8 | 15,3 | 15,3 | 16,3 | 9  |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 16,6 | 17,5 | 12,7 | 9,6  | 9,9  | 11,0 | 11,4 | 10,6 | 10,0 | 13,1 | 12,8 | 12,6 | 13,4 | 13,2 | 14,7 | 15,1 | 13,5 | 13,5 | 14,6 | 10 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,0  | 1,2  | 3,2  | 3,0  | 3,1  | 2,5  | 2,6  | 4,2  | 4,8  | 4,6  | 4,4  | 4,9  | 4,8  | 5,6  | 4,4  | 6,3  | 6,3  | 7,3  | 11 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,9  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 2,9  | 3,5  | 5,1  | 5,7  | 5,6  | 5,1  | 5,7  | 5,5  | 5,6  | 5,1  | 7,2  | 7,2  | 8,2  | 12 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 2,6  | 2,4  | 2,1  | 1,3  | 2,0  | 3,6  | 4,2  | 4,1  | 3,6  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 3,5  | 5,7  | 5,7  | 6,7  | 13 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,6  | 2,0  | 1,9  | 0,9  | 0,9  | 1,8  | 1,6  | 1,4  | 4,4  | 4,3  | 4,4  | 3,9  | 3,9  | 3,9  | 4,9  | 14 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,7  | 1,9  | 1,1  | 1,2  | 2,0  | 1,9  | 1,4  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 3,5  | 3,5  | 3,5  | 4,5  | 15 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,3  | 1,7  | 3,3  | 3,9  | 3,8  | 3,3  | 4,5  | 4,4  | 4,0  | 4,0  | 5,4  | 5,4  | 6,4  | 16 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,2  | 2,8  | 3,4  | 3,2  | 2,7  | 3,6  | 3,5  | 3,6  | 3,1  | 4,9  | 4,9  | 5,9  | 17 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,7  | 2,6  | 2,5  | 2,0  | 4,4  | 4,2  | 4,3  | 3,8  | 4,1  | 4,1  | 5,1  | 18 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,7  | 0,7  | 0,4  | 4,6  | 4,5  | 4,4  | 4,1  | 3,0  | 3,0  | 4,0  | 19 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,3  | 0,7  | 5,3  | 5,1  | 4,5  | 4,8  | 3,0  | 3,0  | 4,0  | 20 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,4  | 5,1  | 5,0  | 4,3  | 4,6  | 2,8  | 2,8  | 3,8  | 21 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 4,6  | 4,5  | 4,0  | 4,1  | 2,5  | 2,5  | 3,6  | 22 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,7  | 2,6  | 2,1  | 6,8  | 6,8  | 7,8  | 23 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 1,3  | 6,6  | 6,6  | 5,7  | 24 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,7  | 5,9  | 4,5  | 4,8  | 25 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 6,2  | 4,7  | 5,1  | 26 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 29 |

Dále jsou na řadě dvě hrany s ohodnocením 600 m. Nevzniká tím kružnice, tedy je obarvíme. Následuje pět hran s ohodnocením 700 m, tři z nich již nelze obarvit, neboť by vznikla kružnice, zbylé dvě obarvíme. Dále jsou zde tři hrany s ohodnocením 800 m, které je možné obarvit. V této fázi jsou propojené zastávky 4-3-9-8-7, 14-15, 19-22-21-20, 27-28 a 25-26. Aby nevznikla kružnice, raději opět hrany, jejichž obarvením by již kružnice vznikla, obarvíme červeně (viz tabulka 4).

Tabulka 4. Rozvoz mléčných výrobků – hledání minimální kostry – 10. iterace (Zdroj: vlastní s pomocí [21])

| 0 | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   | 21   | 22   | 23   | 24   | 25   | 26   | 27   | 28   | 29   |     |    |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|----|
| 0 | 13,7 | 13,3 | 14,3 | 14,7 | 15,8 | 15,4 | 14,4 | 15,1 | 14,6 | 14,3 | 7,5  | 8,4  | 4,8  | 5,2  | 6,1  | 4,3  | 6,4  | 6,4  | 5,3  | 5,4  | 5,1  | 4,9  | 2,7  | 1,6  | 2,1  | 2,9  | 5,8  | 5,8  | 6,9  | 0   |    |
|   | 0    | 1,2  | 1,7  | 2,1  | 3,3  | 3,4  | 3,2  | 2,9  | 2,1  | 3,0  | 19,3 | 20,2 | 16,9 | 13,8 | 14,1 | 15,2 | 18,2 | 14,8 | 14,2 | 15,7 | 15,5 | 15,3 | 17,6 | 17,4 | 17,4 | 17,7 | 16,2 | 16,2 | 17,2 | 1   |    |
|   |      | 0    | 1,4  | 2,5  | 3,7  | 3,3  | 1,9  | 2,8  | 1,9  | 0,9  | 15,8 | 16,8 | 11,9 | 8,8  | 9,1  | 10,2 | 10,7 | 9,9  | 9,2  | 12,3 | 12,0 | 11,9 | 12,6 | 12,4 | 13,9 | 14,3 | 12,8 | 12,8 | 13,8 | 2   |    |
|   |      |      | 0    | 0,6  | 1,7  | 2,1  | 1,9  | 1,6  | 0,8  | 2,9  | 18,5 | 19,4 | 16,2 | 13,1 | 13,4 | 14,5 | 17,4 | 14,1 | 13,4 | 15,0 | 14,7 | 14,5 | 16,8 | 16,7 | 16,6 | 17,0 | 15,4 | 15,4 | 16,5 | 3   |    |
