

**Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Modely volatility a jejich užití pro modelování kurzů měn

Bc. Kristýna Ilgnerová

**Diplomová práce
2018**

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: 2017/2018

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Kristýna Ilgnerová**
Osobní číslo: **E150025**
Studijní program: **N6209 Systémové inženýrství a informatika**
Studijní obor: **Pojistné inženýrství: Management finančních rizik**
Název tématu: **Modely volatility a jejich užití pro modelování kurzů měn**
Zadávající katedra: **Ústav matematiky a kvantitativních metod**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Cílem práce je představit modely volatility a ukázat jejich aplikaci na modelování vývoje kurzů vybraných měn.

Osnova:

- Volatilita, její druhy a vlastnosti.
- Faktory ovlivňující volatilitu, vztah volatility a měnového rizika.
- Modely volatility.
- Aplikace vhodných modelů volatility na vybrané časové řady kurzů měn.

Rozsah grafických prací: —
Rozsah pracovní zprávy: cca 50 stran
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická
Seznam odborné literatury:

ARLT, Josef a Markéta ARLTOVÁ. Ekonomické časové řady. Praha: Professional Publishing, 2009. ISBN 978-80-86946-85-6.
CIPRA, Tomáš. Finanční ekonometrie. Praha: Ekopress, 2008. ISBN 978-80-86929-43-9.
GOURIEROUX, Christian. ARCH models and financial applications. New York: Springer-Verlag, 1997. Springer series in statistics. ISBN 0-387-94876-7.
TSAY, Ruey S. Analysis of financial time series. 2nd ed. Hoboken: Wiley, c2005. ISBN 0-471-69074-0.
ZAPLETAL, Josef. Úvod do analýzy ekonomických časových řad. Brno: PC-DIR Real, 2000. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-1719-6.




Vedoucí diplomové práce: Mgr. David Zapletal, Ph.D.
Ústav matematiky a kvantitativních metod

Datum zadání diplomové práce: 1. září 2017
Termín odevzdání diplomové práce: 30. dubna 2018



doc. Ing. Romana Provažňáková, Ph.D.
děkanka

L.S.



doc. RNDr. Bohdan Linda, CSc.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 1. září 2017

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako Školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Beru na vědomí, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, a směrnicí Univerzity Pardubice č. 9/2012, bude práce zveřejněna v Univerzitní knihovně a prostřednictvím Digitální knihovny Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 28. 4. 2018

Bc. Kristýna Ilgnerová

PODĚKOVÁNÍ:

Tímto bych ráda poděkovala svému vedoucímu práce Mgr. Davidu Zapletalovi, Ph.D. za jeho odbornou pomoc, cenné rady a čas, který mi věnoval při konzultacích. Dále bych ráda poděkovala své rodině a svému příteli, kteří mě po celou dobu mého studia podporovali.

ANOTACE

Tato práce se zabývá modely volatility a jejich aplikací na měnové kurzy. V teoretické části jsou představeny úroňové modely i modely volatility a je pro ně zaveden matematický aparát. Následně jsou úroňové modely aplikovány na vybrané časové řady směnných kurzů a v případě potřeby doplněny vhodným úroňovým modelem. Současně je uveden také popis řešení a následně je příslušný model využit pro predikci budoucí hodnoty kurzu. Ta je porovnána s hodnotami, za které se v příslušné dny skutečně obchodovalo. Pro účely zpracování byly vybrány směnné kurzy české koruny vůči euru a české koruny vůči americkému dolaru.

KLÍČOVÁ SLOVA

Volatilita, Box-Jenkinsova metodologie, měnové riziko, směnný kurz, model volatility, ARCH, GARCH

TITLE

Models of volatility and their use to modeling of exchange rate.

ANNOTATION

This thesis describes models of volatility and their use to modeling of exchange rate. Each model is described and eventually applied to time series of exchange rates. In this section is provided a description of the solution. Then the relevant model is used to predict the future value of the exchange rate. This prediction is compared with real values, for which was traded in relevant days. Exchange rate CZK/EUR and CZK/USD are selected for processing purpose.

KEYWORDS

Volatility, Box-Jenkins method, currency risk, exchange rate, volatility model, ARCH, GARCH

OBSAH

ÚVOD.....	11
1. VOLATILITA.....	12
1.1. DRUHY VOLATILITY	14
1.1.1. Historická volatilita	14
1.1.2. Implikovaná volatilita.....	15
1.1.3. Fundamentální a technická volatilita	17
1.2. ČÍM JE VOLATILITA OVLIVŇOVÁNA	17
1.3. SPEKULACE NA VYSOKOU MÍRU VOLATILITY	18
1.4. VZTAH VOLATILITY A MĚNOVÉHO RIZIKA	19
2. MĚNOVÝ KURZ	20
2.1. DEFINICE A DĚLENÍ.....	20
2.2. REŽIMY MĚNOVÝCH KURZŮ	21
2.3. KURZOVÉ RIZIKO	21
3. MODELOVÁNÍ VOLATILITY	22
3.1. POJMY	22
3.2. BOX-JENKINSOVA METODOLOGIE	27
3.2.1. Proces klouzavých součtů MA	29
3.2.2. Autoregresní proces AR	29
3.2.3. Smíšený proces ARMA	30
3.2.4. Proces ARIMA	31
3.3. LINEÁRNÍ MODELY VOLATILITY	32
3.3.1. ARCH – autoregressive Conditional Heteroscedasticity.....	33
3.3.2. GARCH – Generalized ARCH.....	35
3.4. NELINEÁRNÍ MODELY VOLATILITY.....	38
3.4.1. EGARCH – Exponential GARCH	38
4. APLIKACE MODELŮ NA VYBRANÉ ČASOVÉ ŘADY KURZŮ MĚN.....	39
4.1. MODELOVÁNÍ VOLATILITY MĚNOVÉHO KURZU CZK/EUR	40
4.1.1. Ověření stacionarity.....	40
4.1.2. Identifikace a diagnostika úrovněového modelu.....	44
4.1.3. Identifikace a diagnostika modelu volatilita	48
4.1.4. Využití modelů pro predikci vývoje kurzu CZK/EUR.....	52
4.2. MODELOVÁNÍ VOLATILITY MĚNOVÉHO KURZU CZK/USD.....	56
4.2.1. Ověření stacionarity.....	56
4.2.2. Identifikace a diagnostika úrovněového modelu.....	59
4.2.3. Využití modelu pro predikci vývoje kurzu CZK/USD.....	62
ZÁVĚR.....	66
POUŽITÁ LITERATURA	68
SEZNAM PŘÍLOH.....	71

SEZNAM TABULEK

Tabulka č. 1: Tvar ACF a PACF procesů $AR(p)$, $MA(q)$ a $ARMA(p,q)$	31
Tabulka č. 2: Bodová a upravená intervalová předpověď pro řadu logaritmů kurzu CZK/EUR	54
Tabulka č. 3: Výsledná intervalová a bodová předpověď pro kurz CZK /EUR s porovnáním reálně obchodovaných hodnot.....	54
Tabulka č. 4: Bodová a intervalová předpověď pro řadu logaritmů kurzu CZK/ USD	63
Tabulka č. 5: Výsledná intervalová a bodová předpověď pro kurz CZK /USD s porovnáním skutečných hodnot.....	64

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek č. 1: Řada denních logaritmických výnosů kurzu CZK/USD od 1.1.2010 do 31.12.2017	13
Obrázek č. 2: Leptokurtické rozdělení standardizovaných reziduí kurzu CZK/EUR.....	14
Obrázek č. 3: Grafické zobrazení implikované volatility.....	16
Obrázek č. 4: Grafické zobrazení stacionární časové řady.....	23
Obrázek č. 5: Korelogram - grafické zobrazení ACF a PACF.....	26
Obrázek č. 6: Průběh denní časové řady směnného kurzu CZK/EUR.....	40
Obrázek č. 7: Průběh logaritmů časové řady kurzu CZK/EUR.....	41
Obrázek č. 8: Korelogram logaritmů časové řady kurzu CZK/EUR.....	41
Obrázek č. 9: Průběh řady logaritmických výnosů směnného kurzu CZK/EUR	42
Obrázek č. 10: Krelogram logaritmických výnosů kurzu CZK/EUR	43
Obrázek č. 11: ADF test stacionarity logaritmických výnosů časové řady CZK/EUR.....	44
Obrázek č. 12: Korelogram logaritmických výnosů CZK/EUR.....	45
Obrázek č. 13: Odhad parametrů pro model $ARIMA(0,1,0)$ pro řadu kurzu CZK/EUR.....	46
Obrázek č. 14: ARCH test řady zpoždění dva pro řadu logaritmických výnosů kurzu CZK/EUR.....	47
Obrázek č. 15: ARCH test řady zpoždění pět pro řadu logaritmických výnosů kurzu CZK/EUR.....	47
Obrázek č. 16: Korelogram čtverců reziduí logaritmických výnosů kurzu CZK/EUR.....	48
Obrázek č. 17: Odhad parametrů modelu $GARCH(1,1)$ se standardizovanými rezidui	49
Obrázek č. 18: Korelogram čtverců standardizovaných reziduí logaritmických výnosů kurzu CZK/EUR.....	50
Obrázek č. 19: Histogram standardizovaných reziduí logaritmických výnosů kurzu CZK/EUR	51
Obrázek č. 20: Odhad parametrů modelu $GARCH(1,1)$ bez standardizovaných reziduí.....	51
Obrázek č. 21: Intervalová předpověď pro logaritmické diference získané úrovnovým modelem	53
Obrázek č. 22: Intervalová předpověď pro logaritmické diference získané modelem $GARCH$	53
Obrázek č. 23: Intervalová predikce pro řadu logaritmů kurzu CZK/EUR.....	54
Obrázek č. 24: Porovnání bodové a intervalové predikce se skutečnými hodnotami kurzu CZK/EUR.....	56
Obrázek č. 25: Průběh denní časové řady směnného kurzu CZK/USD	57
Obrázek č. 26: Průběh logaritmů časové řady kurzu CZK/USD.....	57
Obrázek č. 27: Korelogram logaritmů časové řady kurzu CZK/USD.....	58
Obrázek č. 28: Průběh řady logaritmických výnosů směnného kurzu CZK/USD	59

Obrázek č. 29: Korelogram logaritmických výnosů kurzu CZK/USD	59
Obrázek č. 30: Odhad parametrů modelu ARIMA(2,1,2) pro logaritmickou řadu kurzu CZK/USD	60
Obrázek č. 31: ARCH test řádu dva reziduí logaritmické řady CZK/USD.....	61
Obrázek č. 32: ARCH test řádu pět reziduí logaritmické řady CZK/USD.....	61
Obrázek č. 33: Leptokurtické rozdělení reziduí logaritmů CZK/USD.....	62
Obrázek č. 34: Intervalová predikce pro řadu logaritmických výnosů řady kurzu CZK/USD	63
Obrázek č. 35: Predikce pro řadu logaritmů kurzu CZK/USD	64
Obrázek č. 36: Porovnání bodové a intervalové predikce se skutečnými hodnotami kurzu CZK/USD	65

SEZNAM ZKRATEK

ACF	Autokorelační funkce
ADF	Rozšířený Dickeyův Fullerův test
CZK	Česká koruna
ČNB	Česká národní banka
EUR	Euro
PACF	Parciální autokorelační funkce
VaR	Value at Risk
USD	Americký dolar

ÚVOD

Modelování volatility současně s předpovídáním jejího chování je diskutovaným tématem napříč celou ekonomikou. Finanční trhy musejí dennodenně reagovat na mnoho faktorů, které ovlivňují ceny aktiv. S ohledem na to, jak jsou tato aktiva na změny citlivá, je kolísání jejich ceny či kurzu různé. U některých aktiv je nutné pracovat s velkou volatilitou, jiná aktiva, zejména konzervativnější, mají volatilitu podstatně menší. Obecně je volatilita širokou veřejností chápána spíše v negativním slova smyslu. Nicméně investor, který se nebojí riskovat, může díky vysoké volatilitě dosáhnout také vysokých zisků. S tím je na druhou stranu spjata také možná ztráta.

Modelováním volatility lze získat jakousi představu o tom, jak se bude trh vyvíjet a těmto výsledkům následně přizpůsobit strategii obchodování, řízení společnosti či investování.

Tato práce se věnuje modelování vývoje dvou měnových párů, na kterých je ukázáno, jak se případně vybrané modely volatility na časovou řadu aplikují a jak se dají využít k predikci budoucího vývoje.

Práce je členěna do čtyř kapitol. První část se věnuje volatilitě jako stěžejnímu pojmu celé práce. Jsou zde popsány druhy volatility, faktory, které na ni působí a ovlivňují ji, je zmíněn vztah volatility a měnového rizika a také její vlastnosti. Taktéž je zahrnuta krátká podkapitola věnující se strategii založené na volatilitě.

Druhým důležitým pojmem této práce je měnový kurz, kterému je věnována druhá kapitola. V ní je měnový kurz definován a je zde uvedeno jeho členění. Jsou popsány režimy devizových kurzů, které může centrální banka využívat. Také je definováno kurzové riziko.

Třetí kapitola se zabývá teoretickým popisem úrovnových modelů a modelů volatility. Zahrnuje Box-Jenkinsovu metodologii a teoretický popis lineárních a nelineárních modelů volatility, přičemž pro každou dílčí část je zaveden matematický popis vybraných modelů.

Poslední, čtvrtá část, se věnuje praktické ukázce modelování volatility za použití modelů uvedených v předchozích kapitolách.

Cílem práce je využití popsaných modelů volatility na vybrané časové řady směnných kurzů. Pro tyto účely jsou využita data pro směnný kurz CZK/EUR a CZK/USD. Dále jsou tyto modely použity pro predikci budoucích hodnot směnného kurzu a pro porovnání se skutečnými hodnotami, za které se v příslušné dny měny obchodovaly.

1. VOLATILITA

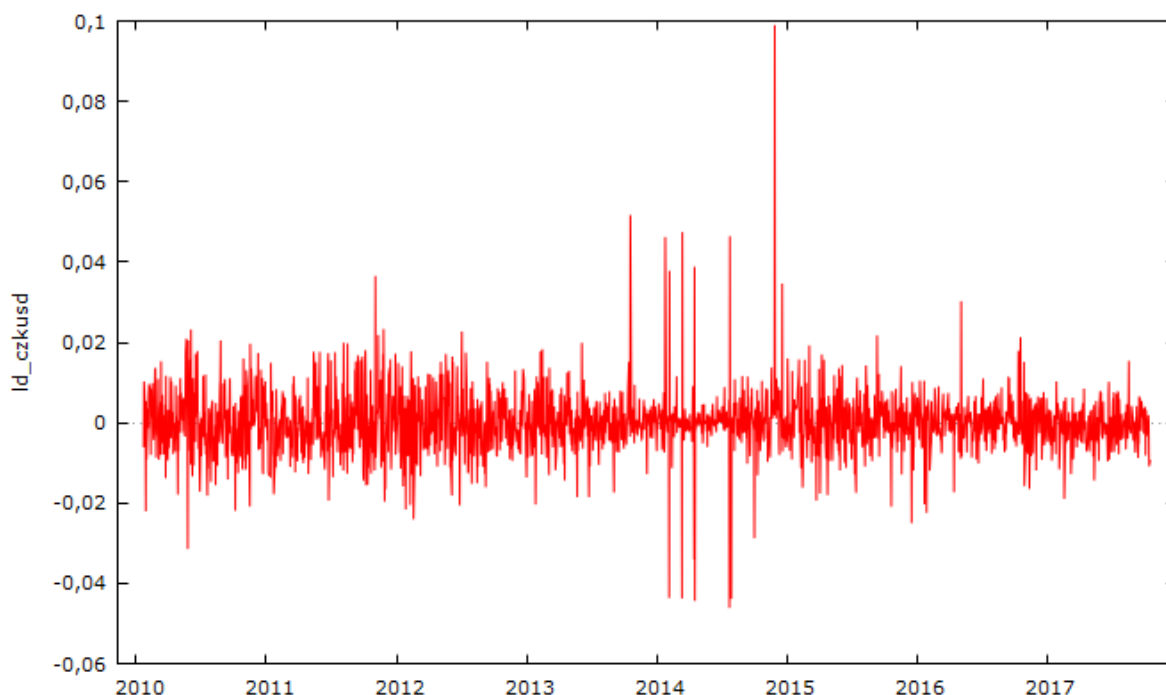
Slovo volatilita má své kořeny v latině, kde slovo *volare* znamená létat. Jinak může být označena jako nestálost, odchylka od průměrných nebo očekávaných hodnot, či nestabilita. Označuje také míru kolísání hodnoty aktiva, případně jeho výnosové míry. Její velikost se s časem mění, je závislá na dalších faktorech a proto je poměrně těžko měřitelná. Na trzích se střídají období, kdy se obchody uzavírají s větší nejistotou s obdobími poměrného klidu – tehdy se dají přesněji určit budoucí výnosy investic. Důležitá je pak správná interpretace naměřených hodnot – je důležité pamatovat na to, že volatilita je jednou z měr rizika, nikoli rizikem samotným.

V závislosti na velikosti proměnlivosti kurzu může být volatilita rozdělena do čtyř kategorií:

- malá volatilita – změna do 1%, velmi malá změna kurzů nebo indexu,
- střední volatilita – změna od 1 % do 5 %, větší výkyvy kurzů nebo indexu,
- velká volatilita – změna mezi 5 % a 10 %, značný pohyb kurzů nebo indexu,
- skoková volatilita - jednorázová, neočekávaná a často až radikální změna kurzu nebo indexu. (Duspiva, Tetřevová, 2006: 49)

Při sledování výnosnosti finančních aktiv je možné pozorovat určité charakteristiky pro volatilitu typické. Jsou to konkrétně:

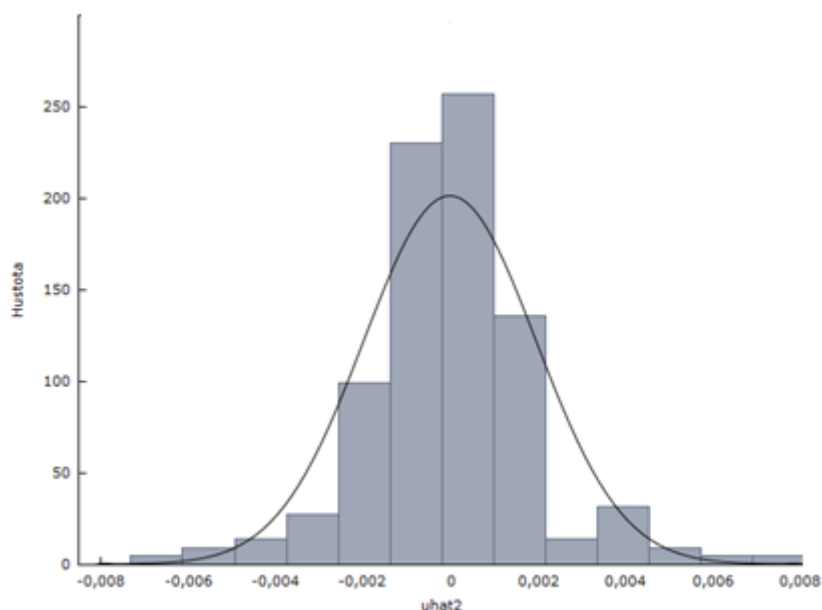
- **shlukování volatility** – tento jev je možné popsat jako sklon volatility vyskytovat se ve shlucích vysokých a nízkých volatilit, což je důsledek proměnlivé volatility. Jinak řečeno, lze očekávat, že velké (případně malé) výkyvy v míře zisku přicházejí zpravidla po větších (menších) předchozích odchylkách. O této vlastnosti je možné se dočíst také jako o „výbuších“ volatility nebo ji najít pod anglickým názvem „*volatility clustering*“. Grafické zobrazení tohoto jevu lze vidět na obrázku č. 1 níže. V roce 2014 lze pozorovat poměrně velké odchylky kurzu dolaru od jeho střední hodnoty, a tedy skutečnost, že volatilita byla oproti předchozímu vývoji opravdu velmi vysoká.