|   |      |      |      | 0    | 1,8  | 2,3  | 2,0  | 1,7  | 0,9  | 3,0  | 18,1 | 19,0 | 15,7 | 12,6 | 13,0 | 14,0 | 17,0 | 13,7 | 13,0 | 14,5 | 14,3 | 14,1 | 16,4 | 16,3 | 16,2 | 16,5 | 15,0 | 15,0 | 16,0 | 4   |    |
|   |      |      |      |      | 0    | 3,4  | 3,2  | 2,9  | 2,1  | 3,0  | 19,3 | 20,2 | 16,9 | 13,8 | 14,1 | 15,2 | 18,2 | 14,8 | 14,2 | 15,7 | 15,5 | 15,3 | 17,6 | 17,4 | 17,4 | 17,7 | 16,2 | 16,2 | 17,2 | 5   |    |
|   |      |      |      |      |      | 0    | 1,0  | 1,0  | 1,4  | 4,6  | 19,7 | 20,6 | 17,3 | 14,2 | 14,6 | 15,6 | 18,6 | 15,3 | 14,6 | 16,1 | 15,9 | 15,7 | 18,0 | 17,9 | 17,8 | 18,1 | 16,6 | 16,6 | 17,6 | 6   |    |
|   |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,7  | 1,1  | 2,7  | 16,0 | 16,9 | 13,6 | 10,5 | 10,8 | 11,9 | 14,9 | 11,6 | 10,9 | 12,4 | 12,2 | 12,0 | 14,3 | 14,1 | 14,1 | 14,4 | 12,9 | 12,9 | 13,9 | 7   |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 4,1  | 19,2 | 20,1 | 16,8 | 13,7 | 14,0 | 15,1 | 18,1 | 14,8 | 14,1 | 15,6 | 15,4 | 15,2 | 17,5 | 17,3 | 17,3 | 17,6 | 16,1 | 16,1 | 17,1 | 8   |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 3,3  | 18,3 | 19,3 | 16,0 | 12,9 | 13,2 | 14,3 | 17,2 | 13,9 | 13,2 | 14,8 | 14,5 | 14,4 | 16,7 | 16,5 | 16,4 | 16,8 | 15,3 | 15,3 | 16,3 | 9   |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 16,6 | 17,5 | 12,7 | 9,6  | 9,9  | 11,0 | 11,4 | 10,6 | 10,0 | 13,1 | 12,8 | 12,6 | 13,4 | 13,2 | 14,7 | 15,1 | 13,5 | 13,5 | 14,6 | 10  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,0  | 1,2  | 3,2  | 3,0  | 3,1  | 2,5  | 2,6  | 4,2  | 4,8  | 4,6  | 4,4  | 4,9  | 4,8  | 5,6  | 4,4  | 6,3  | 6,3  | 7,3  | 11  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,9  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 2,9  | 3,5  | 5,1  | 5,7  | 5,6  | 5,1  | 5,7  | 5,5  | 5,6  | 5,1  | 7,2  | 7,2  | 8,2  | 12  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 2,6  | 2,4  | 2,1  | 1,3  | 2,0  | 3,6  | 4,2  | 4,1  | 3,6  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 3,5  | 5,7  | 5,7  | 6,7  | 13  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,6  | 2,0  | 1,9  | 0,9  | 0,9  | 1,8  | 1,6  | 1,4  | 4,4  | 4,3  | 4,4  | 3,9  | 3,9  | 3,9  | 4,9  | 14  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,7  | 1,9  | 1,1  | 1,2  | 2,0  | 1,9  | 1,4  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 3,5  | 3,5  | 3,5  | 4,5  | 15  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,3  | 1,7  | 3,3  | 3,9  | 3,8  | 3,3  | 4,5  | 4,4  | 4,0  | 5,4  | 5,4  | 6,4  | 16   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,2  | 2,8  | 3,4  | 3,2  | 2,7  | 3,6  | 3,5  | 3,6  | 3,1  | 4,9  | 4,9  | 5,9  | 17  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,7  | 2,6  | 2,5  | 2,0  | 4,4  | 4,2  | 4,3  | 3,8  | 4,1  | 4,1  | 5,1  | 18  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,7  | 0,7  | 0,4  | 4,6  | 4,5  | 4,4  | 4,1  | 3,0  | 3,0  | 4,0  | 19  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,3  | 0,7  | 5,3  | 5,1  | 4,5  | 4,8  | 3,0  | 3,0  | 4,0  | 20  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,4  | 5,1  | 5,0  | 4,3  | 4,6  | 2,8  | 2,8  | 3,8  | 21  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 4,6  | 4,5  | 4,0  | 4,1  | 2,5  | 2,5  | 3,6  | 22  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 4,6  | 4,5  | 4,0  | 2,1  | 2,5  | 3,6  | 23  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,7  | 2,6  | 2,1  | 6,8  | 6,8  | 7,8 | 24 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 1,3  | 6,6  | 6,6  | 5,7 | 25 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,7  | 5,9  | 4,5  | 4,8 | 26 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 6,2  | 4,7  | 5,1 | 27 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 28  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27  |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |     |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |    |



Takto pokračujeme dále, dokud nejsou propojeny všechny vrcholy. Pokud nahlédneme na matici před poslední iterací (tabulka 5), vidíme, že nejprve se spojily vždy zastávky v rámci každého města. Až poslední iterace určí, jak budou propojeny zastávky mezi městy.

Výslednou kostru znázorňuje tabulka 6. Je nalezena minimální kostra grafu se součtem hranových ohodnocení (zelených polí) 40,5 km.

Tabulka 6. Rozvoz mléčných výrobků – hledání minimální kostry – výsledná matice (Zdroj: vlastní s pomocí [21])

| 0 | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   | 21   | 22   | 23   | 24   | 25   | 26   | 27   | 28   | 29   |    |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----|
| 0 | 13,7 | 13,3 | 14,3 | 14,7 | 15,8 | 15,4 | 14,4 | 15,1 | 14,6 | 14,3 | 7,5  | 8,4  | 4,8  | 5,2  | 6,1  | 4,3  | 6,4  | 5,3  | 5,4  | 5,1  | 4,9  | 2,7  | 1,6  | 2,1  | 2,9  | 5,8  | 5,8  | 6,9  | 0    |    |
|   | 0    | 1,2  | 1,7  | 2,1  | 3,3  | 3,4  | 3,2  | 2,9  | 2,1  | 3,0  | 19,3 | 20,2 | 16,9 | 13,8 | 14,1 | 15,2 | 18,2 | 14,8 | 14,2 | 15,7 | 15,5 | 15,3 | 17,6 | 17,4 | 17,4 | 17,7 | 16,2 | 16,2 | 17,2 | 1  |
|   |      | 0    | 1,4  | 2,5  | 3,7  | 3,3  | 1,9  | 2,8  | 1,9  | 0,9  | 15,8 | 16,8 | 11,9 | 8,8  | 9,1  | 10,2 | 10,7 | 9,9  | 9,2  | 12,3 | 12,0 | 11,9 | 12,6 | 12,4 | 13,9 | 14,3 | 12,8 | 12,8 | 13,8 | 2  |
|   |      |      | 0    | 0,6  | 1,7  | 2,1  | 1,9  | 1,6  | 0,8  | 2,9  | 18,5 | 19,4 | 16,2 | 13,1 | 13,4 | 14,5 | 17,4 | 14,1 | 13,4 | 15,0 | 14,7 | 14,5 | 16,8 | 16,7 | 16,6 | 17,0 | 15,4 | 15,4 | 16,5 | 3  |
|   |      |      |      | 0    | 1,8  | 2,3  | 2,0  | 1,7  | 0,9  | 3,0  | 18,1 | 19,0 | 15,7 | 12,6 | 13,0 | 14,0 | 17,0 | 13,7 | 13,0 | 14,5 | 14,3 | 14,1 | 16,4 | 16,3 | 16,2 | 16,5 | 15,0 | 15,0 | 16,0 | 4  |
|   |      |      |      |      | 0    | 3,4  | 3,2  | 2,9  | 2,1  | 3,0  | 19,3 | 20,2 | 16,9 | 13,8 | 14,1 | 15,2 | 18,2 | 14,8 | 14,2 | 15,7 | 15,5 | 15,3 | 17,6 | 17,4 | 17,4 | 17,7 | 16,2 | 16,2 | 17,2 | 5  |
|   |      |      |      |      |      | 0    | 1,0  | 1,0  | 1,4  | 4,6  | 19,7 | 20,6 | 17,3 | 14,2 | 14,6 | 15,6 | 18,6 | 15,3 | 14,6 | 16,1 | 15,9 | 15,7 | 18,0 | 17,9 | 17,8 | 18,1 | 16,6 | 16,6 | 17,6 | 6  |
|   |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,7  | 1,1  | 2,7  | 16,0 | 16,9 | 13,6 | 10,5 | 10,8 | 11,9 | 14,9 | 11,6 | 10,9 | 12,4 | 12,2 | 12,0 | 14,3 | 14,1 | 14,1 | 14,4 | 12,9 | 12,9 | 13,9 | 7  |
|   |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 4,1  | 19,2 | 20,1 | 16,8 | 13,7 | 14,0 | 15,1 | 18,1 | 14,8 | 14,1 | 15,6 | 15,4 | 15,2 | 17,5 | 17,3 | 17,3 | 17,6 | 16,1 | 16,1 | 17,1 | 8  |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 3,3  | 18,3 | 19,3 | 16,0 | 12,9 | 13,2 | 14,3 | 17,2 | 13,9 | 13,2 | 14,8 | 14,5 | 14,4 | 16,7 | 16,5 | 16,4 | 16,8 | 15,3 | 15,3 | 16,3 | 9  |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 16,6 | 17,5 | 12,7 | 9,6  | 9,9  | 11,0 | 11,4 | 10,6 | 10,0 | 13,1 | 12,8 | 12,6 | 13,4 | 13,2 | 14,7 | 15,1 | 13,5 | 13,5 | 14,6 | 10 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,0  | 1,2  | 3,2  | 3,0  | 3,1  | 2,5  | 2,6  | 4,2  | 4,8  | 4,6  | 4,4  | 4,9  | 4,8  | 5,6  | 4,4  | 6,3  | 6,3  | 7,3  | 11 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,9  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 2,9  | 3,5  | 5,1  | 5,7  | 5,6  | 5,1  | 5,7  | 5,5  | 5,6  | 5,1  | 7,2  | 7,2  | 8,2  | 12 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 2,6  | 2,4  | 2,1  | 1,3  | 2,0  | 3,6  | 4,2  | 4,1  | 3,6  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 3,5  | 5,7  | 5,7  | 6,7  | 13 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,6  | 2,0  | 1,9  | 0,9  | 0,9  | 1,8  | 1,6  | 1,4  | 4,4  | 4,3  | 4,4  | 3,9  | 3,9  | 3,9  | 4,9  | 14 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,7  | 1,9  | 1,1  | 1,2  | 2,0  | 1,9  | 1,4  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 3,5  | 3,5  | 3,5  | 4,5  | 15 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,3  | 1,7  | 3,3  | 3,9  | 3,8  | 3,3  | 4,5  | 4,4  | 4,0  | 4,0  | 5,4  | 5,4  | 6,4  | 16 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,2  | 2,8  | 3,4  | 3,2  | 2,7  | 3,6  | 3,5  | 3,6  | 3,1  | 4,9  | 4,9  | 5,9  | 17 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,7  | 2,6  | 2,5  | 2,0  | 4,4  | 4,2  | 4,3  | 3,8  | 4,1  | 4,1  | 5,1  | 18 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,7  | 0,7  | 0,4  | 4,6  | 4,5  | 4,4  | 4,1  | 3,0  | 3,0  | 4,0  | 19 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,3  | 0,7  | 5,3  | 5,1  | 4,5  | 4,8  | 3,0  | 3,0  | 4,0  | 20 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,4  | 5,1  | 5,0  | 4,3  | 4,6  | 2,8  | 2,8  | 3,8  | 21 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 4,6  | 4,5  | 4,0  | 4,1  | 2,5  | 2,5  | 3,6  | 22 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,7  | 2,6  | 2,1  | 6,8  | 6,8  | 7,8  | 23 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 1,3  | 6,6  | 6,6  | 5,7  | 24 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,7  | 5,9  | 4,5  | 4,8  | 25 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 6,2  | 4,7  | 5,1  | 26 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  | 27 |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 28   |    |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 29   |    |

Nyní se dostáváme ke kroku dvě, kdy zdvojíme všechny hrany této minimální kostry. Dostáváme graf, jehož vrcholy jsou sudého stupně, a tedy můžeme nalézt eulerův tah. Začátek zvolíme ve vrcholu 0 a postup je následující. Z vrcholu 0 je možné jít pouze do vrcholu 24, a tak jednu z hran spojujících vrcholy 0 a 24 obarvíme. Z vrcholu 24 vedou dvě hrany k 23, dvě k 26 a jedna zpět k 0. Ještě nejsou propojeny všechny vrcholy, tedy zpět k 0 nejdeme. Zvolíme například hranu k vrcholu 23. Z vrcholu 23 vede již jen jedna neobarvená hrana, a to zpět k vrcholu 24. Stále nejsou propojené všechny vrcholy, tedy hranu vedoucí zpět do vrcholu 0 opět nevolíme. Pokračujeme do vrcholu 26. Takto by postup pokračoval i nadále. Výsledný eulerův tah má podobu: 0-24-23-24-26-25-26-17-13-11-12-11-13-17-16-17-18-14-15-14-19-

22-21-20-21-22-27-28-29-28-27-22-19-14-2-10-2-3-5-3-4-3-9-8-7-6-7-8-9-3-2-1-2-14-18-17-26-24-0.

V třetím kroku algoritmu je nutné nalézt hamiltonův cyklus. Ten nalezneme vynecháním těch vrcholů, které se již v posloupnosti vrcholů vyskytly. Výsledný hamiltonův cyklus má podobu: 0-24-23-26-25-17-13-11-12-16-18-14-15-19-22-21-20-27-28-29-2-10-3-5-4-9-8-7-6-1-0 a délka této trasy je 69,5 km. Tedy pokud by společnost chtěla ušetřit na pohonných hmotách a objíždět zastávky co nejkratší vzdáleností, doporučili bychom ji postupovat podle posloupnosti vrcholů hamiltonova cyklu, ujela by pak o 12,1 km méně. Pokud by preferovala začínat v Chrudimi, tak, jak tomu je doposud, může postupovat hamiltonovým cyklem obráceně, tedy 0-1-6-7-8-atd. Výsledné cesty jsou pro úplnost znázorněny v tabulce 7 modrou barvou.