Obrázek č. 1: Řada denních logaritmických výnosů kurzu CZK/USD od 1.1.2010 do 31.12.2017

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018

- **pákový efekt** – stejně jako shlukování volatility má pákový efekt souvislost s její fluktuací v čase, s čímž neumí lineární modely dostatečně uspokojivě pracovat. Znamená to, že „negativní šoky působí na volatilitu jinak než pozitivní šoky ve stejné absolutní výši. Ve dnech, kdy se neobchoduje, se akumuluje informace, což se projevuje zvýšenou volatilitou v následujících obchodních dnech. Na zvýšení volatility má vliv také pravidelné zveřejňování důležitých informací.“ (Arlt, Arltová, 2003: 162)
- **leptokurtické rozdělení** – je typickým rozdělením finančních dat. Má takzvaně „užší pas a těžší konce“, což je způsobeno větší hustotou na koncích a menší hustotou v ramenu v porovnání s normálním rozdělením se stejným rozptylem a stejnou střední hodnotou. Zpravidla má takové rozdělení kladný koeficient špičatosti. Na obrázku č. 2 lze vidět histogram takového rozdělení. Hustota kolem středí hodnoty je výrazně vyšší než u normálního rozdělení, a naopak v koncích hodnoty histogramu přesahují hustotu normálního rozdělení. (GRANT journal – Modelování volatility akciového indexu TRSE 100, 2012), (Kohout, 2013), (Cipra, 2008)



Obrázek č. 2: Leptokurtické rozdělení standardizovaných reziduí kurzu CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

1.1. Druhy volatility

1.1.1. Historická volatilita

Historická volatilita je založena na datech za určité historické období. Původně byla odhadována za použití výběrového rozptylu nebo směrodatné odchylky a jedná se tedy o nejjednodušší přístup. Vzhledem k tomu je i dnes poměrně často využívána, zejména pro určení srovnávacích hodnot pro posouzení efektivnosti sofistikovanějších modelů. Výpočet vychází z následujícího vztahu:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{\sum_{i=t-k}^{t-1} (x_i - \hat{\mu}_t)^2}{k-1}, \quad \text{kde} \quad \hat{\mu}_t = \frac{\sum_{i=t-k}^{t-1} x_i}{k}, \quad (1.1.1.1)$$

kde:

k je délka odhadovaného období.

Rozšířením tohoto přístupu jsou takzvané modely EWMA (*exponentially weighted moving average*). Nejčastěji se používá EWMA-model, který je obdobou jednoduchého exponenciálního vyrovnávání. V porovnání s výpočtem uvedeným výše, má EWMA-model tu výhodu, že při průměrování klesají váhy exponenciálně do minulosti. Tato vlastnost s sebou nese i další přednosti:

- přiřazení větší váhy aktuálním pozorováním, které volatilitu ovlivňují ve větší míře než starší hodnoty,
- odstranění problému odlehlého pozorování s extrémními měřeními.

Na druhou stranu je při tomto přístupu nutné znát odpovědi na následující otázky:

- Jak dlouhou časovou řadu pro výpočet použít?
- Počítat volatilitu z denních / týdenních či ročních dat?

V přístupu EWMA se volatilita odhadne následovně:

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (x_{t-1-j} - \bar{x})^2 = (1 - \lambda)(x_{t-1} - \bar{x})^2 + \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2, \quad (1.1.1.2)$$

kde:

$\hat{\sigma}_{t-1}^2$ označuje odhadnutou volatilitu a současně predikci budoucí volatilitu z času $t-1$,

\bar{x} je průměr dané řady,

λ je předem zvolená diskontní konstanta a ($0 < \lambda < 1$).

Pro časové řady finančních výnosů r_t se vzorec lehce upravuje, neboť se často počítá s průměrným výnosem, který je roven nule. Rovnice je pak modifikovaná do tvaru: (Cipra, 2008)

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j r_{t-1-j}^2 = (1 - \lambda)r_{t-1}^2 + \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2 \quad (1.1.1.3)$$

1.1.2. Implikovaná volatilita

Implikovaná volatilita je stanovena trhem a využívá se zejména v souvislosti s finanční matematikou, například při modelování ceny opce. Volatilita je pak jedním ze vstupních parametrů Black-Scholesova modelu, který je v této oblasti nejznámější. Další parametry se odvíjejí od typu oceňované opce. Je uvažována evropská call opce, která je značena C_t . Do výpočtu tak bude vstupovat: (Cipra, 2008), (Středoevropské centrum pro finance a management – Implikovaná volatilita, 2018)

S_t spotová cena podkladového aktiva

X realizační cena opce

$T - t$ doba do splatnosti opce

σ volatilita ceny podkladového aktiva

i bezriziková úroková míra

Výpočet vypadá následovně:

$$C_t = S_t \phi(d_1) - X e^{-i(T-t)} \phi(d_2), \quad (1.1.2.1)$$

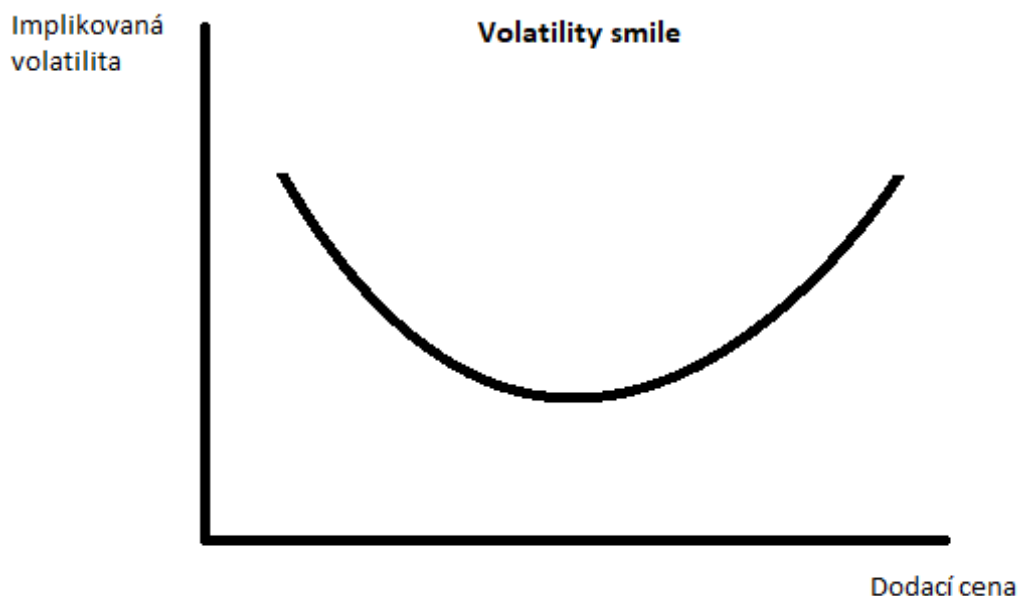
kde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(i + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (1.1.2.2)$$

$\phi(\cdot) \sim$ distribuční fce $N(0; 1)$

Mezi cenou finančního aktiva a jeho volatilitou existuje při oceňování finančních kontraktů přímá úměra. Za předpokladu, že s rostoucí volatilitou ceny podkladového aktiva roste cena opce, je faktem, že tržní cena opce zahrnuje trhem očekávanou volatilitu podkladového aktiva, která je označována jako volatilita implikovaná.

Po zanesení implikované volatility do grafu, kde na osu x je nanesena dodací cena opce a na osu y implikovaná volatilita, je zřejmé, že s rostoucí cenou podkladového aktiva implikovaná volatilita klesá. Speciální jev lze pozorovat u měnových opcí, kdy volatilita klesá až do určitého bodu a náhle začíná růst se zvyšující se dodací cenou. Tento graf je nazýván „*Volatility Smile*“ a je zobrazen na obrázku č. 3 níže. (Středoevropské centrum pro finance a management – Implikovaná volatilita, 2018)



Obrázek č. 3: Grafické zobrazení implikované volatility

Zdroj: vlastní zpracování

1.1.3. Fundamentální a technická volatilita

Rozlišení volatility na fundamentální a technickou připodobňují Schwartz a Francioni k cholesterolu, kdy ji analogicky rozlišují na dobrou a zlou.

Fundamentální volatilita je chápána jako „dobrá“ a charakterizuje změny cen, které lze přičítat novým zprávám týkajících se fundamentů.

Naproti tomu technická volatilita je chápána jako „špatná“ a charakterizuje změny cen, které jsou zapříčiněny transakčními náklady. Odráží výraznější cenové výkyvy, k nimž dochází v relativně krátkých časových intervalech obchodování v reakci na příchod příkazů k prodeji a nákupu. (Schwartz, Francioni, 2004)

1.2. Čím je volatilita ovlivňována

Na finančních trzích působí nespočet faktorů, které nepřetržitě ovlivňují vývoj obchodovaných instrumentů. Výčet těchto faktorů ovlivňující ceny, potažmo volatilitu, by pravděpodobně ani nebyl konečný. Lze předpokládat, že jsou ve hře i faktory, které dosud nebyly identifikovány. Dalším faktem je vývoj lidstva - objevují se nová rizika, která se samozřejmě následně promítají do nálady celého trhu. Například riziko terorismu je aktuálním tématem několik posledních let, velký boom zaznamenaly kryptoměny – jde o nový instrument, který se vyznačuje právě extrémní volatilitou a lze jen těžko předpokládat jejich vývoj do vzdálenější budoucnosti.

Níže je pro představu uvedeno několik faktorů, které jsou známy:

- **nesynchronní obchodování** – tento faktor je jedním z výraznějších, jež mají vliv na podobu časové řady. To, že časové řady vznikají ve stejně dlouhých časových intervalech, je chybným předpokladem a důvodem, proč dochází v pondělních hodnotách k větším výkyvům. Obchodování totiž probíhá jen v pracovní dny od pondělí do pátku.
- **nedokonalá likvidita trhu** – díky této charakteristice trhu se hůře hledá vnitřní cena aktiva. Pokud jeden z investorů postupně realizuje větší obchod, může se zdát, že cena aktiva se dostává na novou hodnotu. Investoři, kteří jsou snadno ovlivnitelní, podpoří svým obchodem nastalý trend a cena se tak dostane na hodnotu, která je odlišná od skutečné ceny. V této chvíli přichází na řadu korekce ceny, která může být opět umocněna stejným důvodem a cena aktiva se stává volatilnější – kolísá kolem vnitřní hodnoty daného aktiva.

- **psychologie investorů** – tento faktor přímo navazuje na předchozí odstavec. Důvod volatility může být z části zakotven i v psychologii investorské veřejnosti, která reaguje například na šoky¹ v technologii, spotřebitelské preference, demografické ukazatele, monetární politiku nebo politická rozhodnutí. Dále se často investoři řídí svou intuicí, kdy se domnívají, že jsou schopni předpovědět vývoj obchodovaného instrumentu. Neméně důležitým faktem je to, že se investoři chovají z jisté části podle módních trendů, kdy se rozhodují na základě tzv. populárních modelů (které ovšem nemají pevné opodstatnění) nebo jsou přesvědčeni, že vývoj ceny bude kopírovat svůj historický růst či pokles.

Faktory, které mohou ovlivňovat přímo volatilitu měnového kurzu, mohou být například tyto:

- **režim devizového kurzu** – zda je devizový kurz v dané ekonomice fixní nebo plovoucí má taktéž značný vliv na volatilitu devizového kurzu. Největší volatilitu pak vykazují kurzy měn, u kterých se centrální banka vzdá jakékoli intervence a jejich pohyb je volně pohyblivý (tzv. čistý floating). Takové kurzy jsou nejvíce rizikové a dávají prostor pro spekulace.
- **otevřenost ekonomiky** – dalším faktorem, který má vliv na volatilitu devizového kurzu je míra mezinárodního obchodu dané země. Zejména si lze představit ekonomické vazby mezi zeměmi, které za svou měnu přijaly euro (a dalších zemí s nimi obchodujícími). Pokud se stane, že v některé z těchto zemí dojde k narušení ekonomické rovnováhy, promítne se tato skutečnost i do ostatních participujících zemí, což může mít za následek právě volatilitu devizových kurzů. (Schwartz, Francioni, 2004), (Shiller, 1989)

1.3. Spekulace na vysokou míru volatility

Mohlo by se zdát, že vysoká volatilita na finančních trzích je ryze negativním aspektem. Nicméně mnoho investorů na období, kdy jsou hodnoty podkladových aktiv více rozkolísané, vyloženě čekají. Obvykle jde o investory, jejichž postavení je v long pozici. Důvodem je fakt, že s vysokou volatilitou jde ruku v ruce propad cen aktiv. Vysoká volatilita je jako příležitost vyššího zisku vnímána zejména na měnových a komoditních trzích. Tento typ obchodování vyhledávají spíše investoři, jejichž vztah k riziku je otevřenější, neboť s vyššími zisky se pojí i vyšší riziko ztráty. (XPuls – Pár slov o tom, jak profitovat na vysoké volatilitě, 2014)

¹ Jako *šoky* se ve finanční ekonometrii zcela běžně označují rezidua. (Hušek, 2007)

1.4. Vztah volatility a měnového rizika

Riziko volatility - jak je uvedeno již výše, volatilita vyjadřuje proměnlivost cen aktiv. Při růstu volatility s ní roste i riziko ztráty vložených prostředků. Pokud má aktivum nižší likviditu, má zpravidla vyšší volatilitu i znatelnější změny cen. Například na cenu opce působí ve velké míře implikovaná volatilita. Její modelování není jednoduchou záležitostí a není tedy ani možné dopředu přesně určit její vliv na cenu opce.

Volatilita měnového páru² narůstá zejména při oznámení makroekonomických údajů (například změna HDP, výše nezaměstnanosti), vyhlášení centrálních bank (například změna nebo udržení úrokových sazeb) nebo změnou geopolitické situace týkající se předmětných měn. (LYNXbroker – Povaha a rizika obchodování s cennými papíry, 2018)

² Měnový pár je finanční instrument složený ze dvou měn, které se obchodují na formovém trhu, z nichž první měna je měnou základní a druhá je měnou koteční.

2. MĚNOVÝ KURZ

2.1. Definice a dělení

Pro měnový kurz existuje mnoho definic a výkladů. Jedna ze základních a nejužitečnějších formulací zní následovně: *“Měnový kurz je z kvantitativního hlediska poměr, v jakém se směňují dvě navzájem cizí měny neboli cena jedné měny vyjádřena v jiné měně.”* (Radová, Dvořák, Málek, 2013: 280)

Měnový kurz je ovlivněn především faktory, které indikují velikost poptávky a nabídky dané měny. Jde tedy o vliv úrokové sazby, velikosti HDP, nezaměstnanosti resp. zaměstnanosti a inflace. Značný vliv mohou mít i faktory technické povahy. (Chen, 2009)

Měnový kurz může být vyjádřen dvěma způsoby. Buď v přímé kotaci (což je převažující způsob vyjádření) nebo nepřímé kotaci:

- **přímá kotace** – udává, kolik jednotek domácí měny je potřeba na nákup jedné jednotky zahraniční měny. Například ve vztahu CZK/EUR by cena za jedno euro byla 25,495 CZK;
- **nepřímá kotace** – naopak udává, kolik jednotek cizí měny je potřeba na nákup jedné jednotky domácí měny. Jde tedy o převrácenou hodnotu přímé kotace. V obráceném vztahu EUR/CZK by jedna koruna stála $1/25,495 = 0,0392$ EUR.

Měnový kurz lze pak dále dle formy peněz rozlišit na:

- **kurz devizový** – což je cena deviz, tedy bezhotovostních peněz cizí měny, které jsou uloženy na běžných účtech, v podobě směnek nebo šeků apod.,
- **kurz valutový** – je cena valut, tedy hotovostních peněz cizí měny, které mají podobu bankovek a mincí.

Další dělení, se kterým je možné se v literatuře běžně setkat, je z časového hlediska, a to na:

- **promptní (spotový) kurz** – který se vztahuje k obchodům, jež jsou vypořádány do dvou dnů od jejich sjednání,
- **termínovaný kurz** – který se týká obchodů, které jsou sjednány dnes, nicméně jejich plnění nastane ve stanoveném budoucím datu (vzdálenějším než dva obchodní dny). Typicky je využíván u měnových derivátů. (Radová, Dvořák, Málek, 2013)

2.2. Režimy měnových kurzů

Od doby, kdy není měna striktně vázána na zlato, musí centrální banky udržovat kurz měn v určitém pásmu uměle. Zatímco v době, kdy platil zlatý standard, docházelo ke změně kurzu poměrně vzácně, a to v důsledku jediného důvodu – *seignorace*³, je dnešní situace, kdy se mění kurzy prakticky neustále, úplně opačně.

Centrální banky tak mají několik způsobů jak se k vývoji kurzu postavit a tím ovlivnit i jeho volatilitu: (Kurzy měn ČNB – Režimy měnových kurzů, 2013)

- **fixní kurzy** – či také pevné kurzy, jsou pevně stanoveny nominální měnové kurzy vůči jiné měně nebo vůči koši cizích měn. Takový kurz není třeba nikterak sledovat a upravovat. V České republice byl kurz koruny zafixován v roce 1996 vůči koši cizích měn.
- **řízený floating** – jde o režim, kdy je kurz volně pohyblivý a centrální banka má výhradní právo na uskutečnění případných kroků pro jeho ovlivnění.
- **čistý floating** – v tomto případě se centrální banka vzdává možnosti využít jakoukoli intervenci a měnový kurz je volně pohyblivý.
- **stanovení pásma** – při využití tohoto režimu nastaví centrální banka horní a dolní hranice intervalu, ve kterém se může kurz pohybovat, přičemž tyto hranice nesmí překročit. Nástrojem pro korekci je nákup či prodej dané měny na devizovém trhu.

2.3. Kurzové riziko

V důsledku neustálého vývoje a kolísání kurzu vzniká v obchodím vztahu (který probíhá v cizí měně) nejistota, která pro jednu ze smluvních stran představuje ztrátu způsobenou právě pohybem kurzu. Rizikem je tedy to, že kupující bude muset vynaložit větší množství finančních prostředků nebo prodávající bude inkasovat menší množství finančních prostředků, než jaké bylo dohodnuto v době uzavření transakce, čímž vzniká kurzový zisk jedné straně a kurzová ztráta straně druhé.

Pro eliminaci kurzového rizika existuje celá řada nástrojů. Lze využít zajištění měnovými deriváty, služby peněžního trhu, správné načasování uskutečnění obchodu nebo měnovou diverzifikaci či netting. Blíže tyto metody popisuje např. Jílek (2000).

³ Seignorací označujeme znehodnocování mincí. (Kurzy měn ČNB – Režimy měnových kurzů, 2013)

3. MODELOVÁNÍ VOLATILITY

Vzhledem k tomu, že volatilita (ve smyslu směrodatné odchylky finančních ukazatelů) je považována za základní míru rizikovosti, je logické, že modelování jejího vývoje je předmětem mnoha analýz a reportů a je tak nedílnou a podstatnou součástí rozhodování. Zejména pak finanční časové řady jsou charakteristické střídáním období klidu a období vysoké volatility. Tehdy se uplatňují modely volatility, které charakterizují tzv. podmíněnou heteroskedasticitu.

Co se týká praktického využití, nacházejí své uplatnění například při optimalizaci portfolia nebo při predikci časových řad. V modelech VaR⁴ se využívají odhady parametrů volatility v současnosti a budoucnu. (GRANT journal – Modelování volatility akcionévo indexu TRSE 100, 2012), (Arlt, Arltová, 2007)

3.1. Pojmy

Nejdříve je nutné definovat několik pojmů, které jsou používány v následujícím textu.