Tabulka 7. Rozvoz mléčných výrobků řešení (Zdroj: vlastní s pomocí [21])

| 0 | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   | 21   | 22   | 23   | 24   | 25   | 26   | 27   | 28   | 29   |     |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| 0 | 13,7 | 13,3 | 14,3 | 14,7 | 15,8 | 15,4 | 14,4 | 15,1 | 14,6 | 14,3 | 7,5  | 8,4  | 4,8  | 5,2  | 6,1  | 4,3  | 6,4  | 6,4  | 5,3  | 5,4  | 5,1  | 4,9  | 2,7  | 1,6  | 2,1  | 2,9  | 5,8  | 5,8  | 6,9  |     |
|   | 0    | 1,2  | 1,7  | 2,1  | 3,3  | 3,4  | 3,2  | 2,9  | 2,1  | 3,0  | 19,3 | 20,2 | 16,9 | 13,8 | 14,1 | 15,2 | 18,2 | 14,8 | 14,2 | 15,7 | 15,5 | 15,3 | 17,6 | 17,4 | 17,4 | 17,7 | 16,2 | 16,2 | 17,2 |     |
|   |      | 0    | 1,4  | 2,5  | 3,7  | 3,3  | 1,9  | 2,8  | 1,9  | 0,9  | 15,8 | 16,8 | 11,9 | 8,8  | 9,1  | 10,2 | 10,7 | 9,9  | 9,2  | 12,3 | 12,0 | 11,9 | 12,6 | 12,4 | 13,9 | 14,3 | 12,8 | 12,8 | 13,8 |     |
|   |      |      | 0    | 0,6  | 1,7  | 2,1  | 1,9  | 1,6  | 0,8  | 2,9  | 18,5 | 19,4 | 16,2 | 13,1 | 13,4 | 14,5 | 17,4 | 14,1 | 13,4 | 15,0 | 14,7 | 14,5 | 16,8 | 16,7 | 16,6 | 17,0 | 15,4 | 15,4 | 16,5 |     |
|   |      |      |      | 0    | 1,8  | 2,3  | 2,0  | 1,7  | 0,9  | 3,0  | 18,1 | 19,0 | 15,7 | 12,6 | 13,0 | 14,0 | 17,0 | 13,7 | 13,0 | 14,5 | 14,3 | 14,1 | 16,4 | 16,3 | 16,2 | 16,5 | 15,0 | 15,0 | 16,0 |     |
|   |      |      |      |      | 0    | 3,4  | 3,2  | 2,9  | 2,1  | 3,0  | 19,3 | 20,2 | 16,9 | 13,8 | 14,1 | 15,2 | 18,2 | 14,8 | 14,2 | 15,7 | 15,5 | 15,3 | 17,6 | 17,4 | 17,4 | 17,7 | 16,2 | 16,2 | 17,2 |     |
|   |      |      |      |      |      | 0    | 1,0  | 1,0  | 1,4  | 4,6  | 19,7 | 20,6 | 17,3 | 14,2 | 14,6 | 15,6 | 18,6 | 15,3 | 14,6 | 16,1 | 15,9 | 15,7 | 18,0 | 17,9 | 17,8 | 18,1 | 16,6 | 16,6 | 17,6 |     |
|   |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,7  | 1,1  | 2,7  | 16,0 | 16,9 | 13,6 | 10,5 | 10,8 | 11,9 | 14,9 | 11,6 | 10,9 | 12,4 | 12,2 | 12,0 | 14,3 | 14,1 | 14,1 | 14,4 | 12,9 | 12,9 | 13,9 |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 4,1  | 19,2 | 20,1 | 16,8 | 13,7 | 14,0 | 15,1 | 18,1 | 14,8 | 14,1 | 15,6 | 15,4 | 15,2 | 17,5 | 17,3 | 17,3 | 17,6 | 16,1 | 16,1 | 17,1 |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 3,3  | 18,3 | 19,3 | 16,0 | 12,9 | 13,2 | 14,3 | 17,2 | 13,9 | 13,2 | 14,8 | 14,5 | 14,4 | 16,7 | 16,5 | 16,4 | 16,8 | 15,3 | 15,3 | 16,3 |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 16,6 | 17,5 | 12,7 | 9,6  | 9,9  | 11,0 | 11,4 | 10,6 | 10,0 | 13,1 | 12,8 | 12,6 | 13,4 | 13,2 | 14,7 | 15,1 | 13,5 | 13,5 | 14,6 |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,0  | 1,2  | 3,2  | 3,0  | 3,1  | 2,5  | 2,6  | 4,2  | 4,8  | 4,6  | 4,4  | 4,9  | 4,8  | 5,6  | 4,4  | 6,3  | 6,3  | 7,3  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,9  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 2,9  | 3,5  | 5,1  | 5,7  | 5,6  | 5,1  | 5,7  | 5,5  | 5,6  | 5,1  | 7,2  | 7,2  | 8,2  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 2,6  | 2,4  | 2,1  | 1,3  | 2,0  | 3,6  | 4,2  | 4,1  | 3,6  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 3,5  | 5,7  | 5,7  | 6,7  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,6  | 2,0  | 1,9  | 0,9  | 0,9  | 1,8  | 1,6  | 1,4  | 4,4  | 4,3  | 4,4  | 3,9  | 3,9  | 3,9  | 4,9  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,7  | 1,9  | 1,1  | 1,2  | 2,0  | 1,9  | 1,4  | 4,1  | 3,9  | 4,0  | 3,5  | 3,5  | 3,5  | 4,5  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,3  | 1,7  | 3,3  | 3,9  | 3,8  | 3,3  | 4,5  | 4,4  | 4,0  | 4,0  | 5,4  | 5,4  | 6,4  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,2  | 2,8  | 3,4  | 3,2  | 2,7  | 3,6  | 3,5  | 3,6  | 3,1  | 4,9  | 4,9  | 5,9  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,7  | 2,6  | 2,5  | 2,0  | 4,4  | 4,2  | 4,3  | 3,8  | 4,1  | 4,1  | 5,1  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,7  | 0,7  | 0,4  | 4,6  | 4,5  | 4,4  | 4,1  | 3,0  | 3,0  | 4,0  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,3  | 0,7  | 5,3  | 5,1  | 4,5  | 4,8  | 3,0  | 3,0  | 4,0  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,4  | 5,1  | 5,0  | 4,3  | 4,6  | 2,8  | 2,8  | 3,8  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 4,6  | 4,5  | 4,0  | 4,1  | 2,5  | 2,5  | 3,6  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,7  | 2,6  | 2,1  | 6,8  | 6,8  | 7,8  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  | 1,3  | 6,6  | 6,6  | 5,7  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,7  | 5,9  | 4,5  | 4,8  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 6,2  | 4,7  | 5,1  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 0,8  | 1,5  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 1,4  |     |
|   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 0    | 2,9 |

### 3 Rozvoz obědů – metoda zdvojení minimální kostry a Christofidova metoda (využití Borůvkova algoritmu)

Borůvkův algoritmus v rámci metody zdvojení minimální kostry použijeme pro určení nejkratší možné rozvozové trasy společnosti SATO Hradec Králové, v.o.s. se sídlem v Jaroměři. Tato společnost se zabývá výrobou a rozvozem obědů do domácností, firem a na různé akce. V současné době má celkem pět rozvozových tras. [23] Zde je spočítána nejkratší možná cesta pro jednu jejich rozvozovou trasu. Obce, které se v této trase objíždějí, jsou znázorněny v tabulce 8 v pořadí, ve kterém jsou objížděny. Současná délka této trasy je 69,1 km (vč. návratu zpět do Jaroměře).

Tabulka 8. Rozvoz obědů – seznam obcí (Zdroj: [23])

|   |                       |
|---|-----------------------|
| A | Jaroměř               |
| B | Vlčkovice             |
| C | Choustníkovo Hradiště |
| D | Kohoutov              |
| E | Hajnice               |
| F | Střítež               |
| G | Výšinka               |
| H | Kocbeře               |
| I | Dvůr Králové          |
| J | Zboží                 |
| K | Kuks                  |
| L | Brod                  |
| M | Hořenice              |
| N | Heřmanice             |

Vzdálenosti mezi jednotlivými obcemi v km jsou zaznamenány v tabulce 9.

Tabulka 9. Rozvoz obědů – matice vzdáleností obcí (Zdroj: vlastní – zpracováno na základě [23] s pomocí [21])

|   | A    | B    | C    | D    | E    | F    | G    | H    | I    | J    | K    | L    | M    | N    |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| A | 0    | 12,0 | 10,9 | 15,4 | 22,1 | 22,3 | 17,8 | 14,4 | 15,6 | 12,8 | 9,0  | 5,8  | 4,0  | 4,7  |
| B | 12,0 | 0    | 3,2  | 7,8  | 14,4 | 14,6 | 10,1 | 6,7  | 7,9  | 5,2  | 4,4  | 6,2  | 8,6  | 7,2  |
| C | 10,9 | 3,2  | 0    | 4,5  | 11,9 | 12,1 | 7,6  | 4,2  | 5,4  | 2,6  | 3,3  | 5,2  | 7,5  | 6,1  |
| D | 15,4 | 7,8  | 4,5  | 0    | 9,3  | 9,5  | 5,0  | 5,2  | 9,9  | 7,2  | 7,9  | 9,7  | 12,1 | 10,7 |
| E | 22,1 | 14,4 | 11,9 | 9,3  | 0    | 7,9  | 4,3  | 7,7  | 12,4 | 10,6 | 14,5 | 16,4 | 18,7 | 17,4 |
| F | 22,3 | 14,6 | 12,1 | 9,5  | 7,9  | 0    | 4,5  | 7,9  | 12,6 | 10,8 | 14,7 | 16,6 | 18,9 | 17,6 |
| G | 17,8 | 10,1 | 7,6  | 5,0  | 4,3  | 4,5  | 0    | 3,4  | 8,1  | 6,3  | 10,2 | 12,1 | 14,4 | 13,1 |
| H | 14,4 | 6,7  | 4,2  | 5,2  | 7,7  | 7,9  | 3,4  | 0    | 4,7  | 2,9  | 6,8  | 8,7  | 11,0 | 9,7  |
| I | 15,6 | 7,9  | 5,4  | 9,9  | 12,4 | 12,6 | 8,1  | 4,7  | 0    | 2,6  | 7,9  | 9,7  | 12,1 | 10,7 |
| J | 12,8 | 5,2  | 2,6  | 7,2  | 10,6 | 10,8 | 6,3  | 2,9  | 2,6  | 0    | 5,3  | 7,1  | 9,5  | 8,1  |

|   |     |     |     |      |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| K | 9,0 | 4,4 | 3,3 | 7,9  | 14,5 | 14,7 | 10,2 | 6,8  | 7,9  | 5,3 | 0   | 3,2 | 5,6 | 4,2 |
| L | 5,8 | 6,2 | 5,2 | 9,7  | 16,4 | 16,6 | 12,1 | 8,7  | 9,7  | 7,1 | 3,2 | 0   | 2,4 | 1,1 |
| M | 4,0 | 8,6 | 7,5 | 12,1 | 18,7 | 18,9 | 14,4 | 11,0 | 12,1 | 9,5 | 5,6 | 2,4 | 0   | 1,4 |
| N | 4,7 | 7,2 | 6,1 | 10,7 | 17,4 | 17,6 | 13,1 | 9,7  | 10,7 | 8,1 | 4,2 | 1,1 | 1,4 | 0   |

Nejprve Borůvkovým algoritmem určíme minimální kostru tohoto grafu. V prvním kroku je potřeba pro každou obec obarvit hranu s nejmenším ohodnocením, tj. s nejkratší vzdáleností do jiné obce. Z obce s označením A je nejmenší vzdálenost do obce s označením M. Z M je to nejbližší do N. Z obce s označením N je to nejbližší do L a stejně tak z L je to nejbližší do N. Takto by se určily nejkratší vzdálenosti pro všechny obce (viz tabulka 10).

Tabulka 10. Rozvoz obědů – hledání minimální kostry – 1. krok (Zdroj: vlastní s pomocí [21])

|   | A    | B    | C    | D    | E    | F    | G    | H    | I    | J    | K    | L    | M    | N    |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| A | 0    | 12,0 | 10,9 | 15,4 | 22,1 | 22,3 | 17,8 | 14,4 | 15,6 | 12,8 | 9,0  | 5,8  | 4,0  | 4,7  |
| B | 12,0 | 0    | 3,2  | 7,8  | 14,4 | 14,6 | 10,1 | 6,7  | 7,9  | 5,2  | 4,4  | 6,2  | 8,6  | 7,2  |
| C | 10,9 | 3,2  | 0    | 4,5  | 11,9 | 12,1 | 7,6  | 4,2  | 5,4  | 2,6  | 3,3  | 5,2  | 7,5  | 6,1  |
| D | 15,4 | 7,8  | 4,5  | 0    | 9,3  | 9,5  | 5,0  | 5,2  | 9,9  | 7,2  | 7,9  | 9,7  | 12,1 | 10,7 |
| E | 22,1 | 14,4 | 11,9 | 9,3  | 0    | 7,9  | 4,3  | 7,7  | 12,4 | 10,6 | 14,5 | 16,4 | 18,7 | 17,4 |
| F | 22,3 | 14,6 | 12,1 | 9,5  | 7,9  | 0    | 4,5  | 7,9  | 12,6 | 10,8 | 14,7 | 16,6 | 18,9 | 17,6 |
| G | 17,8 | 10,1 | 7,6  | 5,0  | 4,3  | 4,5  | 0    | 3,4  | 8,1  | 6,3  | 10,2 | 12,1 | 14,4 | 13,1 |
| H | 14,4 | 6,7  | 4,2  | 5,2  | 7,7  | 7,9  | 3,4  | 0    | 4,7  | 2,9  | 6,8  | 8,7  | 11,0 | 9,7  |
| I | 15,6 | 7,9  | 5,4  | 9,9  | 12,4 | 12,6 | 8,1  | 4,7  | 0    | 2,6  | 7,9  | 9,7  | 12,1 | 10,7 |
| J | 12,8 | 5,2  | 2,6  | 7,2  | 10,6 | 10,8 | 6,3  | 2,9  | 2,6  | 0    | 5,3  | 7,1  | 9,5  | 8,1  |
| K | 9,0  | 4,4  | 3,3  | 7,9  | 14,5 | 14,7 | 10,2 | 6,8  | 7,9  | 5,3  | 0    | 3,2  | 5,6  | 4,2  |
| L | 5,8  | 6,2  | 5,2  | 9,7  | 16,4 | 16,6 | 12,1 | 8,7  | 9,7  | 7,1  | 3,2  | 0    | 2,4  | 1,1  |
| M | 4,0  | 8,6  | 7,5  | 12,1 | 18,7 | 18,9 | 14,4 | 11,0 | 12,1 | 9,5  | 5,6  | 2,4  | 0    | 1,4  |
| N | 4,7  | 7,2  | 6,1  | 10,7 | 17,4 | 17,6 | 13,1 | 9,7  | 10,7 | 8,1  | 4,2  | 1,1  | 1,4  | 0    |

Vznikly dvě komponenty -  $\{A; K; L; M; N\}$  a  $\{B; C; D; E; F; G; H; I; J\}$ . Tedy ještě není nalezena minimální kostra grafu. V druhé iteraci hledáme takovou hranu s minimálním ohodnocením, která vede z jedné obarvené komponenty do druhé. Z každého vrcholu komponenty  $\{A; K; L; M; N\}$  je to nejbližší do vrcholu C, a to takto:

- hrana AC má délku 10,9 km
- hrana KC má délku 3,3 km
- hrana LC má délku 5,2 km
- hrana MC má délku 7,5 km
- hrana NC má délku 6,1 km

Z těchto hran vybereme tu s nejmenším ohodnocením, tedy obarvíme hranu KC. Tím získáváme minimální kostru tohoto grafu (viz tabulka 11).