Stochastický proces je řada náhodných veličin, která je uspořádaná v čase. Matematicky se zapíše jako:

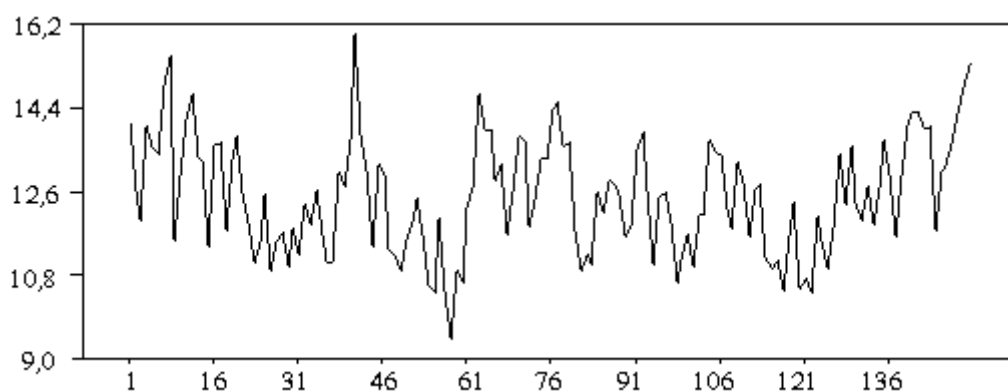
$$X = \{X(s, t), t \in T, s \in S\}. \quad (3.1.1)$$

Tedy $X(., t)$ je náhodná veličina pro každé t náležící indexové množině T definovaná na výběrovém prostoru S .

$X(s, .)$ je náhodná veličina pro každé s náležící výběrovému prostoru S definovaná na indexní řadě T , tj. „*uspořádaná řada čísel, z níž každé odpovídá jedné hodnotě indexní řady. Časovou řadu lze tedy chápat jako realizaci stochastického procesu*“. (Arlt, Arltová, 2003: 31)

Stacionarita je v obecném slova smyslu stálost či s časem se neměící hodnota. Pokud je řeč o stacionární časové řadě, znamená to, že její chování je takzvaně stochasticky ustálené. Pro lepší představu – pokud je taková časová řada vykreslena do grafu (jak je zobrazeno například na obrázku č. 4), lze si povšimnout, že její hodnoty kolísají kolem konstantní úrovně.

⁴ VaR (*Value at Risk*) je jedna z metod řízení tržního rizika. Její výsledky udávají maximální možnou ztrátu, která může nastat v daném časovém horizontu se stanovenou pravděpodobností.



Obrázek č. 4: Grafické zobrazení stacionární časové řady

Zdroj: (*Acta oeconomica pragensia – Časové řady typu $I(0)$ a $I(1)$, 1998: 9*)

Standardně jsou rozlišovány dva typy stacionarity. A to:

- **striktní stacionarita** – „pravděpodobnostní chování příslušného stochastického procesu je invariantní vůči posunům v čase (tj. pravděpodobnostní rozdělení náhodného vektoru $(x_{t_1}, \dots, x_{t_k})$ je stejné jako rozdělení vektoru $(x_{t_1+h}, \dots, x_{t_k+h})$ pro libovolné h).“ (Cipra, 1986: 101)
- **slabá stacionarita** – „příslušný stochastický proces má konstantní střední hodnotu, konstantní rozptyl a kovarianční strukturu druhého řádu invariantní vůči posunům v čase, tj. $cov(x_t, x_s) = cov(x_{t+h}, x_{s+h})$ pro libovolné h .“ (Cipra, 1986: 101)

Stacionární časové řady se někdy označují jako časové řady s krátkou pamětí, nestacionární řady pak jako časové řady s dlouhou pamětí.

Heteroskedasticita je vlastnost reziduí (náhodné složky), kdy vykazují měnlivý rozptyl, který je závislý na regresorech modelu, respektive na jeho funkcích. Ve finančních vysokofrekvenčních časových řadách jsou rezidua velmi často shlukována v čase. Pokud dojde na akciovém trhu, který je charakteristický střídáním období s vysokou a nízkou volatilitou, ke krachu, je pak obtížné předpovídat, jak se budou ceny akcií chovat. Zda budou růst nebo klesat. To je zapříčiněno tím, že na trhu nastane větší nejistota než v jiných obdobích. Dá se ovšem předpokládat, že rozptyl reziduí e_t je závislý na jejich minulých hodnotách. A tehdy lze mluvit o podmíněné heteroskedasticitě.

Příčiny heteroskedasticity mohou být různé:

- nesprávně určený model, kdy je vynechána významná proměnná. Heteroskedasticitu zapříčiněnou touto chybou lze nazvat *kvaziheteroskedasticita*;

- průřezová data nabývají podstatně odlišných hodnot. Tím pádem se rozptyl vysvětlované proměnné, a tím i reziduí, mění a zpravidla je funkcí některé z vysvětlujících proměnných;
- při chybných měřeních dochází k jejich kumulaci, což má za následek zvětšení rozptylu vysvětlované proměnné i rozptylu reziduí;
- použití upravených dat k odhadu parametrů, např. průměry tříd apod. (Hušek, 2007)

Invertibilní proces – je takový proces, jehož současnou hodnotu lze matematicky vyjádřit za pomoci hodnot minulých a současné hodnoty bílého šumu. Invertibilita časové řady má velký význam pro modelování predikce. (Cipra, 1986)

Autokorelací se rozumí závislost mezi posloupností hodnot jedné proměnné, které jsou uspořádány v čase, případně v prostoru.

Mezi příčiny vzniku autokorelace může patřit například:

- vynechání vysvětlujících proměnných při identifikaci modelu. Pro tento případ se užívá označení *kvaziautokorelace*;
- nesprávné určení modelu, kdy je nelineární funkční závislost aproximována lineárním vztahem. Tímto krokem vzniká chyba, která se stává součástí náhodné složky vykazující autokorelaci;
- zahrnutí chybných měření do náhodné složky modelu;
- použití upravených dat, která jsou například vyrovnaná nebo zprůměrovaná. Tyto úpravy mohou mít vliv na náhodnou složku a být důvodem jejich vzájemné závislosti. (Hušek 2007)

Autokorelační funkce (ACF) mezi veličinami X_t a X_{t-k} se vyjádří pro stacionární stochastický proces $\{X_t\}$ jako:

$$\rho_k = \frac{C(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{D(X_t)}\sqrt{D(X_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\gamma_k}{\sigma_x^2}, \quad (3.1.1)$$

kde σ_x^2 je rozptyl dané stacionární řady a s ohledem právě na stacionaritu $\sigma_x^2 = D(X_t) = D(X_{t-k}) = \gamma_0$.

Autokorelační funkce stacionárního procesu se vyznačuje níže uvedenými vlastnostmi:

- a) $\rho_0 = 1$
- b) $|\gamma_k| \leq \gamma_0; |\rho_k| \leq 1$
- c) $\gamma_k = \gamma_{-k}$ a $\rho_k = \rho_{-k}$ pro všechna k . (Arlt, 1999). (Cipra, 1986: 102)

Autokovarianční funkce mezi veličinami X_t a X_{t-k} se vyjádří pro stacionární stochastický proces $\{X_t\}$ jako:

$$\gamma_k = C(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu), \quad (3.1.2)$$

kde $\mu = E(X_t)$ je střední hodnota.

Výše uvedené vzorce pro autokorelační i autokovarianční funkci se shodují s obecnými vzorci pro korelaci a kovarianci. Předponu auto- mají z toho důvodu, že nyní jsou do nich dosazeny hodnoty ze stejné řady. Vypočtené hodnoty ρ_k a γ_k se označují jako korelační a kovarianční koeficient k -tého řádu.

Dle bodu c) jsou tedy obě funkce souměrné kolem $k = 0$. Lze také tvrdit, že jsou sudé a omezit se tak na vyjádření autokorelační funkce pouze na hodnoty pro $k > 0$ (časová vzdálenost hodnot X_t, X_{t-k} a X_t, X_{t+k} si je rovna).

(Cipra, 1986), (Arlt, 1999)

Parciální autokorelační funkce (PACF) se značí ϕ_{kk} . Parciální autokorelace říká, jaká je korelace mezi hodnotami X_t a X_{t-1} bez toho, aniž by jejich závislost byla ovlivněna hodnotami, které leží mezi nimi. „*Hodnota PACF je tedy definována jako parciální korelační koeficient mezi X_t a X_{t-k} při pevných hodnotách $X_{t-k+1}, \dots, X_{t-1}$.*“ (Cipra, 2008: 330)

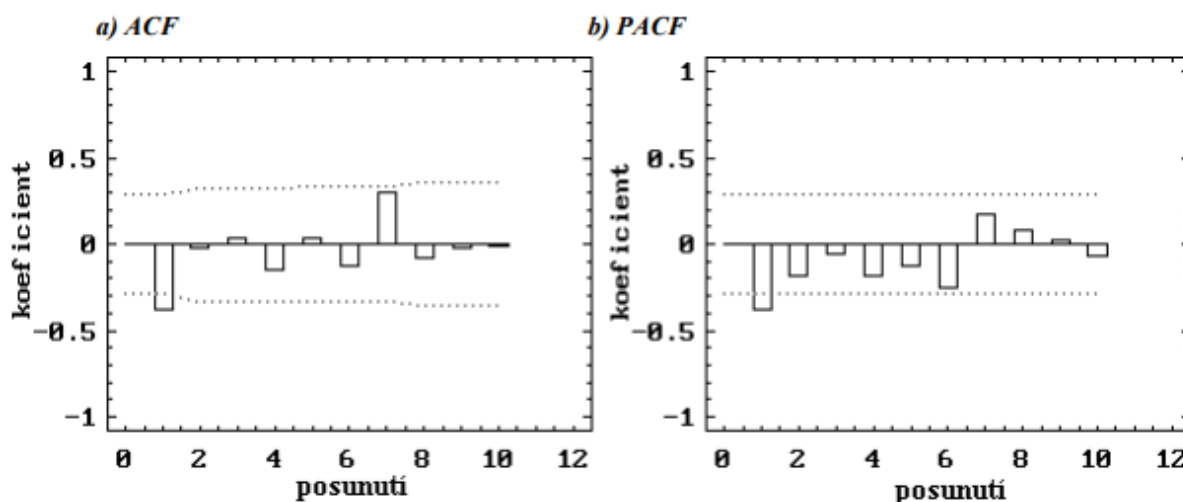
$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad (3.1.3)$$

přičemž parametry ρ_{kk} se počítají následovně:

$$\rho_k = \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \dots + \phi_{kk}\rho_0. \quad (3.1.4)$$

ACF i PACF mají v modelování volatility značný význam již na začátku procesu, neboť dle jejich chování v Box-Jenkinsově metodologii se usuzuje, jaký model dále použít. Jejich grafické vyjádření se nazývá *korelogram*. (Arlt, Arltová, 2007: 28)

Korelogram je jeden z nástrojů grafické analýzy. Korelogram ACF a PACF slouží ke zjištění, zda rezidua mají charakter *bílého šumu*. Je hojně využíván při modelování či dekompozici časových řad nebo očišťování sezónních řad. Jeho jednotlivé sloupce vyjadřují intenzitu lineární závislosti mezi hodnotami časové řady. Pokud hodnota autokorelační funkce překročí předem danou hranici významnosti (která bývá standardně vyznačena), dá se hodnota považovat za statisticky významnou. Na obrázku č. 5 lze vidět, že mez spolehlivosti je překračována první hodnotou. (Statistika - Grafické metody analýzy ekonomických časových řad, 1995)



Obrázek č. 5: Korelogram - grafické zobrazení ACF a PACF

Zdroj: (Statistika - Grafické metody analýzy ekonomických časových řad, 1995)

Proces bílého šumu – je uvažován stochastický proces, který je označen $\{\varepsilon_t\}$. Předpokládá se, že jde o řadu náhodných veličin, které jsou vzájemně nekorelované a pocházejí z jednoho pravděpodobnostního rozdělení. Dále se uvažuje, že má tato řada následující vlastnosti:

- a) $E(\varepsilon_t) = \mu_0$, tedy řada má konstantní střední hodnotu, obvykle rovnou nule,
- b) $D(\varepsilon_t) = \sigma_a^2$, tedy řada má konstantní rozptyl,
- c) $\gamma_k = cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$ pro všechna $k \neq 0$, tedy kovariance je rovna 0.

Takový stochastický proces se označuje jako proces bílého šumu. Jeho ACF a PACF jsou identicky nulové. Pokud mají náhodné veličiny normální rozdělení, lze mluvit o *gaussovském bílém šumu*.

3.2. Box-Jenkinsova metodologie

V této metodě modelování časových řad má významnou roli reziduální složka, která je považována za základní prvek pro výstavbu časové řady, přičemž rezidua mezi sebou mohou mít vzájemnou závislost. Box-Jenkinsova metoda prakticky staví na jejich korelaci a zjišťování těchto vztahů – tedy na korelační analýze. (Zapletal, 2000)

Dále jsou uvedeny její hlavní výhody i nevýhody.

Mezi kladné rysy této metody patří:

- a) Jelikož se jedná o stochastické modely, jsou poměrně flexibilní a vyznačují se rychlou přizpůsobivostí na změnu charakteru modelovaného procesu. Díky tomu jsou schopné modelovat stochasticky i sezónnost a trend.
- b) Jde o spolehlivý nástroj pro modelování budoucího vývoje časové řady.
- c) Analýzu časové řady lze standardně rozdělit do tří po sobě následujících kroků, a to: identifikace, odhad parametrů a ověřování modelu.

Mezi nevýhody Box-Jenkinsovy metody se naopak řadí:

- a) Metodologie není zpravidla vhodná pro roční časové řady, neboť pro sestavení vhodného a spolehlivého modelu je třeba alespoň 50 pozorování, což je při ročních měřeních splněno málokdy. Vyhovující je naopak pro řady, které mají kratší intervaly mezi jednotlivými pozorováními. Například řady na denní či týdenní bázi.
- b) V době technického rozvoje byla aplikace metody zdlouhavá a finančně náročná. Což ovšem s technickým pokrokem se jeví stále jako menší přítěž.
- c) Interpretace výstupů bývá často složitá.

Dále jsou popsány tři základní modely:

- proces klouzavých součtů MA;
- autoregresní proces AR;
- smíšený proces ARMA.

Všechny výše uvedené procesy jsou odvozeny od **lineárního procesu**, který je matematicky vyjádřen následovně:

$$y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots, \quad (3.2.1)$$

kde:

ε_t je bílý šum s rozptylem σ_ε^2 ,

ψ_j jsou parametry rovnice.

Pro matematické zápisy procesů se pro zjednodušení používá tzv. *operátor zpětného posunu*, který je označován písmenem B , a který je definován jako:

$$By_t = y_{t-1}. \quad (3.2.2)$$

Při použití operátoru zpětného posunu lze lineární proces (3.2.1) zapsat ve zkráceném tvaru:

$$y_t = \psi(B)\varepsilon_t, \quad (3.2.3)$$

kde:

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j. \quad (3.2.4)$$

Zde se s operátorem B nakládá jako by byl proměnná v mocninné řadě $\psi(z)$, pro kterou se předpokládá, že konverguje pro $|z| \leq 1$.

Pokud je proces invertibilní, lze ho vyjádřit takto:

$$y_t = \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \dots + \varepsilon_t, \text{ tj. } \varepsilon_t = y_t - \pi_1 y_{t-1} - \pi_2 y_{t-2} - \dots = \pi(B)y_t. \quad (3.2.5)$$

Takové vyjádření lineárního procesu je pak vhodné například při stavbě předpovědí.

„Podmínkou invertibility je předpoklad, že mocninná řada $\pi(z)$ konverguje pro $|z| \leq 1$ (tj. na jednotkovém kruhu v komplexní rovině.)“ (Cipra, 2008: 332)

Procesy pak vznikají vynulováním všech parametrů až na konečný počet. Důvodem je akcent na úspornou konstrukci modelů, tedy na co nejmenší počet parametrů. Navíc se výběr zaměřuje na parametry, které zaručí stacionaritu a invertibilitu. (Cipra, 1986)

V dalším textu jsou jednotlivé modely Box-Jenkinsovy metodologie popsány a specifikovány blíže.

3.2.1. Proces klouzavých součtů MA

Model $\mathbf{MA}(q)$ – proces klouzavých součtů řádu q , značený dle anglického pojmenování *moving average*, lze zapsat ve tvaru:

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \theta(B) \varepsilon_t, \quad (3.2.1.1)$$

kde:

$\theta_1, \dots, \theta_q$ jsou parametry,

$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$ je operátor klouzavých součtů,

q je bod useknutí lineárního procesu (3.2.1.1.).

Proces MA, u kterého je možné se setkat také s označením *proces klouzavých průměrů*, je vždy stacionární. Jeho střední hodnota je rovna nule a rozptyl vyjadřuje vzorec:

$$\sigma_y^2 = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2. \quad (3.2.1.2)$$

Autokorelační funkce má tvar:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{pro } k = 1, \dots, q \\ 0 & \text{pro } k > q \end{cases} \quad (3.2.1.3)$$

a její bod useknutí k_0 je tedy rovný řádu modelu q . „Parciální autokorelační funkce ρ_{kk} procesu $\mathbf{MA}(q)$ nemá bod useknutí, ale je omezena lineární kombinací geometricky klesajících posloupností a sinusoid s geometricky klesajícími amplitudami.“ (Cipra, 2008: 334)

Za invertibilní se označuje proces $\mathbf{MA}(q)$ v případě, kdy všechny kořeny z_1, z_2, \dots, z_q polynomu $\theta(z)$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Tedy pokud $|z_1|, \dots, |z_q| > 1$, protože tehdy je splněn předpoklad invertibility.

3.2.2. Autoregresní proces AR

Proces $\mathbf{AR}(p)$, tedy *autoregresní proces řádu p* lze zapsat následovně:

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \text{ tj. } y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \dots - \varphi_p y_{t-p} = \varphi(B) y_t = \varepsilon_t, \quad (3.2.2.1)$$

kde:

$\varphi_1, \dots, \varphi_p$ jsou parametry,

$\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p$ je autoregresní operátor. Ten se tvoří „useknutím“ lineárního procesu ve tvaru invertibilního procesu (3.2.5) v bodě zpoždění p .

Pokud veškeré kořeny z_1, \dots, z_p polynomu $\varphi(z)$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině (což matematicky zapíšeme jako $|z_1|, \dots, |z_p| > 1$), je splněna podmínka mocninné řady $\psi(z)$ a její konvergence pro $|z| \leq 1$ a proces $AR(p)$ je stacionární.

Tehdy má proces střední hodnotu rovnou nule a rozptyl:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1 \rho_1 - \dots - \varphi_p \rho_p}. \quad (3.2.2.2)$$

Autokorelační funkci vyjádříme:

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p} \text{ pro } k > 0. \quad (3.2.2.3)$$

3.2.3. Smíšený proces ARMA

Smíšený proces řádu p, q , který má značení $ARMA(p, q)$, se zapíše:

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad t.j. \varphi(B)\varepsilon_t, \quad (3.2.3.1)$$

kde:

$\varphi(B)$ a $\theta(B)$ jsou parametry procesů $AR(p)$ a $MA(q)$.

Podmínka stacionarity procesu $ARMA(p, q)$ je shodná s podmínkou stacionarity procesu $AR(p)$. Stejně tak podmínka invertibility se rovná podmínce invertibility procesu $MA(q)$.

Proces má střední hodnotu rovnou nule a autokorelační funkci ve tvaru:

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p} \text{ pro } k > q. \quad (3.2.3.2)$$

Řešení předchozí rovnice je ve tvaru:

$$\rho_k = \alpha_1 z_1^{-k} + \alpha_2 z_2^{-k} + \dots + \alpha_p z_p^{-k} \text{ pro } k \geq \max(0, q - p + 1), \quad (3.2.3.3)$$

kde:

z_1, \dots, z_p jsou kořeny polynomu $\varphi_z(|z_1|, \dots, |z_p| > 1)$ a $z_i \neq z_j$ pro $i, j = 1, \dots, p$.