Tabulka 11. Rozvoz obědů – hledání minimální kostry – výsledná minimální kostra (Zdroj: vlastní s pomocí [21])

|   | A    | B    | C    | D    | E    | F    | G    | H    | I    | J    | K    | L    | M    | N    |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| A | 0    | 12,0 | 10,9 | 15,4 | 22,1 | 22,3 | 17,8 | 14,4 | 15,6 | 12,8 | 9,0  | 5,8  | 4,0  | 4,7  |
| B | 12,0 | 0    | 3,2  | 7,8  | 14,4 | 14,6 | 10,1 | 6,7  | 7,9  | 5,2  | 4,4  | 6,2  | 8,6  | 7,2  |
| C | 10,9 | 3,2  | 0    | 4,5  | 11,9 | 12,1 | 7,6  | 4,2  | 5,4  | 2,6  | 3,3  | 5,2  | 7,5  | 6,1  |
| D | 15,4 | 7,8  | 4,5  | 0    | 9,3  | 9,5  | 5,0  | 5,2  | 9,9  | 7,2  | 7,9  | 9,7  | 12,1 | 10,7 |
| E | 22,1 | 14,4 | 11,9 | 9,3  | 0    | 7,9  | 4,3  | 7,7  | 12,4 | 10,6 | 14,5 | 16,4 | 18,7 | 17,4 |
| F | 22,3 | 14,6 | 12,1 | 9,5  | 7,9  | 0    | 4,5  | 7,9  | 12,6 | 10,8 | 14,7 | 16,6 | 18,9 | 17,6 |
| G | 17,8 | 10,1 | 7,6  | 5,0  | 4,3  | 4,5  | 0    | 3,4  | 8,1  | 6,3  | 10,2 | 12,1 | 14,4 | 13,1 |
| H | 14,4 | 6,7  | 4,2  | 5,2  | 7,7  | 7,9  | 3,4  | 0    | 4,7  | 2,9  | 6,8  | 8,7  | 11,0 | 9,7  |
| I | 15,6 | 7,9  | 5,4  | 9,9  | 12,4 | 12,6 | 8,1  | 4,7  | 0    | 2,6  | 7,9  | 9,7  | 12,1 | 10,7 |
| J | 12,8 | 5,2  | 2,6  | 7,2  | 10,6 | 10,8 | 6,3  | 2,9  | 2,6  | 0    | 5,3  | 7,1  | 9,5  | 8,1  |
| K | 9,0  | 4,4  | 3,3  | 7,9  | 14,5 | 14,7 | 10,2 | 6,8  | 7,9  | 5,3  | 0    | 3,2  | 5,6  | 4,2  |
| L | 5,8  | 6,2  | 5,2  | 9,7  | 16,4 | 16,6 | 12,1 | 8,7  | 9,7  | 7,1  | 3,2  | 0    | 2,4  | 1,1  |
| M | 4,0  | 8,6  | 7,5  | 12,1 | 18,7 | 18,9 | 14,4 | 11,0 | 12,1 | 9,5  | 5,6  | 2,4  | 0    | 1,4  |
| N | 4,7  | 7,2  | 6,1  | 10,7 | 17,4 | 17,6 | 13,1 | 9,7  | 10,7 | 8,1  | 4,2  | 1,1  | 1,4  | 0    |

Nyní přistoupíme k druhému kroku, kdy zdvojíme všechny hrany minimální kostry. Dostáváme graf, jehož vrcholy jsou sudého stupně, a tedy můžeme nalézt eulerův tah. Začátek je ve vrcholu A, kde se nachází sídlo společnosti. Odtud je možné jít pouze do vrcholu M, tedy jednu hranu, která spojuje vrcholy A a M, obarvíme. Z vrcholu M jdou dvě hrany do N a jedna zpět do A. Ještě jsme neprošli všechny vrcholy, tedy se do A nelze vrátit, pokračujeme tedy do N. Takto by postup pokračoval dál. Výsledný eulerův tah má podobu: A-M-N-L-K-C-B-C-D-C-J-H-G-E-G-F-G-H-J-I-J-C-K-L-N-M-A.

V posledním kroku algoritmu vynecháme ty vrcholy, které se již v posloupnosti vrcholů objevily. Tím získáme výsledný hamiltonův cyklus: A-M-N-L-K-C-B-D-J-H-G-E-F-I-A (viz tabulka 12 – vzdálenosti obarvené modře). Celková délka vypočítané rozvozné trasy je 70,7 km, což je více, než má současná trasa.

Tabulka 12. Rozvoz obědů – metoda zdvojení minimální kostry – řešení (Zdroj: vlastní s pomocí [21])

|   | A    | B    | C    | D    | E    | F    | G    | H    | I    | J    | K    | L    | M    | N    |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| A | 0    | 12,0 | 10,9 | 15,4 | 22,1 | 22,3 | 17,8 | 14,4 | 15,6 | 12,8 | 9,0  | 5,8  | 4,0  | 4,7  |
| B | 12,0 | 0    | 3,2  | 7,8  | 14,4 | 14,6 | 10,1 | 6,7  | 7,9  | 5,2  | 4,4  | 6,2  | 8,6  | 7,2  |
| C | 10,9 | 3,2  | 0    | 4,5  | 11,9 | 12,1 | 7,6  | 4,2  | 5,4  | 2,6  | 3,3  | 5,2  | 7,5  | 6,1  |
| D | 15,4 | 7,8  | 4,5  | 0    | 9,3  | 9,5  | 5,0  | 5,2  | 9,9  | 7,2  | 7,9  | 9,7  | 12,1 | 10,7 |
| E | 22,1 | 14,4 | 11,9 | 9,3  | 0    | 7,9  | 4,3  | 7,7  | 12,4 | 10,6 | 14,5 | 16,4 | 18,7 | 17,4 |
| F | 22,3 | 14,6 | 12,1 | 9,5  | 7,9  | 0    | 4,5  | 7,9  | 12,6 | 10,8 | 14,7 | 16,6 | 18,9 | 17,6 |