Proces $ARMA(p, q)$ má autokorelační funkci bez bodu useknutí a tato funkce je „lineární kombinací klesajících geometrických posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami, ale s výjimkou počátečních hodnot $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{q-p}$ (tato výjimka se uplatní jen v případě, pokud $q \geq p$).“ (Cipra, 2008: 338)

Stejně tak nemá bod useknutí parciální autokorelační funkce a „je omezena lineární kombinací klesajících geometrických posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami, ale s výjimkou počátečních hodnot $\rho_{00}, \dots, \rho_{p-q, p-q}$ (tato výjimka se uplatní jen v případě, pokud $p \geq q$).“ (Cipra, 2008: 338)

Následující tabulka č. 1 poskytuje přehled o grafickém průběhu ACF a PACF výše uvedených úrovnňových modelů.

Tabulka č. 1: Tvar ACF a PACF procesů AR(p), MA(q) a ARMA(p,q)

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p, q)
ρ_k	Neexistuje k_0 , ρ_k ve tvaru U	$\rho_k = q$	Neexistuje k_0 , ρ_k ve tvaru U po prvních $p - q$ hodnotách
ρ_{kk}	$k_0 = p$	Neexistuje k_0 , ρ_{kk} omezená křivkou U	Neexistuje k_0 , ρ_{kk} omezená křivkou U po prvních $p - q$ hodnotách

Zdroj: Cipra, 1986: 120

Všechny výše uvedené modely mají střední hodnotu rovnou nule. Pokud se ovšem proces y_t nahradí procesem $y_t - \mu$, lze pracovat s procesem, jehož střední hodnota je rovna konstantní hodnotě μ . Například proces MA(q) s konstantní střední hodnotou μ má tvar:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (3.2.3.7)$$

ARMA(p,q) se střední hodnotou μ se vyjádří jako:

$$y_t - \mu = \varphi_1(y_{t-1} - \mu) + \dots + \varphi_p(y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (3.2.3.8)$$

kde se parametr μ odhaduje standardně jako aritmetický průměr \bar{y} analyzované časové řady, případně jako jiné parametry s použitím metod, které blíže popisuje Cipra (1986).

Změna řady z y_t na $y_t - \mu$, případně na $y_t - \bar{y}$ se označuje jako *centrování* časové řady.

3.2.4. Proces ARIMA

Proces ARIMA je původní integrovaný proces, který je vyjádřen za pomoci operátoru zpětného posunu tvarem:

$$\phi_p(B)(1 - B)^d y_t = \theta_q(B)\varepsilon_t, \quad (3.2.4.1)$$

kde:

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p, \quad (3.2.4.2)$$

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q. \quad (3.2.4.3)$$

Tento proces je nazýván jako autoregresní *integrovaný proces klouzavých průměrů řádu p , d , q* a jeho označení je **ARIMA(p,d,q)**. Někdy se též může čtenář setkat s pojmenováním integrovaný proces řádu d , kdy se proces označí jako $I(d)$. A pokud se jedná o časovou řadu, jež je generovaná integrovanými procesy, je zažitý název *řady s jednotkovými kořeny*.

Model ARIMA(p,d,q) je používán v situacích, kdy po aplikaci diference na daný proces má výsledný integrovaný proces takové autokorelace a parciální autokorelace, že je možné vyjádřit ho jako stacionární a invertibilní model ARMA(p,q). Při jeho konstrukci není tedy kladen důraz na stacionaritu řady, je pouze požadováno, aby analyzovaná řada byla předveditelná na stacionární za použití diference nízkého řádu.

Při výstavbě modelu se nejdříve nestacionární řada upraví na stacionární za použití diference a následně poté se identifikuje proces ARMA(p,q). Speciálně u ekonomických časových řad je obecně doporučeno aplikovat na časovou řadu logaritmickou transformaci. Tím se řada ustálí z hlediska rozptylu. Dále umožní dosáhnout pravděpodobnostního rozdělení, které se podobá rozdělení normálnímu, a které je robustní vzhledem k odlehlým bodům. (Cipra, 1986)

3.3. Lineární modely volatility

Tato kapitola se zabývá modely proměnlivé volatility, které charakterizují podmíněnou heteroskedasticitu. Zabývají se variabilitou časových řad – tedy jejich druhým podmíněným momentem. Jsou významné zejména proto, že mají schopnost zachytit měnící se podmínky nejistoty na trhu. Tyto modely (jejichž zakladatelem je Robert Engle, který popsal model ARCH v roce 1928 při modelování inflace ve Velké Británii) mají široké využití:

- empirické ověřování ekonomických a finančních teorií, které se týkají finančního trhu,
- využití při tvorbě optimálního portfolia a analýze Value at Risk,
- zpřesnění intervalových předpovědí časových řad,
- tvorba měnové politiky centrální banky.

Podmíněný rozptyl lineárních modelů je lineární funkcí veličin $\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2$, což jsou druhé mocniny hodnot reziduální složky úrovnového modelu.

Je uvažován například model AR(1)

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3.3.1)$$

kde $|\varphi_1| < 1$ a $\{\varepsilon_t\}$ je proces podmíněně heteroskedastický, ve kterém je podmíněná střední hodnota $E(\varepsilon_t | \Omega_{t-1}) = 0$ a podmíněný rozptyl $D(\varepsilon_t | \Omega_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 | \Omega_{t-1}) = h_t$, kde Ω_{t-1} je relevantní minulé informace až do času $t - 1$. Tyto požadavky splňuje model procesu $\{\varepsilon_t\}$ ve tvaru

$$\varepsilon_t = e_t \sqrt{h_t}, \quad (3.3.2)$$

kde e_t jsou rezidua analyzované časové řady. Takto definovaný proces $\{\varepsilon_t\}$ je uvažován v následujícím textu. (Arlt, Arltová, 2007)

3.3.1. ARCH – autoregressive Conditional Heteroscedasticity

ARCH(1)

Podmíněný rozptyl v modelu ARCH(1) má tvar:

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2. \quad (3.3.1.1)$$

Jeho hodnota má být kladná a proto je na ω kladena podmínka, že $\omega > 0$ a pro α musí platit $\alpha_1 \geq 0$. Speciálně, pokud $\alpha_1 = 0$, je h_t konstantní v čase a proces $\{\varepsilon_t\}$ se označuje jako podmíněně homoskedastický.

Pokud se rovnice (3.3.1.1) upraví tak, že k oběma stranám rovnice se přičte ε_t^2 a odečte h_t , jde o vyjádření autoregresního tvaru modelu:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + v_t, \quad (3.3.1.2)$$

kde:

$v_t = \varepsilon_t^2 - h_t = h_t(e_t^2 - 1)$ je proces, který není autokorelovaný (neboť jeho podmíněná a nepodmíněná střední hodnota je rovna nule).

ARCH(1) je stacionární v kovariancích v případě, že $\alpha_1 < 1$, nepodmíněný rozptyl $\{\varepsilon_t\}$ má tvar:

$$D(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha_1}, \quad (3.3.1.3)$$

tzn., že je konstantní v čase a proces je nepodmíněně homoskedastický, autokorelační funkce je ve zpoždění k rovna α_1^k .

ARCH(q)

Pokud jde o obecný model ARCH, lze vyjádřit podmíněný rozptyl následovně:

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2. \quad (3.3.1.4)$$

A stejně tak musí pro kladný podmíněný rozptyl platit $\omega > 0$ a $\alpha_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, q$.

ARCH(q) lze vyjádřit v autoregresním tvaru podle modelu AR(q) procesu $\{\varepsilon_t^2\}$:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + v_t, \quad (3.3.1.5)$$

kde:

$$v_t = \varepsilon_t^2 - h_t. \quad (3.3.1.6)$$

Pokud by byl výše uvedený proces vyjádřen za pomoci operátoru zpětného posunu, vypadal by jeho matematický zápis takto:

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_q B^q) \varepsilon_t^2 = \omega + v_t. \quad (3.3.1.7)$$

Stacionární v kovariancích je ARCH(q), pokud kořeny polynomiální rovnice

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_q B^q) = 0 \quad (3.3.1.8)$$

leží vně jednotkového kruhu. Proces $\{\varepsilon_t\}$ má nepodmíněný rozptyl ve tvaru:

$$D(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q}, \quad (3.3.1.9)$$

z čehož plyne, že je konstantní v čase a proces je nepodmíněně homoskedastický. (Arlt, Arltová, 2007)

Výhodou toho modelu je to, že s jeho pomocí lze zachytit shluky volatilitu a vyšší špičatost pravděpodobnostního rozdělení sledované časové řady, je také poměrně jednoduchý a poměrně flexibilní. (Gouriéroux, 1997)

Na druhou stranu má model také své slabé stránky, kterých je bohužel více. Jedná se zejména o:

- na úkor své jednoduchosti, je často k dostatečnému popisu volatilitu vyžadováno mnoho parametrů.
- model předpokládá, že šoky záporného i kladného charakteru mají na volatilitu stejný vliv, neboť závisí na druhé mocnině předchozího šoku. Ovšem je známo, že reálně reaguje cena finančního aktiva na kladné a záporné šoky odlišně.

- model je poměrně omezující. Jako příklad lze uvést omezení na hodnotu autokorelační funkce α_1^2 modelu ARCH(1), která – pokud má řada konečný čtvrtý moment - musí pocházet z intervalu $[0; \frac{1}{3}]$. Toto omezení je ještě více komplikované u modelů ARCH vyššího řádu.
- model neposkytuje žádný nový náhled na porozumění původu odchylek finančních časových řad. Dává pouze mechanický popis chování podmíněného rozptylu, nicméně už není k dispozici žádná informace o tom, čím je jeho chování způsobeno.
- ARCH model často „přechvaluje“ volatilitu, neboť na velké samostatné skoky reaguje pomalu. (Tsay, 2005)

Vzhledem k množství nedostatků je model považován spíše za teoretický a například k predikcím volatility jsou využívány jiné modely.

3.3.2. GARCH – Generalized ARCH

Modely GARCH jsou v dnešní době jedním z nejlepších a nejúspěšnějších nástrojů pro modelování finančních časových řad. Dle Cipry (2008) vychází ze dvou předpokladů:

- „Modely finančních časových řad jsou heteroskedastické, tj. s volatilitou proměnnou v čase;
- Volatilita je jednoduchou kvadratickou funkcí minulých předpovědních chyb (odchylek od podmíněné střední hodnoty) ε_t .“ (Cipra, 2008: 385)

GARCH(1,1)

Tento model vznikl jako reakce na problémy modelování konkrétních časových řad za použití modelu ARCH(q), kdy řád modelu q bylo vysoké číslo. Bylo obtížné odhadnout velké množství parametrů, na které byly navíc kladeny omezující podmínky jako nenulovost podmíněného rozptylu a stacionarita. V roce 1986 přišel dánský ekonom Tim Bollerslev s návrhem rozšířit model ARCH o zpožděný podmíněný rozptyl.

Pokud je takto rozšířen model ARCH(1), má model podmíněného rozptylu v prvním zpoždění tvar:

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}. \quad (3.3.2.1)$$

Při podmínkách $\omega > 0$, $\alpha_1 > 0$ a $\beta_1 \geq 0$ je podmíněný rozptyl kladný.

Při použití operátoru zpětného posunu je tvar modelu:

$$(1 - \beta_1 B)h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2, \quad (3.3.2.2)$$

za podmínky $\beta_1 < 1$

$$h_t = (1 - \beta_1 B)^2(\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2) = (1 + \beta_1 B + \beta_1^2 B^2 + \dots)(\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2), \quad (3.3.2.3)$$

jde o model ARCH(∞). Z toho plyne, že model GARCH(1,1) je vhodné používat v případech, kdy by se jako vhodná jevila aplikace modelu ARCH s mnoha zpožděními.

Pokud se rovnice modelu (3.3.2.3) upraví přičtením ε_t^2 k oběma stranám a odečtením h_t , jde o tvar modelu ARMA(1,1)

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1}, \quad (3.3.2.4)$$

kde

$$v_t = \varepsilon_t^2 - h_t. \quad (3.3.2.5)$$

Z výše uvedeného plyne, že GARCH(1,1) je stacionární v kovariancích za podmínky $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Nepodmíněný rozptyl procesu $\{\varepsilon_t\}$ lze zapsat jako:

$$D(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1}, \quad (3.3.2.6)$$

dle tohoto vyjádření je konstantní v čase a proces $\{\varepsilon_t\}$ je nepodmíněně homoskedastický.

Tim Bollerslev odvodil také autokorelační funkci procesu $\{\varepsilon_t^2\}$:

$$\rho_1 = \alpha_1 + \frac{\alpha_1^2 \beta_1}{1 - 2\alpha_1 \beta_1 - \beta_1^2}, \quad (3.3.2.7)$$

$$\rho_k = (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \rho_1, \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.3.2.8)$$

S rostoucím zpožděním k exponenciálně klesají hodnoty autokorelační funkce, přičemž rychlost je závislá na výši součtu $\alpha_1 + \beta_1$. Pokud je blízký jedné, je pokles autokorelační funkce dosti pomalý. Stejně tak klesají hodnoty parciální autokorelační funkce. Obecně lze tedy říci, že tvary ACF a PACF procesu $\{\varepsilon_t^2\}$ se shodují s tvarem těchto funkcí u modelu ARMA(p, q). (Cipra, 2008)

GARCH(p, q)

Obecný model GARCH má podmíněný rozptyl ve tvaru:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}. \quad (3.3.2.9)$$

Za pomoci operátoru zpětného posunu je vyjádřen takto:

$$h_t = \omega + \alpha(B)\varepsilon_t^2 + \beta(B)h_t, \quad (3.3.2.10)$$

kde:

$$\alpha(B) = \alpha_1 B + \dots + \alpha_q B^q = \beta_1 B + \dots + \beta_p B^p. \quad (3.3.2.11)$$

Při splnění podmínek $\omega > 0, \alpha_i > 0$ pro $i = 1, 2, \dots, q$ a $\beta_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, p$ je podmíněný rozptyl kladný.

I model GARCH(p, q) lze vyjádřit ve tvaru ARCH(∞):

$$[1 - \beta(B)]h_t = \omega + \alpha(B)\varepsilon_t^2, \quad (3.3.2.12)$$

$$h_t = \frac{\omega}{1 - \beta(1)} + \frac{\alpha(B)}{1 - \beta(B)}\varepsilon_t^2. \quad (3.3.2.13)$$

Dále je možné GARCH(p, q) přepsat do tvaru:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i)\varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i} + v_t, \quad (3.3.2.14)$$

a za použití operátoru zpětného posunu:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + [\alpha(B) + \beta(B)]\varepsilon_t^2 + v_t - \beta(B)v_t, \quad (3.3.2.15)$$

kde

$$v_t = \varepsilon_t^2 - h_t. \quad (3.3.2.16)$$

Výše uvedený model (3.3.2.14) je model ARMA(m, p), kde $m = \max\{p, q\}$. Pokud kořeny polynomiální rovnice

$$1 - \alpha(B) - \beta(B) = 0 \quad (3.3.2.17)$$

leží vně jednotkového kruhu, je model GARCH(p, q) stacionární v kovariancích. (Cipra, 2008)

Proces $\{\varepsilon_t\}$ má nepodmíněný rozptyl:

$$D(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha(1) - \beta(1)}. \quad (3.3.2.18)$$

3.4. Nelineární modely volatility

Při analýze časových řad je možné se často setkat s některým z asymetrických efektů. Nejčastěji se vyskytujícím asymetrickým efektem je pákový efekt, který je popsán v první kapitole. Vzhledem k tomu, že lineární modely nejsou schopny se s těmito úkazy vypořádat, byla zavedena celá řada nelineárních modelů, které tuto asymetričnost připouštějí a snaží se zachytit jak kladné, tak záporné šoky⁵ a pracovat se skutečnými efekty těchto šoků.

3.4.1. EGARCH – Exponential GARCH

Vzhledem k velkému množství modelů, které by bylo možné do této kapitoly zařadit, je popsán pouze základní a nejstarší model EGARCH.

Tento model byl v roce 1991 navržen D. Nelsonem jako exponenciální modifikace modelu GARCH. Předností této modifikace je schopnost vyjádřit efekty negativních i pozitivních šoků, i pokud mají v absolutní hodnotě stejnou velikost. Je tudíž zohledněna asymetričnost obchodování na finančních trzích. (Hušek, 2007)

Přirozený logaritmus modelu GARCH(1,1) má tvar:

$$h_t = \omega + g(\varepsilon_{t-1}) + \beta_1 \ln(h_{t-1}), \quad (3.4.1.1)$$

kde

$$g(\varepsilon_{t-1}) = \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \gamma_1 [|\varepsilon_{t-1}| - E(|\varepsilon_{t-1}|)]. \quad (3.4.1.2)$$

Na parametry α_1, β_1 a γ_1 nejsou kladena žádná omezení, která by zaručovala kladné hodnoty podmíněného rozptylu, neboť model EGARCH vyjadřuje vztah logaritmu podmíněného rozptylu a minulých šoků.

Schopnost modelu zachytit asymetrické efekty pak vyplývá z funkce $g(e_t)$, kterou lze zapsat ve tvaru: (Arlt, Arltová, 2007)

$$g(\varepsilon_t) = (\alpha_1 + \gamma_1)\varepsilon_t I(\varepsilon_t > 0) + (\alpha_1 - \gamma_1)\varepsilon_t I(\varepsilon_t < 0) - \gamma_1 E(|\varepsilon_{t-1}|), \quad (3.4.1.3)$$

kde $I(A)$ je funkce, která nabývá hodnoty 1, v případě, že jev A nastane a hodnoty 0, pokud jev A nenastane.

⁵ Lineární modely tyto šoky sice zachycují také. Ovšem jejich podmíněný rozptyl závisí na druhé mocnině šoku, což má za následek, že kladné i záporné šoky mají ve výsledku stejný efekt.

4. APLIKACE MODELŮ NA VYBRANÉ ČASOVÉ ŘADY KURZŮ MĚN

Tato část práce je věnována aplikaci výše popsaných modelů na vybrané časové řady. Identifikace vhodného modelu je důležitým krokem při analýze časových řad. Pro časové řady bude odhadnut úrovnňový model, který bude v případě potřeby doplněn modelem volatility.

Vzhledem k výraznému kroku, který učinila Česká národní banka v dubnu roku 2017 - tedy ukončení intervencí - se nabízí modelovat vývoj právě kurzu české koruny vůči euru. Jako druhá časová řada je použit kurz koruny vůči americkému dolaru. Obě časové řady pocházejí ze stejného časového intervalu, konkrétně od 6. dubna 2017 do 22. prosince 2017. Pozorovaná data jsou na denní bázi. Víkendy nejsou zahrnuty a státní svátky jsou doplněny aritmetickým průměrem předchozího a následujícího obchodního dne. Data pro analýzu jsou získána z webového portálu kurzy.cz, který přejímá data od ČNB.

Ke zpracování dat je použit statistický software Gretl⁶, který je volně přístupný. Všechny obrázky a grafy pocházejí z jednotlivých kroků modelování v tomto softwaru. Pro tvorbu tabulek a doplňujících výpočtů je použit MS Excel.

Informace pro zpracování následující kapitoly byly čerpány z publikací: (Arlt, Arltová, 2003), (Cipra 1986), (Cipra, 2008), (Hušek, 2007), (Tsay, 2005)

Pro modelování časových řad je vhodné držet se doporučených kroků, které například uvádí Arlt a Arltová v (2007: 159):

1. Za použití grafické analýzy, testů na jednotkový kořen, vykreslení ACF a PACF a testů diagnostické kontroly určit vhodný lineární nebo nelineární model.
2. Zvolený úrovnňový model charakterizovat zejména z hlediska podmíněné heteroskedasticity. V případě přítomnosti podmíněné heteroskedasticity rozšířit úrovnňový model o lineární či nelineární model volatility.
3. Opět pomocí prostředků diagnostické kontroly ověřit, zda je zvolený model volatility vhodný. Testuje se, zda standardizovaná rezidua vykazují podmíněnou heteroskedasticitu.
4. Pokud se model nejeví jako adekvátní, je třeba provést jeho modifikaci nebo změnu.
5. Pokud je kvalita modelu odpovídající, je možné tento model využít pro konstrukci předpovědí nebo pro finanční analýzy.

⁶ Gretl je software určený pro ekonometrickou analýzu. Vyniká velmi intuitivním uživatelským rozhraním dostupným v mnoha jazycích včetně češtiny. Poskytuje širokou škálu odhadů, modely časových řad a mnoho dalších funkcí.

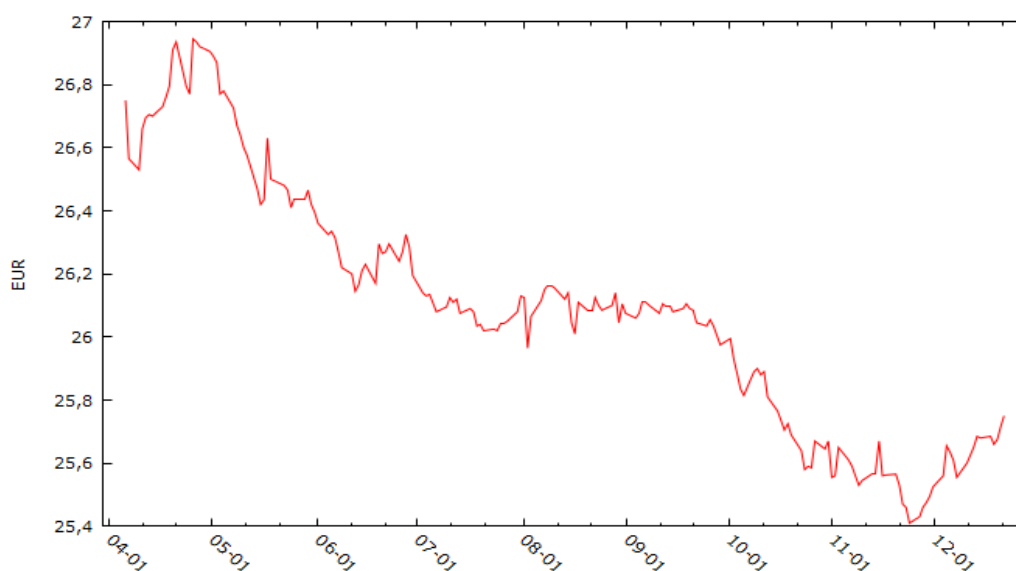
Následující část práce je rozdělena do čtyř podkapitol. V první části je řada transformována, poté je ověřena stacionarita a provedeny nutné úpravy pro dosažení její stacionarity. Druhým krokem je určení úrovněového modelu a jeho diagnostika. Dále případně následuje určení modelu volatility a taktéž jeho diagnostika. V poslední, čtvrté části, je odhadnutý model využit pro predikci budoucích hodnot analyzovaného směnného kurzu a výsledky predikce porovnány s reálnými daty.

4.1. Modelování volatility měnového kurzu CZK/EUR

4.1.1. Ověření stacionarity

Pro finanční časové řady je charakteristickou vlastností nestacionarita. V praxi se stacionární řady objevují poměrně výjimečně, přesto jde o jeden z důležitých předpokladů mnoha analýz. Aby byl předpoklad stacionarity splněn, je nejčastěji pro úpravu řady používáno diferencování, které je také považováno za nejjednodušší způsob řešení daného problému.

Po vykreslení průběhu původní časové řady do grafu (viz obrázek č. 6) je zcela evidentní, že se nejedná o stacionární řadu. Její průběh vykazuje zřejmou stochastickou neustálenost a spíše, než aby kolísala kolem konstantní úrovně, má klesající charakter.

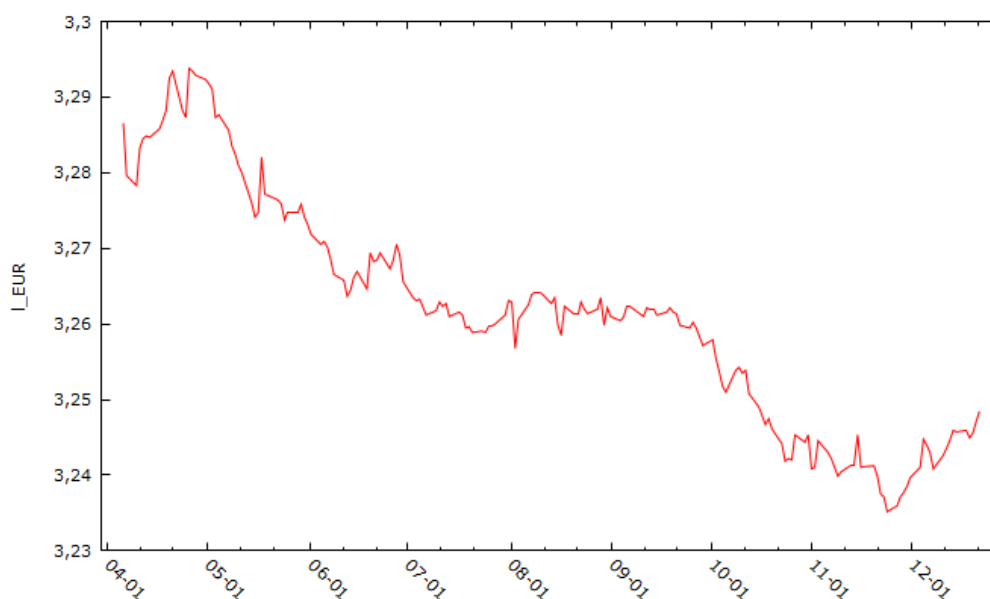


Obrázek č. 6: Průběh denní časové řady směnného kurzu CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

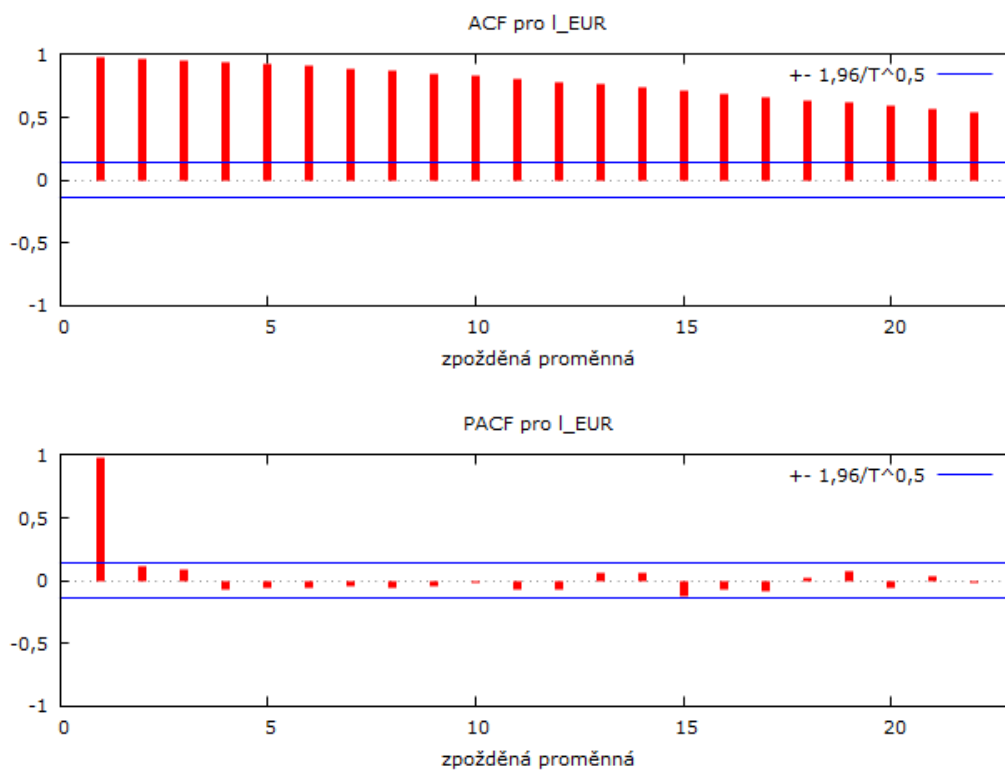
Vzhledem k finančnímu charakteru časové řady se nejprve se aplikuje logaritmická transformace. Průběh logaritmů, označených jako l_EUR , analyzované řady je na obrázku č. 7. Tvrzení o nestacionaritě pak potvrzuje korelogram logaritmů zachycený na obrázku č. 8.

Z průběhu ACF lze vyčíst pozvolný lineární pokles a v PACF první člen výrazně přesahuje modře vyznačený interval spolehlivosti a je velmi blízký jedné. Je tedy jisté, že časovou řadu bude nutné vhodně transformovat.



Obrázek č. 7: Průběh logaritmů časové řady kurzu CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018



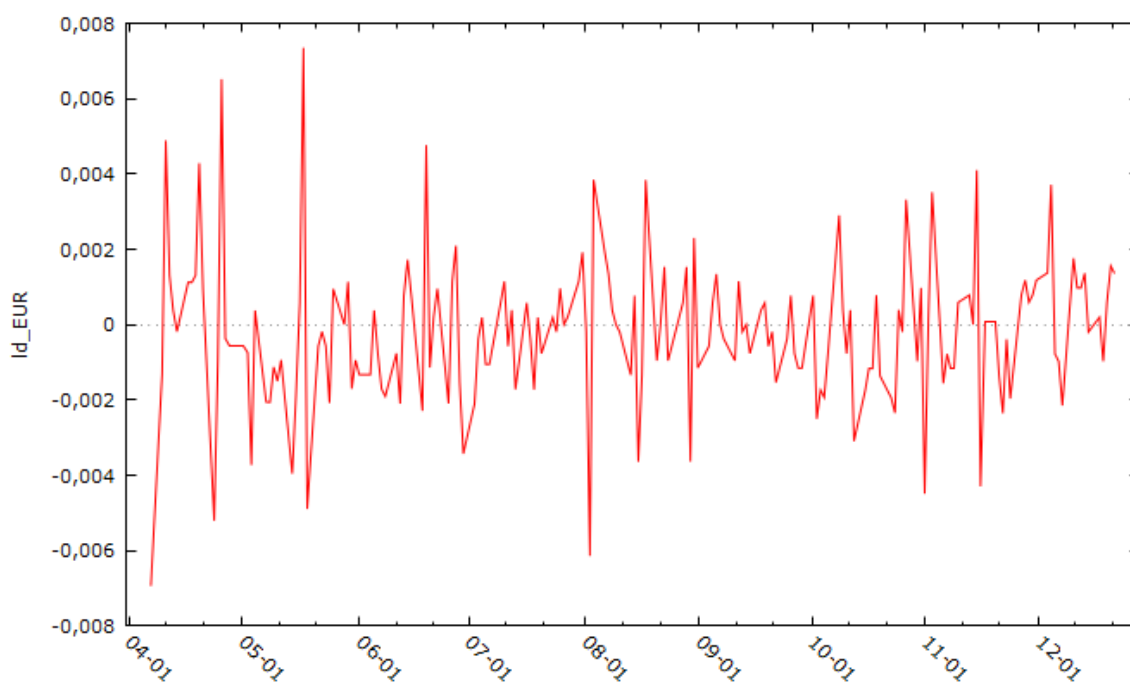
Obrázek č. 8: Korelogram logaritmů časové řady kurzu CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

Časová řada je již zlogaritmována a pro vytvoření stacionární řady je nutné ji diferencovat. Řád diferencování označovaný jako d je zvolen $d = 1$. Je doporučeno používat řád diferencování pokud možno co nejnižší. Čím je totiž řád diferencování d vyšší, narůstá rozptyl a může dojít k přediferencování řady. Obecně je za maximální řád diferencování považován řád $d = 3$. První diference označované Δy_t se získají využitím následujícího vztahu:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}. \quad (4.1.1.1)$$

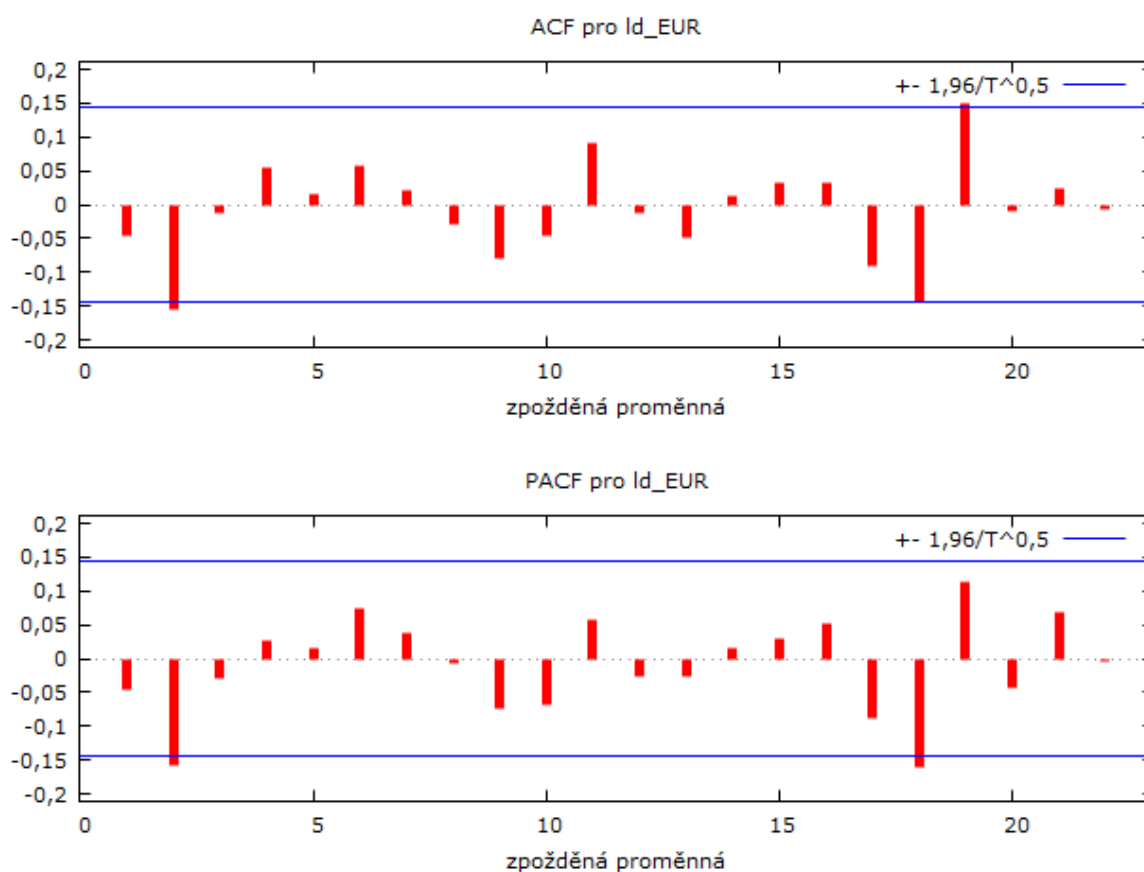
Diferencováním logaritmické řady se získají logaritmické výnosy⁷, které jsou již jako stacionární řada zobrazeny na obrázku č. 9. Současně si lze všimnout období, ve kterých dochází k většímu kolísání kurzu. Na obrázku č. 10 lze pak pozorovat ACF a PACF této stacionární řady.



Obrázek č. 9: Průběh řady logaritmických výnosů směnného kurzu CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

⁷ Logaritmické výnosy zobrazují hodnoty analyzované řady jako změnu růstu.



Obrázek č. 10: Krelogram logaritmických výnosů kurzu CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

Jelikož je již z grafické analýzy zřejmé, že logaritmické výnosy nejsou stacionární, je dále uveden ADF test pouze jako doplňující element k dané problematice. Standardně je používán v případech, kdy není možné na základě ACF a PACF o stacionaritě řady jednoznačně rozhodnout.

Rozšířený Dickey-Fullerův ověřuje, zda má, resp. nemá zkoumaná řada stacionární charakter. Testuje se nulová hypotéza, která předpokládá nestacionaritu, oproti alternativní hypotéze předpokládající stacionaritu řady.

H_0 : časová řada není stacionární

H_1 : časová řada je stacionární

Výsledky ADF testu jsou zachyceny na obrázku č. 11.

```
Rozšířený Dickey-Fullerův test pro ld_EUR
testing down from 14 lags, criterion AIC
počet pozorování 185
nulová hypotéza jednotkového kořenu: a = 1

test bez konstanty
s použitím 0 zpožděných proměnných (1-L)ld_EUR
model: (1-L)y = (a-1)*y(-1) + e
odhadovaná hodnota (a - 1): -1,03712
testovací statistika: tau_nc(1) = -14,5547
p-hodnota 2,825e-028
autokorelační koeficient 1. řádu pro e: -0,022

test s konstantou
s použitím 0 zpožděných proměnných (1-L)ld_EUR
model: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + e
odhadovaná hodnota (a - 1): -1,04691
testovací statistika: tau_c(1) = -14,6296
p-hodnota 1,428e-023
autokorelační koeficient 1. řádu pro e: -0,023

s konstantou a trendem
s použitím 0 zpožděných proměnných (1-L)ld_EUR
model: (1-L)y = b0 + b1*t + (a-1)*y(-1) + e
odhadovaná hodnota (a - 1): -1,04836
testovací statistika: tau_ct(1) = -14,5973
p-hodnota 3,893e-023
autokorelační koeficient 1. řádu pro e: -0,022
```

Obrázek č. 11: ADF test stacionarity logaritmických výnosů časové řady CZK/EUR

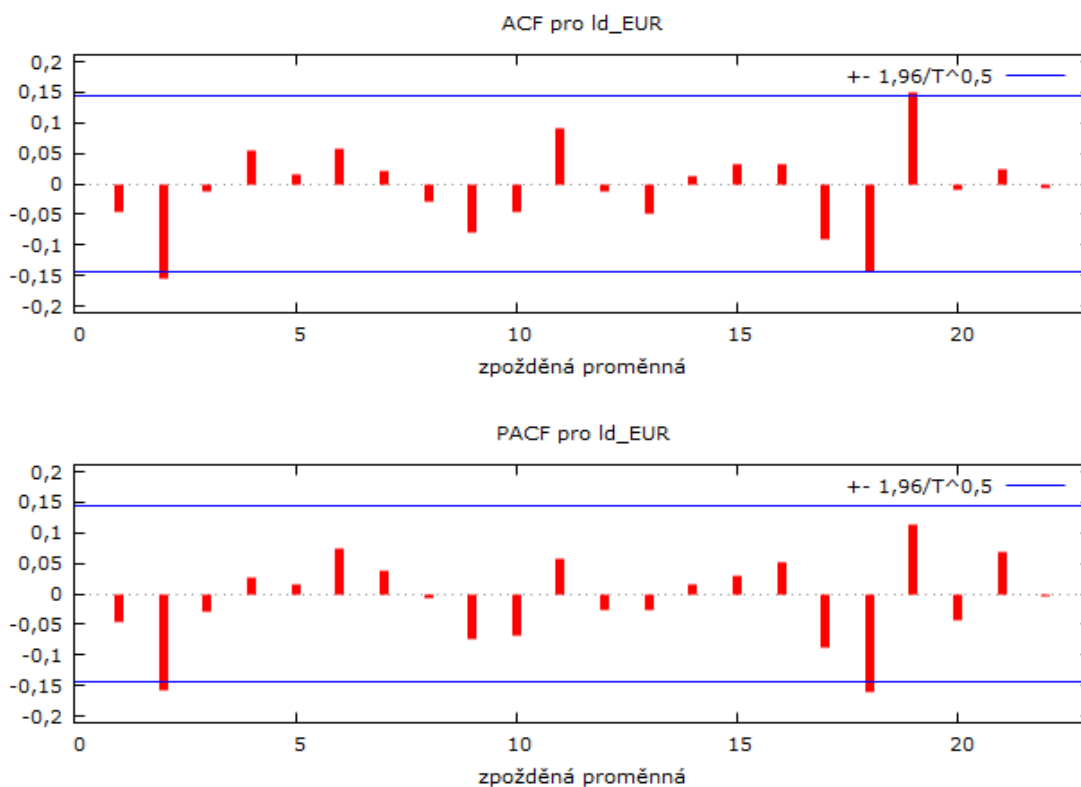
Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

Z výsledků je zřejmé, že nulová hypotéza je na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ skutečně zamítnuta ve prospěch alternativní hypotézy. Tím je potvrzeno, že se opravdu jedná o stacionární řadu, kterou není nutné dále diferencovat a je vhodná pro další kroky.