|   |      |      |     |      |      |      |      |      |      |     |      |      |      |      |
|---|------|------|-----|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|
| G | 17,8 | 10,1 | 7,6 | 5,0  | 4,3  | 4,5  | 0    | 3,4  | 8,1  | 6,3 | 10,2 | 12,1 | 14,4 | 13,1 |
| H | 14,4 | 6,7  | 4,2 | 5,2  | 7,7  | 7,9  | 3,4  | 0    | 4,7  | 2,9 | 6,8  | 8,7  | 11,0 | 9,7  |
| I | 15,6 | 7,9  | 5,4 | 9,9  | 12,4 | 12,6 | 8,1  | 4,7  | 0    | 2,6 | 7,9  | 9,7  | 12,1 | 10,7 |
| J | 12,8 | 5,2  | 2,6 | 7,2  | 10,6 | 10,8 | 6,3  | 2,9  | 2,6  | 0   | 5,3  | 7,1  | 9,5  | 8,1  |
| K | 9,0  | 4,4  | 3,3 | 7,9  | 14,5 | 14,7 | 10,2 | 6,8  | 7,9  | 5,3 | 0    | 3,2  | 5,6  | 4,2  |
| L | 5,8  | 6,2  | 5,2 | 9,7  | 16,4 | 16,6 | 12,1 | 8,7  | 9,7  | 7,1 | 3,2  | 0    | 2,4  | 1,1  |
| M | 4,0  | 8,6  | 7,5 | 12,1 | 18,7 | 18,9 | 14,4 | 11,0 | 12,1 | 9,5 | 5,6  | 2,4  | 0    | 1,4  |
| N | 4,7  | 7,2  | 6,1 | 10,7 | 17,4 | 17,6 | 13,1 | 9,7  | 10,7 | 8,1 | 4,2  | 1,1  | 1,4  | 0    |

Vyzkoušíme použít Christofidovu metodu, zda nám neposkytne lepší výsledky. První krok – nalezení minimální kostry - mají metody stejný, tedy rovnou v rámci druhého kroku určíme vrcholy lichého stupně, jsou to vrcholy A,B,D,E,F,G,I a J. Spojíme je pomocí metody nejlevnějšího perfektního párování, kde  $m = 8$ .

$$\min z = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 c_{ij}x_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{j-1} x_{ij} + \sum_{k=j+1}^8 x_{jk} = 1.$$

Minimalizujeme tedy rovnici, kde pro lepší orientaci nahradíme číselné označení názvy vrcholů:

$$\begin{aligned} \min z = & c_{AB}x_{AB} + c_{AD}x_{AD} + c_{AE}x_{AE} + c_{AF}x_{AF} + c_{AG}x_{AG} + c_{AI}x_{AI} + c_{AJ}x_{AJ} + c_{BD}x_{BD} \\ & + c_{BE}x_{BE} + c_{BF}x_{BF} + c_{BG}x_{BG} + c_{BI}x_{BI} + c_{BJ}x_{BJ} + c_{DE}x_{DE} + c_{DF}x_{DF} \\ & + c_{DG}x_{DG} + c_{DI}x_{DI} + c_{DJ}x_{DJ} + c_{EF}x_{EF} + c_{EG}x_{EG} + c_{EI}x_{EI} + c_{EJ}x_{EJ} \\ & + c_{FG}x_{FG} + c_{FI}x_{FI} + c_{FJ}x_{FJ} + c_{GI}x_{GI} + c_{GJ}x_{GJ} + c_{IJ}x_{IJ} \end{aligned}$$

a doplníme ohodnocení hran

$$\begin{aligned} \min z = & 12,0x_{AB} + 15,4x_{AD} + 22,1x_{AE} + 22,3x_{AF} + 17,8x_{AG} + 15,6x_{AI} + 12,8x_{AJ} \\ & + 7,8x_{BD} + 14,4x_{BE} + 14,6x_{BF} + 10,1x_{BG} + 7,9x_{BI} + 5,2x_{BJ} + 9,3x_{DE} \\ & + 9,5x_{DF} + 5,0x_{DG} + 9,9x_{DI} + 7,2x_{DJ} + 7,9x_{EF} + 4,3x_{EG} + 12,4x_{EI} \\ & + 10,6x_{EJ} + 4,5x_{FG} + 12,6x_{FI} + 10,8x_{FJ} + 8,1x_{GI} + 6,3x_{GJ} + 2,6x_{IJ} \end{aligned}$$

za podmínek

$$x_{AB} + x_{AD} + x_{AE} + x_{AF} + x_{AG} + x_{AI} + x_{AJ} = 1,$$

$$x_{BA} + x_{BD} + x_{BE} + x_{BF} + x_{BG} + x_{BI} + x_{BJ} = 1,$$

$$x_{DA} + x_{DB} + x_{DE} + x_{DF} + x_{DG} + x_{DI} + x_{DJ} = 1,$$

$$x_{EA} + x_{EB} + x_{ED} + x_{EF} + x_{EG} + x_{EI} + x_{EJ} = 1,$$

$$x_{FA} + x_{FB} + x_{FD} + x_{FE} + x_{FG} + x_{FI} + x_{FJ} = 1,$$

$$x_{GA} + x_{GB} + x_{GD} + x_{GE} + x_{GF} + x_{GI} + x_{GJ} = 1,$$

$$x_{IA} + x_{IB} + x_{ID} + x_{IE} + x_{IF} + x_{IG} + x_{IJ} = 1,$$

$$x_{JA} + x_{JB} + x_{JD} + x_{JE} + x_{JF} + x_{JG} + x_{JI} = 1.$$

Postup výpočtu:

1. Zvolíme-li  $x_{AB} = 1$

$$1 + x_{AD} + x_{AE} + x_{AF} + x_{AG} + x_{AI} + x_{AJ} = 1$$

$$\rightarrow x_{AD} = x_{AE} = x_{AF} = x_{AG} = x_{AI} = x_{AJ} = 0,$$

$$0 + x_{BD} + x_{BE} + x_{BF} + x_{BG} + x_{BI} + x_{BJ} = 1,$$

$$0 + x_{DB} + x_{DE} + x_{DF} + x_{DG} + x_{DI} + x_{DJ} = 1,$$

$$0 + x_{EB} + x_{ED} + x_{EF} + x_{EG} + x_{EI} + x_{EJ} = 1,$$

$$0 + x_{FB} + x_{FD} + x_{FE} + x_{FG} + x_{FI} + x_{FJ} = 1,$$

$$0 + x_{GB} + x_{GD} + x_{GE} + x_{GF} + x_{GI} + x_{GJ} = 1,$$

$$0 + x_{IB} + x_{ID} + x_{IE} + x_{IF} + x_{IG} + x_{IJ} = 1,$$

$$0 + x_{JB} + x_{JD} + x_{JE} + x_{JF} + x_{JG} + x_{JI} = 1.$$

Stále máme příliš mnoho neznámých, tedy bychom opět zvolili například  $x_{BD} = 1 \rightarrow x_{BE} = x_{BF} = x_{BG} = x_{BI} = x_{BJ} = 0$ . Opět bychom zjistili, že máme příliš mnoho neznámých, učinili bychom další volbu atd. Tedy sepsat zde všechny možné kombinace by bylo zdlouhavé a opravdu velmi časově náročné. Vezmeme si tedy na pomoc statistický software R, ve kterém s využitím knihovny „*lpSolve*“ tento minimalizační problém vyřešíme (viz obrázek 36).