4.1.2. Identifikace a diagnostika úrovněvého modelu

Nyní je třeba určit úrovněvý model. V tomto kroku je identifikován vhodný model Box-Jenkinsonovy metodologie, přičemž cílem je získat řadu nekorelovaných reziduí.

Z korelogramu na obrázku č. 12 lze dle sinusoidního průběhu usuzovat na model ARMA.



Obrázek č. 12: Korelogram logaritmických výnosů CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

Vzhledem k tomu, že všechna zpoždění můžeme považovat v podstatě za statisticky nevýznamná, je dále odhadnut model ARIMA(0,1,0) – tedy proces náhodné procházky⁸.

Odhad modelu ARIMA(0,1,0) pro řadu logaritmů kurzu CZK/EUR je zachycen na obrázku č. 13.

Dle *p-hodnoty*, která je rovna 0,1549, lze na základě rozhodovacího kritéria tvrdit, že konstanta není statisticky významná. Nicméně v rámci dalších kroků, které vycházejí z odhadu modelu, je zohledněna.

⁸ Proces náhodné procházky („*Random walk proces*“) je speciální případ procesu AR(1). Jeho průběh lze matematicky vyjádřit jako $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$. (Arlt, Arltová, 2007)

```

Model 1: ARIMA, za použití pozorování 2017-04-07:2017-12-22 (T = 186)
Odhad proveden pomocí nejmenších čtverců (= MLE)
Závisle proměnná: (1-L) l_EUR

-----
                koeficient      směr. chyba      z      p-hodnota
-----
const          -0,000204838      0,000144010      -1,422      0,1549

Střední hodnota závisle proměnné      -0,000205
Sm. odchylka závisle proměnné          0,001964
Střední hodnota inovací                  0,000000
Sm. odchylka inovací                     0,001964
Logaritmus věrohodnosti                   895,8710
Akaikovo kritérium                        -1787,742
Schwarzovo kritérium                      -1781,291
Hannan-Quinnovo kritérium                 -1785,128
zde je poznámka o zkratkách statistik modelu

```

Obrázek č. 13: Odhad parametrů pro model ARIMA(0,1,0) pro řadu kurzu CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

Rovnice modelu ARIMA(0,1,0) má po dosazení parametrů do rovnice číslo (3.2.4.1) tvar:

$$y_t = -0,000204838 + y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.1.2.1)$$

Podmíněná heteroskedasticita

Dále je zkoumaná přítomnost ARCH efektu. Prokázání podmíněné heteroskedasticity je klíčové pro výstavbu modelu volatility. Pokud by tato skutečnost nebyla v řadě prokázána, není nutné model volatility na řadu aplikovat.

Testuje se nulová hypotéza, která předpokládá podmíněnou homoskedasticitu, tedy nepřítomnost ARCH efektu, proti alternativní hypotéze, která předpokládá, podmíněnou heteroskedasticitu, tedy ARCH efekt je přítomen.

H₀: podmíněná homoskedasticita – není přítomen ARCH efekt

H₁: podmíněná heteroskedasticita – je přítomen ARCH efekt

Pro řád zpoždění dva se *p-hodnota* rovná 0,05152. Výsledky testu jsou na obrázku č. 14. Nulová hypotéza by na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ neměla být zamítnuta, což by znamenalo, že časová řada logaritmických výnosů směnného kurzu české koruny vůči euru nevykazuje podmíněnou heteroskedasticitu. Dle tohoto výsledku model volatility tedy není nezbytně nutný. Nicméně vzhledem k tomu, že *p-hodnota* překračuje hladinu významnosti jen o velmi málo, bude dále model volatility aplikován.

Test pro ARCH řádu 2					
	koeficient	směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
alpha(0)	2,79542e-06	6,57841e-07	4,249	3,43e-05	***
alpha(1)	0,0721539	0,0732762	0,9847	0,3261	
alpha(2)	0,147761	0,0678681	2,177	0,0308	**
Nulová hypotéza: není zde žádný efekt ARCH					
Testovací statistika: LM = 5,93168					
s p-hodnotou = P(Chí-kvadrát(2) > 5,93168) = 0,0515173					

Obrázek č. 14: ARCH test řádu zpoždění dva pro řadu logaritmických výnosů kurzu CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

Na obrázku č. 15 lze pozorovat, že pro řád zpoždění pět je *p-hodnota* opravdu velmi vysoká a v hodnotách pátých zpoždění není tedy přítomnost ARCH efektu potvrzena.

Test pro ARCH řádu 5					
	koeficient	směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
alpha(0)	3,21927e-06	7,64370e-07	4,212	4,05e-05	***
alpha(1)	0,0864827	0,0752493	1,149	0,2520	
alpha(2)	0,0912295	0,0755181	1,208	0,2287	
alpha(3)	-0,00939298	0,0745832	-0,1259	0,8999	
alpha(4)	0,00356201	0,0734865	0,04847	0,9614	
alpha(5)	-0,0755600	0,0685759	-1,102	0,2720	
Nulová hypotéza: není zde žádný efekt ARCH					
Testovací statistika: LM = 4,46155					
s p-hodnotou = P(Chí-kvadrát(5) > 4,46155) = 0,485045					

Obrázek č. 15: ARCH test řádu zpoždění pět pro řadu logaritmických výnosů kurzu CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

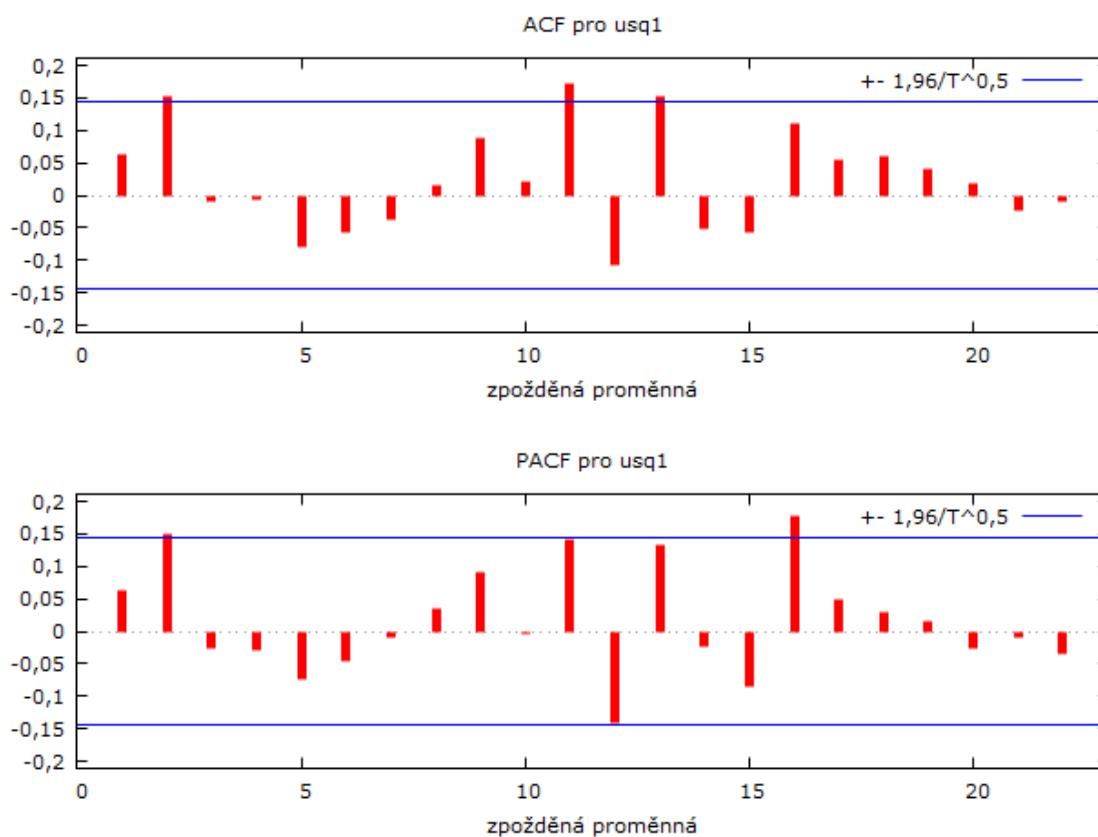
Úrovnový model časové řady má tedy tvar:

$$y_t = -0,000204838 + y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (4.1.2.3)$$

kde $\varepsilon_t = e_t \sqrt{h_t}$, jak je definováno již výše. V následujícím textu je tedy za pomoci modelu volatilitu analyzován podmíněný rozptyl h_t .

4.1.3. Identifikace a diagnostika modelu volatility

Řád modelu ARCH resp. GARCH je odhadován na základě ACF a PACF druhých mocnin reziduí (což vyplývá z autoregresních tvarů modelů volatility). Vzhledem k výsledku ARCH testu nelze v ACF a PACF očekávat mnoho značně statisticky významných členů (viz obrázek č. 16). Přesto lze v ACF i v PACF najít statisticky významné členy s vysokými řády zpoždění, což opodstatňuje volbu modelu GARCH (1,1).



Obrázek č. 16: Korelogram čtverců reziduí logaritmických výnosů kurzu CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

Odhad parametrů modelu GARCH(1,1) se standardizovanými rezidui je zachycen na obrázku č. 17.


```

Vyhodnocování funkce: 53
Vyhodnocování gradientu: 17

Model 4: GARCH, za použití pozorování 2017-04-07:2017-12-22 (T = 186)
Závisle proměnná: ld_EUR
Směrodatné chyby založené na Hessiánu

-----
                koeficient      směr. chyba      z      p-hodnota
-----
const          -0,000222257      0,000137397      -1,618      0,1057

alpha(0)       1,15019e-06      8,60013e-07      1,337      0,1811
alpha(1)       0,130778         0,0949871        1,377      0,1686
beta(1)        0,561956         0,252336         2,227      0,0259      **

Střední hodnota závisle proměnné -0,000205
Sm. odchylka závisle proměnné      0,001964
Logaritmus věrohodnosti              898,4293
Akaikovo kritérium                    -1786,859
Schwarzovo kritérium                  -1770,730
Hannan-Quinnovo kritérium             -1780,323
zde je poznámka o zkratkách statistik modelu

Nepodmíněný rozptyl chyb = 3,74329e-006
Rezidua jsou standardizovaná
Test poměru věrohodnosti pro (G)ARCH členy:
Chi-kvadrát(2) = 5,1167 [0,0774324]

```

Obrázek č. 17: Odhad parametrů modelu GARCH(1,1) se standardizovanými rezidui

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

Diagnostikou modelu se opět ověří jeho vhodnost, a to za použití standardizovaných reziduí. V případě, že se potvrdí vhodnost získaného modelu, lze ho použít pro predikci dalšího vývoje nebo nejrůznější finanční analýzy.

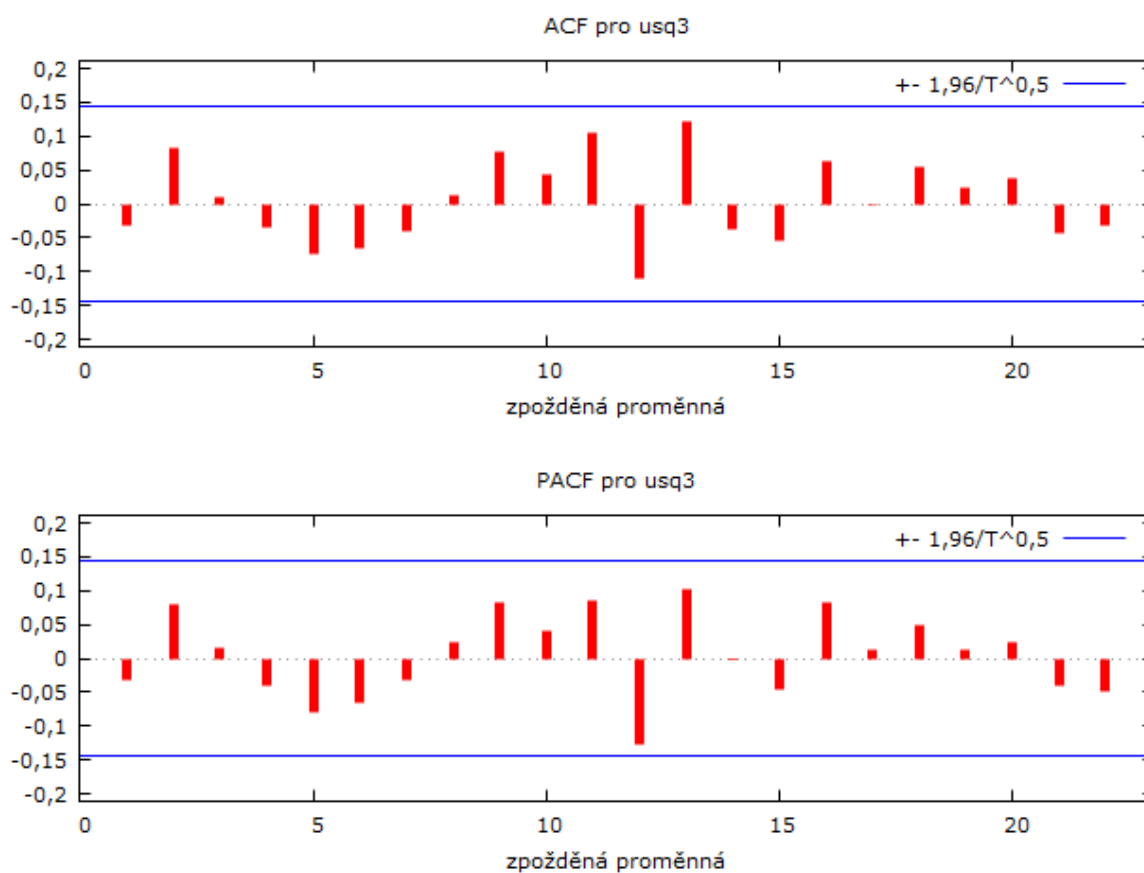
Pro ověření vhodnosti se použijí standardizovaná rezidua, označovaná jako e_t . Ta se získají vydělením reziduí podmíněnou směrodatnou odchylkou

$$e_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}}. \quad (4.1.3.1)$$

Model volatility je možné považovat za adekvátní, pokud standardizovaná rezidua budou splňovat následující předpoklady:

1. Nekorelovanost
2. Homoskedasticitu = neprokáže se ARCH efekt
3. Normální normované rozdělení

Nekorelovanost lze ověřit grafickou analýzou z obrázku č. 18, kde je zobrazen korelogram čtverců standardizovaných reziduí. Lze pozorovat, že v žádném zpoždění nedochází k překročení toleranční meze, čímž je tedy potvrzen první předpoklad nekorelovanosti reziduí.

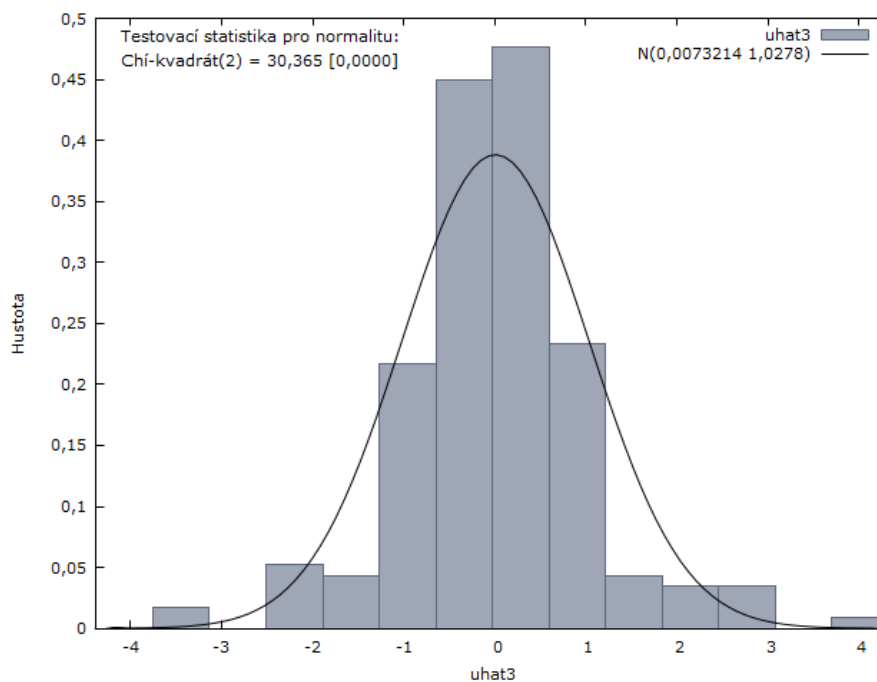


Obrázek č. 18: Korelogram čtverců standardizovaných reziduí logaritmických výnosů kurzu CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

Normalita reziduí

Dalším předpokladem je již zmíněné normální rozdělení. Tento předpoklad ovšem u finančních časových řad často selhává. Histogram reziduí na obrázku č. 19 potvrzuje jejich nenormalitu. Pravděpodobnostní rozdělení je špičatější s těžšími konci, což odpovídá vlastnostem leptokurtického rozdělení, které je pro finanční časové řady charakteristické.



Obrázek č. 19: Histogram standardizovaných reziduí logaritmických výnosů kurzu CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

Na obrázku č. 20 je odhad parametrů modelu GARCH (1,1) bez standardizovaných reziduí.

```

Vyhodnocování funkce: 40
Vyhodnocování gradientu: 14

Model 6: GARCH, za použití pozorování 2017-04-07:2017-12-22 (T = 186)
Závisle proměnná: ld_EUR
Směrodatné chyby založené na Hessiánu

```

	koeficient	směr. chyba	z	p-hodnota	
alpha(0)	1,31090e-06	8,92380e-07	1,469	0,1418	
alpha(1)	0,115489	0,0843631	1,369	0,1710	
beta(1)	0,534475	0,253878	2,105	0,0353	**

```

Střední hodnota závisle proměnné -0,000205
Sm. odchylka závisle proměnné 0,001964
Logaritmus věrohodnosti 897,1462
Akaikovo kritérium -1786,292
Schwarzovo kritérium -1773,390
Hannan-Quinnovo kritérium -1781,064
zde je poznámka o zkratkách statistik modelu

Nepodmíněný rozptyl chyb = 3,74503e-006

```

Obrázek č. 20: Odhad parametrů modelu GARCH(1,1) bez standardizovaných reziduí

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

Dle výsledků je pro model na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ statisticky významný pouze jeden člen, a to $beta(1)$. Po dosazení tohoto koeficientu do rovnice č. (3.3.2.1) se získá výsledný model pro podmíněný rozptyl:

$$h_t = 0,534475h_{t-1} \quad (4.1.3.2)$$

Nyní je tedy odhadnut úrovnňový model časové řady i model podmíněného rozptylu časové řady. Dosazením modelu volatility do modelu ARIMA dostáváme výsledný model pro řadu logaritmů kurzu CZK/EUR ve tvaru:

$$y_t = -0,000204838 + y_{t-1} + e_t\sqrt{0,534475 h_{t-1}} \quad (4.1.3.3)$$

4.1.4. Využití modelů pro predikci vývoje kurzu CZK/EUR

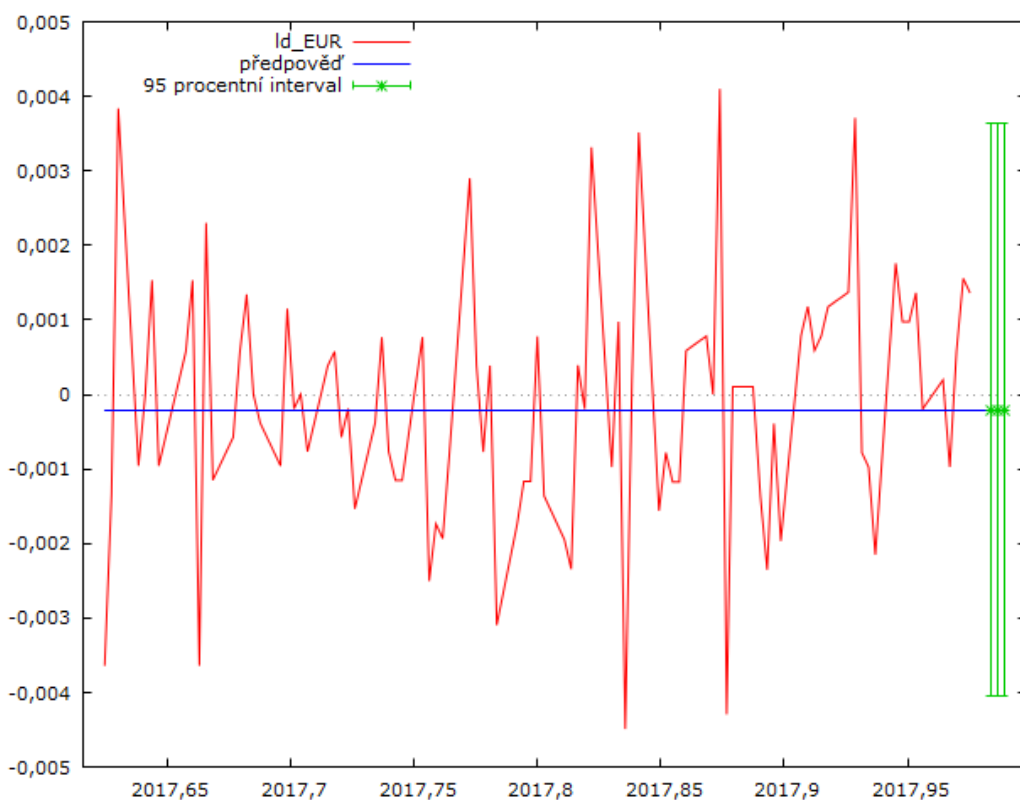
Modely volatility jsou často využívány pro predikci následujícího vývoje časové řady. Tyto informace jsou pak důležité zejména při obchodních rozhodnutích, pro akcionáře a v neposlední řadě pro top management společnosti.

Úrovnňový model umožňuje sledovat předpovědi bodové⁹ i intervalové¹⁰. Za použití modelu GARCH lze získat předpověď budoucích hodnot podmíněného rozptylu h_t . Tyto hodnoty lze využít pro korekci intervalových předpovědí získaných úrovnňovým modelem.

Dále jsou odhadnuty následující tři budoucí hodnoty sledované časové řady. Na grafu zachyceném na obrázku č. 21 je zobrazena predikce pro řadu logaritmických diferencí získaná úrovnňovým modelem. Obrázek č. 22 pak znázorňuje stejnou predikci s tím, že intervaly jsou upraveny o predikci podmíněného rozptylu h_t .

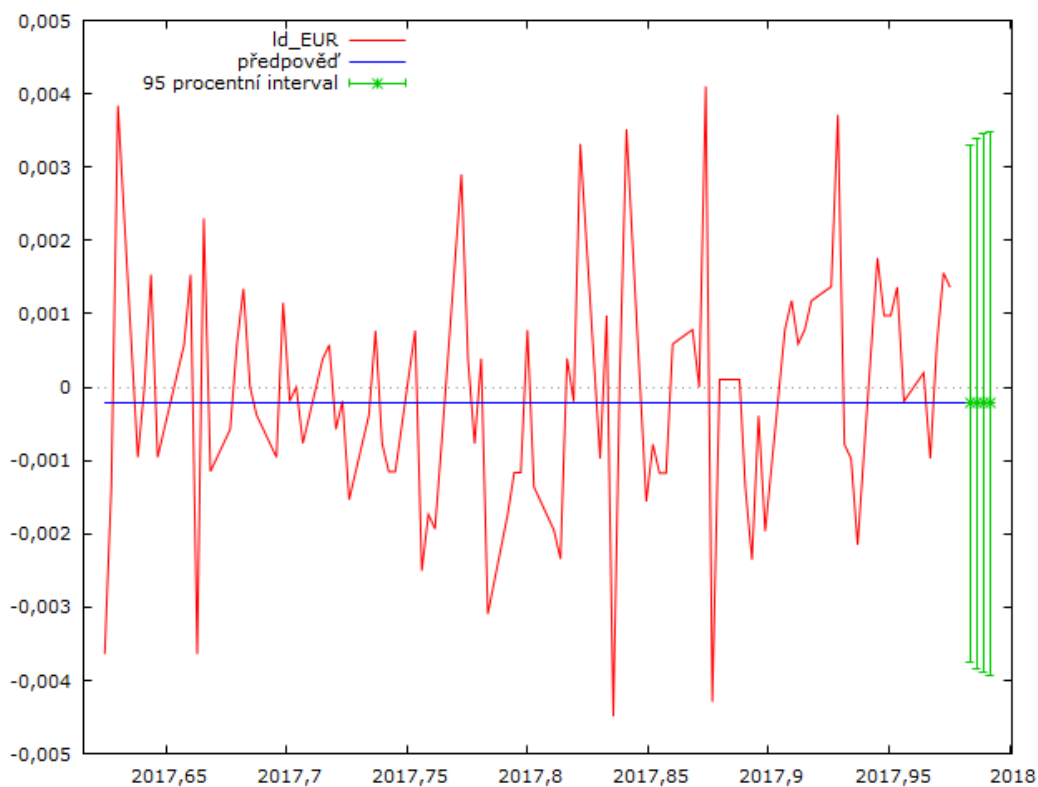
⁹ *Bodová předpověď* je hodnota, která představuje konkrétní odhad analyzované časové řady v konkrétním okamžiku v budoucnosti. Na tento odhad je nutné nahlížet s jistou rezervou, neboť zpravidla je v něm obsažena určitá chyba.

¹⁰ *Intervalová předpověď* poměrně spolehlivě doplňuje bodovou. Pokud máme k dispozici interval, v němž je budoucí hodnota obsažena s 95% pravděpodobností, není nutné se připravovat na větší výkyvy v dané časové řadě. Ty nastanou s pravděpodobností pouze 5 %. (Cipra, 1986)



Obrázek č. 21: Intervalová předpověď pro logaritmičké diference získané úrovnovým modelem

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018



Obrázek č. 22: Intervalová předpověď pro logaritmičké diference získané modelem GARCH

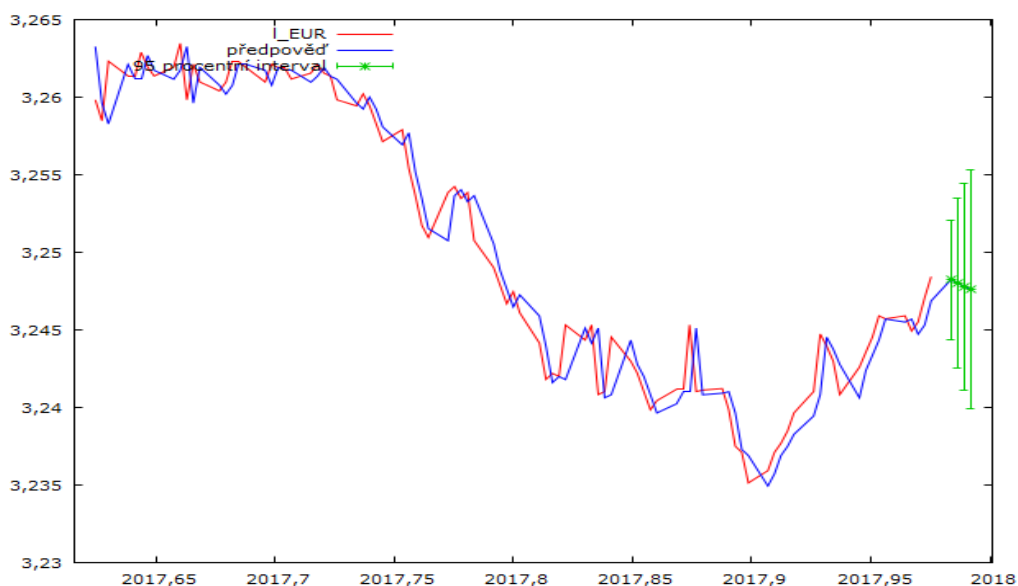
Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

V tabulce č. 2 jsou zaznamenány predikované hodnoty pro řadu logaritmu kurzu CZK/EUR, které poskytuje úrovnový model ARIMA(0,1,0). Intervalové předpovědi jsou navíc upraveny o predikci vývoje podmíněného rozptylu získanou z modelu GARCH(1,1). Obrázek č. 23 poskytuje grafické zobrazení predikce pro logaritmickou řadu, před úpravou o predikci podmíněného rozptylu h_t .

Tabulka č. 2: Bodová a upravená intervalová předpověď pro řadu logaritmu kurzu CZK/EUR

Datum	Předpověď	
	Intervalová	Bodová
27.12.2017	3,2444 - 3,2515	3,2482
28.12.2017	3,2441 - 3,2514	3,2480
29.12.2017	3,2439 - 3,2512	3,2478

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018



Obrázek č. 23: Intervalová predikce pro řadu logaritmu kurzu CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

Následující tabulka č. 3 poskytuje přehled konečných výsledků předpovědi spolu s hodnotami kurzu CZK/EUR, za které se v příslušné dny na trzích skutečně obchodovalo.

Tabulka č. 3: Výsledná intervalová a bodová předpověď pro kurz CZK /EUR s porovnáním reálně obchodovaných hodnot

Datum	Predikovaný interval	Bodová predikce	Skutečné hodnoty
27.12.2017	25,6482 - 25,8301	25,7447	25,84
28.12.2017	25,6408 - 25,8269	25,7394	25,645
29.12.2017	25,6342 - 25,8230	25,7341	25,54

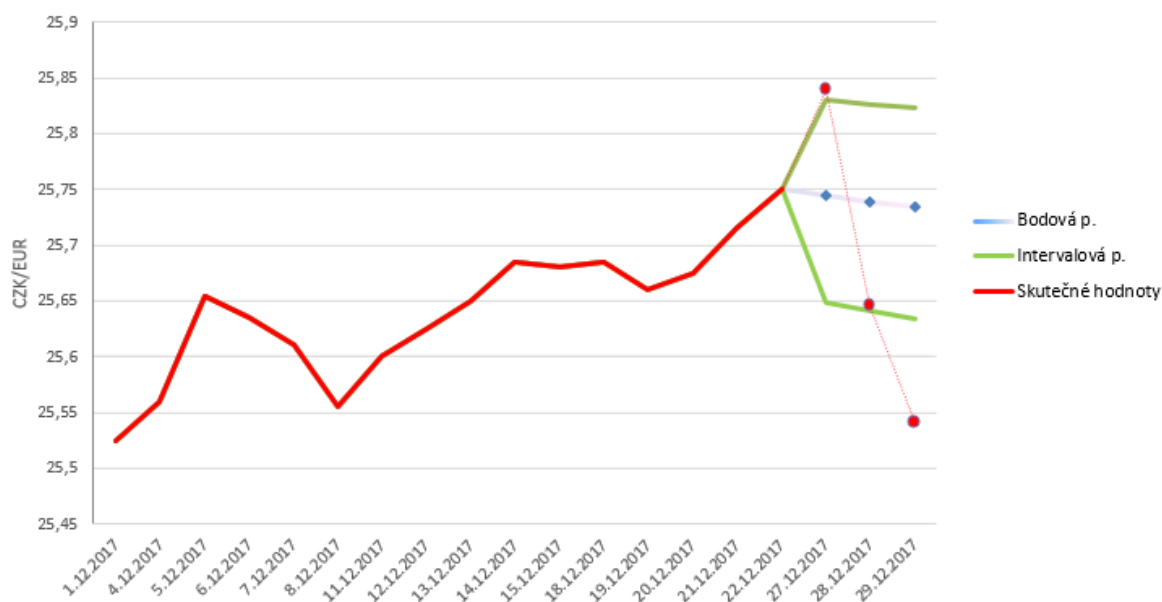
Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

Po srovnání výsledků je patrné, že pouze jeden z predikovaných intervalů pokrývá skutečně naměřenou hodnotu. Všechny předpovědi spolu se skutečnými hodnotami kurzu v dané dny jsou zaneseny do grafu na obrázku č. 24.

Graf je zobrazen pouze pro období od 1. prosince 2017 do 29. prosince 2017 z důvodu lepšího a zřetelnějšího zobrazení. Červeně jsou vykresleny hodnoty, za které se skutečně obchodovalo. Zelenou barvou je zobrazena intervalová předpověď a modrá barva představuje bodovou predikci. Lze pozorovat, že po čtyřech dnech, kdy se neobchodovalo, tedy 27. prosince, koruna vůči euru poměrně výrazně oslabila a cena eura stoupla mírně nad predikovaný interval. Následující den strmě klesla, nicméně se udržela v predikovaném rozmezí a 29. prosince posílila koruna pod hranici 25,55 CZK/EUR, což je nízko pod predikovaným intervalem.

Oslabení koruny v první predikovaný den mohlo vzniknout delší prolukou mezi obchodovacími dny, neboť z důvodu státních státek vznikla „mezera“ čtyř dnů, což může mít za následek větší výkyv hodnoty kurzu. Nemalý vliv lze také přisuzovat *efektu konce roku*, kdy se investoři zbavují koruny, neboť je pro ně nevýhodné držet větší množství této měny. Důvodem jsou odvody do Fondu pro řešení krize¹¹. Stejně tak následné posílení koruny může být přisuzováno efektu konce roku, kdy právě 28. prosince vypršel jeho vliv a investoři měli o korunu opět zájem.

¹¹ *Fond pro řešení krize je nástroj ČNB pro financování problémových situací finančních institucí. Zřízení tohoto fondu je centrální bance dáno zákonem. „Fond slouží ke shromažďování finančních prostředků, které je možné použít v případě ohrožení stability některé finanční instituce, tak aby nebylo nutné ukončit její existenci a zahájit výplatu náhrad vkladů klientům. Fond pro řešení krize je tedy zdrojem pro použití nástrojů řešení krize u instituce, jehož použití může navrhnout Česká národní banka tam, kde je to proveditelné a věrohodné a ve veřejném zájmu. Prostředky tohoto fondu neslouží k přímým výplatám náhrad vkladů.“* (Garancisystem.cz – O fondu pro řešení krize, 2016)



Obrázek č. 24: Porovnání bodové a intervalové predikce se skutečnými hodnotami kurzu CZK/EUR

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy eura, 2018

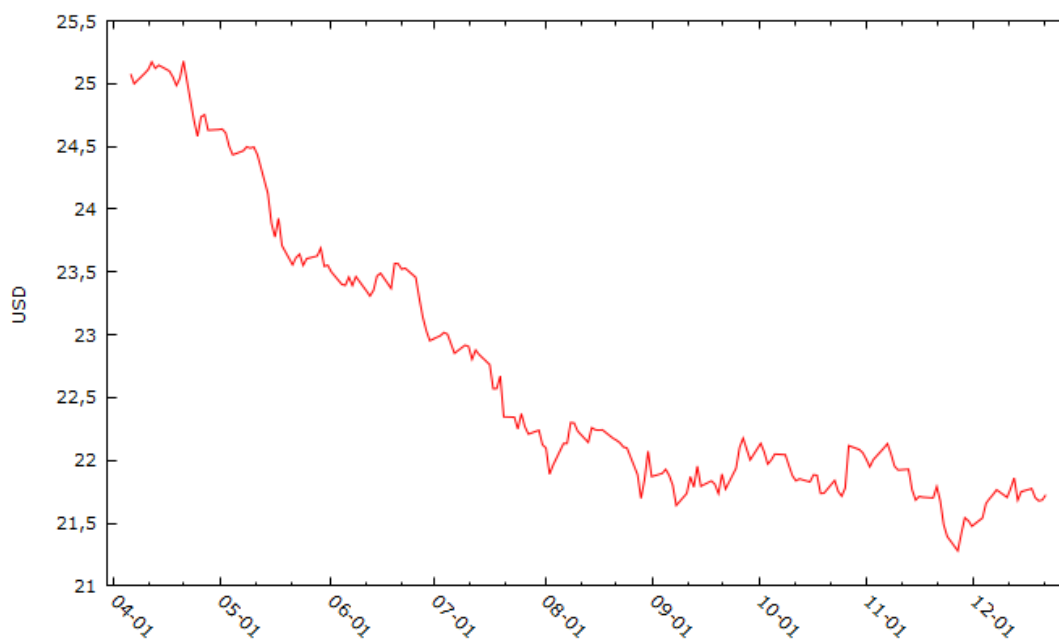
Tímto závěrem je vlastně potvrzena skutečnost, že volatilita měnového kurzu je skutečně ovlivněna nesynchronním obchodováním, které je zmíněno v kapitole 1.2 a pákovým efektem, který byl vysvětlen v první kapitole. Po čtyři dny, kdy se neobchodovalo, se hromadily nové informace, které měly za následek vyšší volatilitu kurzu, než jaká by se dala očekávat za normálních podmínek.

4.2. Modelování volatility měnového kurzu CZK/USD

Tato část je věnována modelování druhé časové řady, a to směnného kurzu české koruny vůči americkému dolaru.

4.2.1. Ověření stacionarity

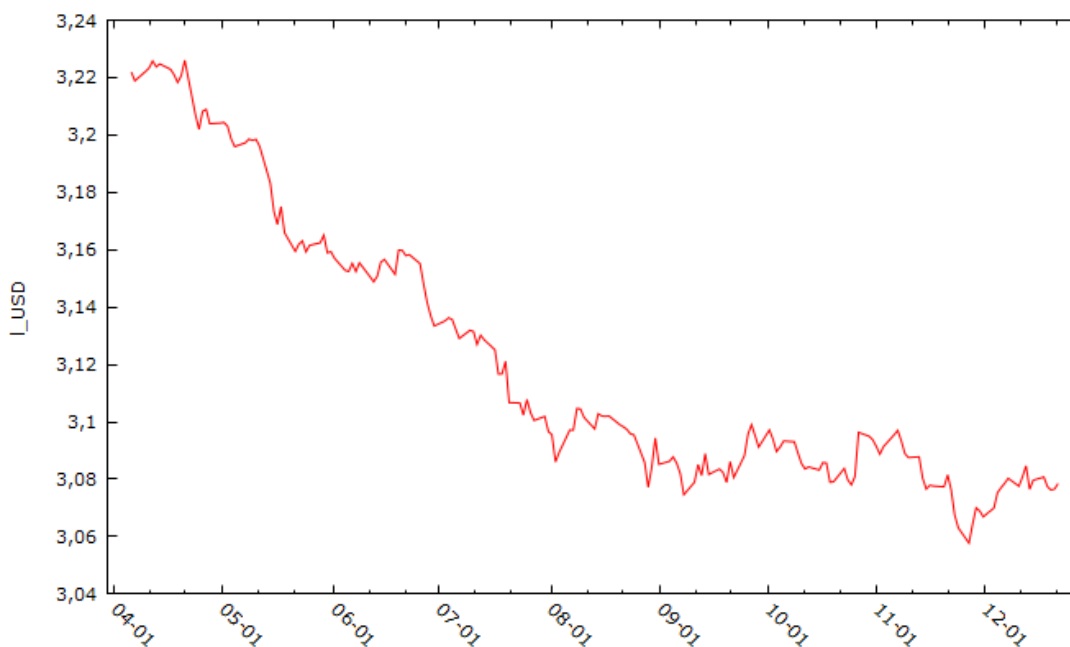
Prvním krokem před určením úrovněvého modelu je ověření stacionarity dané řady. Na obrázku č. 25 lze vidět průběh původní časové řady směnného kurzu. Opět je již na první pohled zřejmé, že časová řada není stacionární ve střední hodnotě a stejně tak lze pozorovat klesající tendenci. Jde tedy o řadu vykazující nestacionaritu, kterou je nutné pro další kroky modelování odstranit.