## Závěr

Tato práce představila možná využití minimální kostry grafu v praxi. Nejprve jsme uvedli základní pojmy teorie grafů, byly definovány neorientované a orientované grafy, souvislost grafu, stromy, ohodnocené grafy, a především kostry grafu. Postupně jsme se skrze teorii dostali až k problematice minimální kostry grafu, které je věnována kapitola druhá. Seznámili jsme se se známými přístupy k jejímu řešení, Borůvkovým, Jarníkovým a Kruskalovým a jejich postupy si ukázali na jednoduchých příkladech. Také jsme se v této kapitole věnovali algoritmům, které řeší problém obchodního cestujícího a využívají ve svých postupech minimální kostru grafu. Zmínili jsme dvě metody – metodu zdvojení minimální kostry grafu a Christofidovu metodu. Poslední část teoretické sekce se zabývá možnými analogiemi k základní úloze.

V praktické části jsme pak všechny tři zmíněné přístupy, které řeší hledání minimální kostry grafu, použili na reálných příkladech. První aplikace se týkala propojení rehabilitačního zařízení optickou sítí. Data nám poskytla společnost Ariston Pardubice, spol. s.r.o. a s využitím Jarníkova algoritmu jsme jí vypočítali, jak nejlépe propojit všech 17 budov tohoto zařízení tak, aby spotřebovali co nejméně kabelu.

Kruskalův algoritmus byl aplikován skrze metodu zdvojení minimální kostry grafu při výpočtu nejkratší rozvozové trasy společnosti Mléko z farmy, která rozváží mléčné výrobky mimo jiné po Pardubicích a Chrudimi. Trasa má 29 zastávek a díky tomuto algoritmu jsme zjistili, že by společnost mohla ujet o 12,1 km méně, pokud by změnila pořadí zastávek dle tohoto výpočtu.

Poslední aplikací, ve které jsme použili Borůvkův algoritmus, je rozvoz obědů společnosti SATO Hradec Králové, v.o.s. Z důvodu časové náročnosti Christofidovy metody jsme pro výpočty chtěli opět použít metodu zdvojení minimální kostry grafu. Avšak tato metoda selhala, neboť poskytla celkovou trasu delší, než je její dosavadní délka. Rozhodli jsme se tedy použít Christofidovu metodu a s pomocí softwaru R jsme pro společnost získali trasu kratší, než je trasa současná, a to o 1,3 km.

Tato práce pro mě byla velkým přínosem, neboť jsem si prohloubila znalosti teorie grafů a rozšířila je o problematiku minimální kostry grafu a algoritmy problému obchodního cestujícího, které minimální kostru využívají. Následně jsem tyto postupy použila při reálné aplikaci, a tedy se naučila, jak je využít v praxi.

## Seznam použité literatury

- [1] BORŮVKA, O. *O jistém problému minimálním*. Práce Mor. Přírodověd. Spol. v Brně 3 (1926), 37–58.
- [2] BORŮVKA, O. *Příspěvek k řešení otázky ekonomické stavby elektrovodních sítí*. Elektrotechnický obzor 15 (1926), 153–154.
- [3] BERGE Claude. *The theory of graphs*. Dover Publications, 2001. ISBN 0-486-41975-4
- [4] ČERNÝ, Jakub. *Základní grafové algoritmy*. Praha: České vysoké učení technické, 2013. ISBN 978-80-01-05258-7... <http://kam.mff.cuni.cz/~kuba/ka/>
- [5] DEMEL, Jiří. *Grafy a jejich aplikace*. Praha: Academia, 2002. ISBN 80-200-0990-6
- [6] GLOVER, F., KLINGMAN, D., *Finding minimum spanning trees with a fixed number of links at a node*. Combinatorial programming: methods and application. 1975. Dordrecht, Reidel.
- [7] GRAHAM, R. L., HELL, P.: *On the History of the Minimum Spanning Tree Problem*. Annals of the History of Computing 7, 1 (1985), 43–57.
- [8] CHRISTOFIDES, Nicos. *Worst-Case Analysis of a New Heuristic for the Travelling Salesman Problem* [online]. Graduate School of Industrial Administration, CMU, 1976. Technical report No. 388 [vid. 25. května 2013]. Dostupné z: <<http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?Location=U2&doc=GetTRDoc.pdf&AD=ADA025602>>
- [9] JARNÍK, V.: *O jistém problému minimálním*. Práce Mor. Přírodověd. Spol. v Brně 6 (1930), 57–63.
- [10] JIROVSKÝ, Lukáš. Maximální kostra. *Teorie grafů* [online]. Diplomová práce, MFF UK Matematika - MIUZV [cit. 2018-03-10]. Dostupné z: <http://teorie-grafu.cz/vybrane-problemy/maximalni-kostra.php>
- [11] KRUSKAL, J. B.: *On the shortest spanning tree of a graph and the travelling salesman problem*. Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 48–50.
- [12] KUČERA, Petr. *Modely teorie grafů I*. Praha, 2008. Skripta. Česká zemědělská univerzita v Praze.
- [13] KUKULA, Lukáš. *Experimentální ověření účinnosti Christofidesova algoritmu a jeho optimalizace pro s-t variantu TSP*. Brno, 2013. Diplomová práce. Masarykova univerzita.

- [14] MACHKOVÁ, Radka. *Problém obchodního cestujícího a jeho modifikace*. Pardubice, 2016. Diplomová. Univerzita Pardubice Fakulta ekonomicko-správní.
- [15] MATOUŠEK, Jiří a NEŠETŘIL Jaroslav. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Vyd. 2., opr., (V nakl. Karolinum 1.). Praha: Karolinum, 2000. ISBN 80-246-0084-6.
- [16] MILKOVÁ, Eva. *Problém minimální kostry grafu*. Hradec Králové: Gaudeamus, 2001. ISBN 80-7041-436-7
- [17] MILKOVÁ, Eva. *Teorie grafů a grafové algoritmy*. Hradec Králové: Gaudeamus, 2013. ISBN 978-80-7435-267-6.
- [18] PLESNÍK, Ján. *Grafové algoritmy*. Bratislava: vydavateľství Slovenské akademie vied, 1983. ISBN 71-023-83.
- [19] ŠUŠOVÁ, Lucia. *Porovnanie metód na riešenie problému obchodného cestujúceho*. Brno, 2011. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně.
- [20] WU, Bang Ye a Kun-Mao CHAO. *Counting Spanning Trees* [online]. [cit. 2018-04-24]. Dostupné z: <<https://pdfs.semanticscholar.org/2a31/4ef5739fb0d98a01623c8ad09ed813f06e6b.pdf>>
- [21] *mapy.cz* [online]. [2017-06-19]. Dostupné z: <<https://mapy.cz>>
- [22] *mlekozfarmy.cz* [online]. [2018-03-24]. Dostupné z: <<https://www.mlekozfarmy.cz>>
- [23] *rozvoz-obedy-jaromer.webnode.cz* [online]. [2018-04-07]. Dostupné z: <<https://rozvoz-obedy-jaromer.webnode.cz>>