Obrázek č. 25: Průběh denní časové řady směnného kurzu CZK/USD

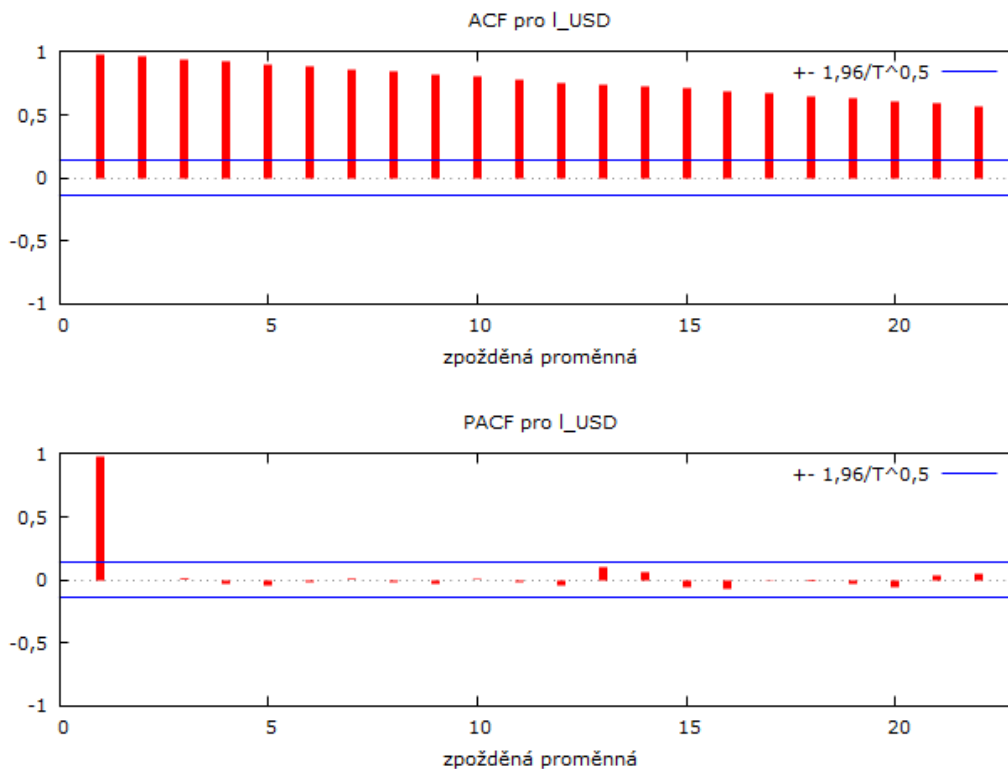
Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018

Na řadu je aplikována logaritmická transformace a pro ověření nestacionarity je opět vykreslen průběh logaritmů (obrázek č. 26) a jejich korelogram (obrázek č. 27). V ACF je zřejmý pozvolný lineární pokles a v PACF je první hodnota velmi blízká jedné. Časovou řadu tedy bude nutné v dalších krocích diferencovat.



Obrázek č. 26: Průběh logaritmů časové řady kurzu CZK/USD

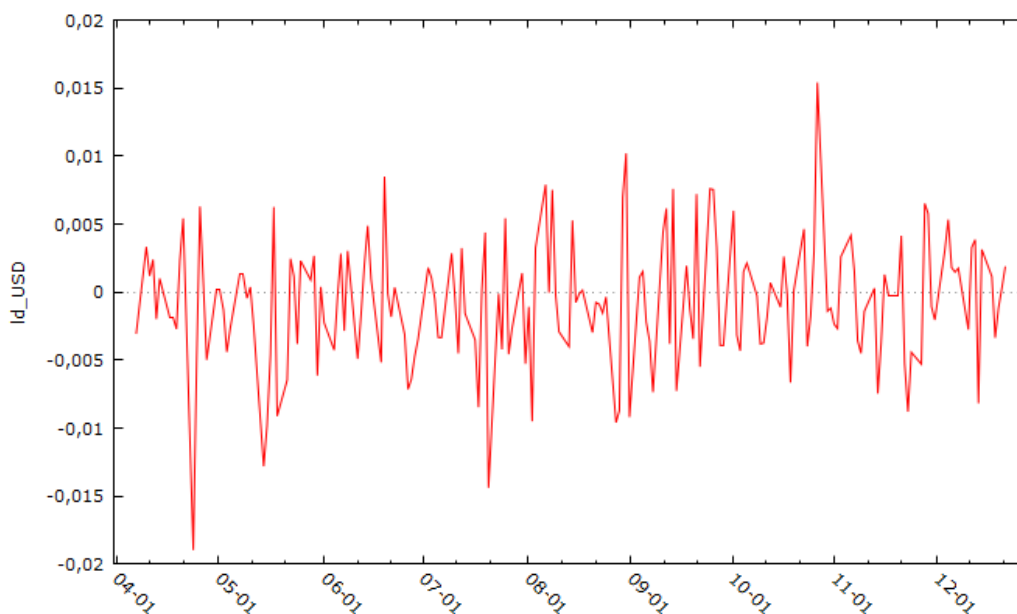
Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018



Obrázek č. 27: Korelogram logaritmů časové řady kurzu CZK/USD

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018

Dále je na řadu aplikovaná první diference, čímž vzniknou logaritmické výnosy časové řady. Jejich průběh zachycuje obrázek č. 28. Na základě kolísání hodnot kolem nulové konstantní úrovně, je možné se opodstatněně domnívat, že takto upravená řada kurzu je již stacionární. Další diferencování není nutné provádět a je možné přistoupit k dalším krokům.

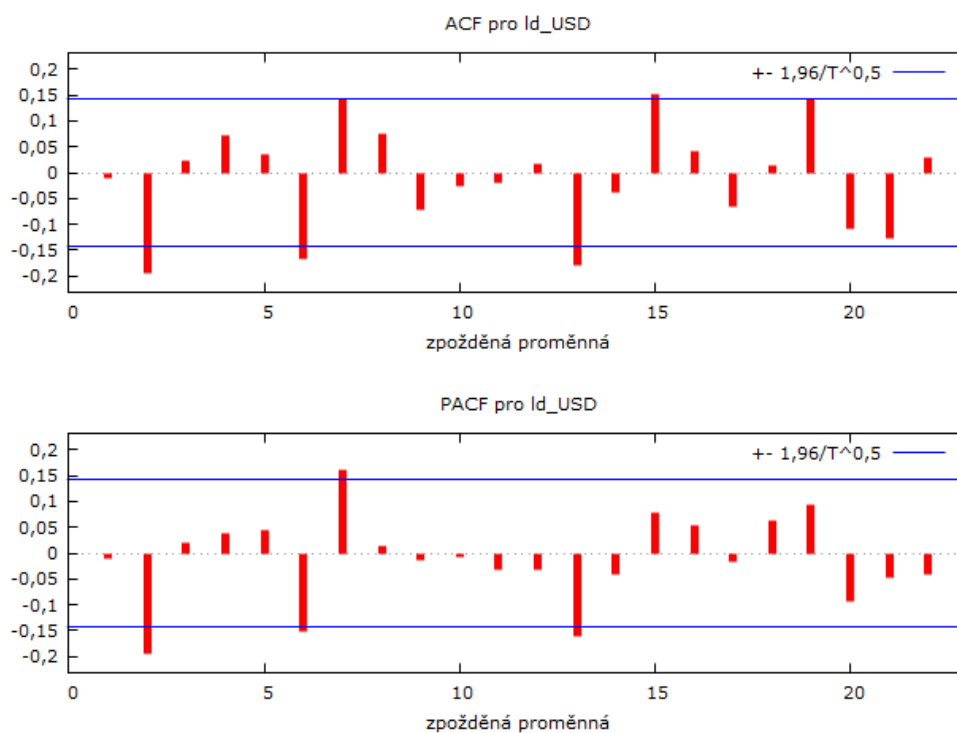


Obrázek č. 28: Průběh řady logaritmických výnosů směnného kurzu CZK/USD

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018

4.2.2. Identifikace a diagnostika úrovnového modelu

Z tvaru ACF a PACF logaritmických diferencí na obrázku č. 28 je patrné, že pro danou řadu by mohl být vhodný model ARIMA(2,1,2).



Obrázek č. 29: Korelogram logaritmických výnosů kurzu CZK/USD

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018

Odhad parametrů modelu je zachycen na obrázku č. 30. Dle *p-hodnoty* je možné všechny parametry považovat pro model za statisticky významné a dosadit je tedy do rovnice (3.2.4.1).

Výsledná rovnice modelu ARIMA(2,1,2) pro logaritmickou řadu kurzu CZK/EUR má tvar:

$$y_t = -0,000766447 - 0,215751y_{t-1} - 0,981699y_{t-2} + y_{t-1} + 0,215751y_{t-2} + 0,981699y_{t-3} - 0,232087\varepsilon_{t-1} - 0,929131\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \quad (4.2.1.1)$$

```

Vyhodnocování funkce: 137
Vyhodnocování gradientu: 31

Model 1: ARIMA, za použití pozorování 2017-04-07:2017-12-22 (T = 186)
Odhad proveden pomocí Kalmanova filtru (přesné ML)
Závisle proměnná: (1-L) l_USD
Směrodatné chyby založené na Hessiánu

```

	koeficient	směr. chyba	z	p-hodnota	
const	-0,000766447	0,000320120	-2,394	0,0167	**
phi_1	-0,215751	0,0261151	-8,262	1,44e-016	***
phi_2	-0,981699	0,0303156	-32,38	4,81e-230	***
theta_1	0,232087	0,0652319	3,558	0,0004	***
theta_2	0,929131	0,0614683	15,12	1,28e-051	***

Střední hodnota závisle proměnné	-0,000771
Sm. odchylka závisle proměnné	0,004665
Střední hodnota inovací	-6,59e-06
Sm. odchylka inovací	0,004437
Logaritmus věrohodnosti	743,2732
Akaikovo kritérium	-1474,546
Schwarzovo kritérium	-1455,192
Hannan-Quinnovo kritérium	-1466,703

zde je poznámka o zkratkách statistik modelu

		Reálná	Imaginární	Abs. hodnota	Frekvence
AR					
Kořen	1	-0,1099	-1,0033	1,0093	-0,2674
Kořen	2	-0,1099	1,0033	1,0093	0,2674
MA					
Kořen	1	-0,1249	-1,0299	1,0374	-0,2692
Kořen	2	-0,1249	1,0299	1,0374	0,2692

Obrázek č. 30: Odhad parametrů modelu ARIMA(2,1,2) pro logaritmickou řadu kurzu CZK/USD

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018

Podmíněná heteroskedasticita

Dále je ověřena homoskedasticita použitím ARCH testu. Pro řád zpoždění dva poskytuje test *p*-hodnotu 0,554274. Je testována nulová hypotéza předpokládající homoskedasticitu. Na obrázku č. 31 je uveden výsledek testu. *P*-hodnota testu je vyšší než hladina významnosti $\alpha = 0,05$, nezamítá se tedy nulová hypotéza a není prokázána přítomnost ARCH efektu.

```
Test pro ARCH řádu 2
```

	koeficient	směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
alpha(0)	1,78050e-05	3,30007e-06	5,395	2,12e-07	***
alpha(1)	0,0703306	0,0743287	0,9462	0,3453	
alpha(2)	0,0337058	0,0743378	0,4534	0,6508	

Nulová hypotéza: není zde žádný efekt ARCH
Testovací statistika: LM = 1,18019
s p-hodnotou = P(Chi-kvadrát(2) > 1,18019) = 0,554274

Obrázek č. 31: ARCH test řádu dva reziduí logaritmické řady CZK/USD

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018

Pro řád zpoždění pět je *p*-hodnota ještě vyšší, což lze vidět na výsledku testu na obrázku č. 32. Ani v pátých zpožděních se tedy heteroskedasticita nepodařila prokázat.

```
Test pro ARCH řádu 5
```

	koeficient	směr. chyba	t-podíl	p-hodnota	
alpha(0)	2,15020e-05	4,16502e-06	5,163	6,57e-07	***
alpha(1)	0,0637120	0,0752304	0,8469	0,3982	
alpha(2)	0,0324243	0,0753349	0,4304	0,6674	
alpha(3)	-0,0221323	0,0753634	-0,2937	0,7694	
alpha(4)	-0,0464461	0,0753443	-0,6165	0,5384	
alpha(5)	-0,0958434	0,0752991	-1,273	0,2048	

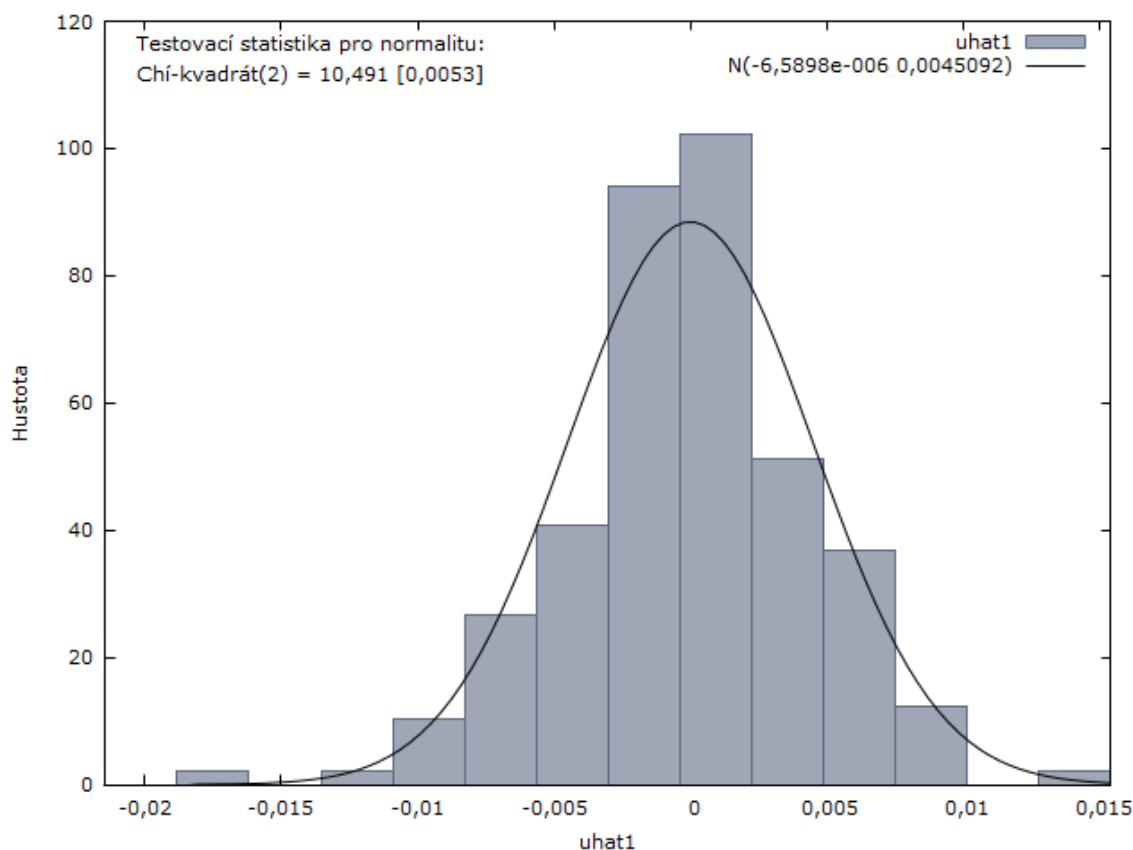
Nulová hypotéza: není zde žádný efekt ARCH
Testovací statistika: LM = 3,40162
s p-hodnotou = P(Chi-kvadrát(5) > 3,40162) = 0,638323

Obrázek č. 32: ARCH test řádu pět reziduí logaritmické řady CZK/USD

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018

Normalita reziduí

Dále je ověřena normalita reziduí pro logaritmickou řadu kurzu CZK/USD. Dle histogramu na obrázku č. 33 níže, lze pozorovat leptokurtické rozdělení. Normalita tedy prokázána není, což ovšem odpovídá finančnímu charakteru časové řady.



Obrázek č. 33: Leptokurtické rozdělení reziduí logaritmů CZK/USD

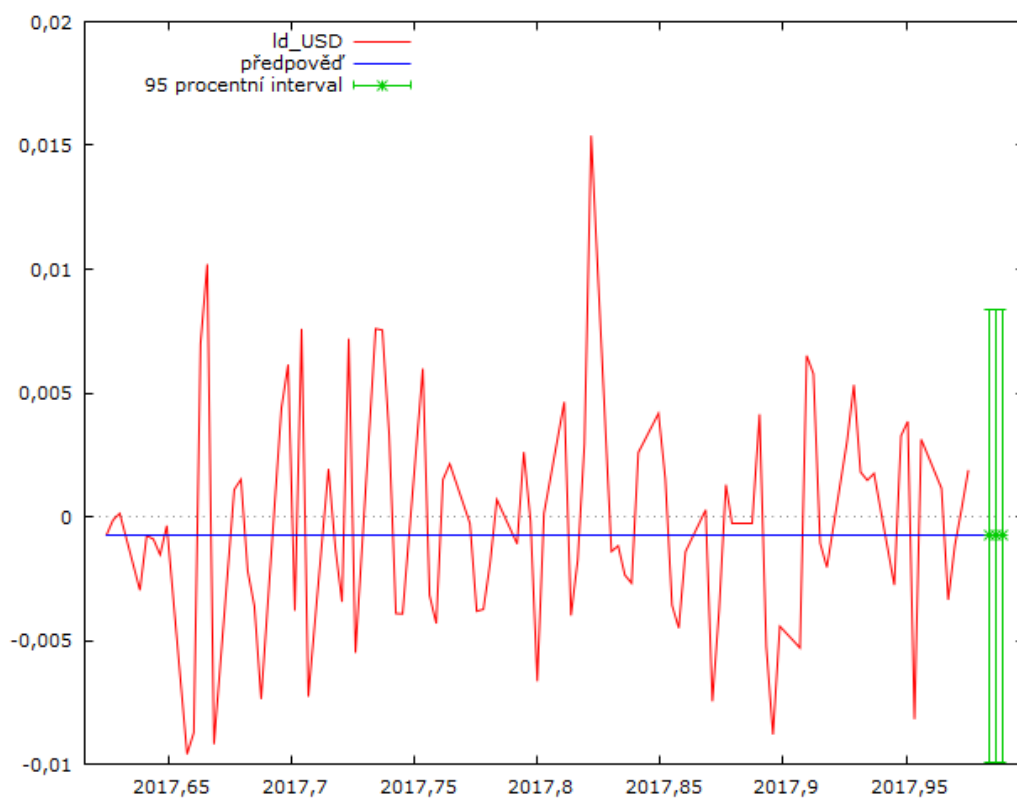
Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018

V rámci diagnostiky modelu bylo zjištěno, že není nutné dále aplikovat model volatility. Výsledný model pro logaritmy časové řady kurzu CZK/USD se tedy skládá pouze z úrovněvého modelu, který je vyjádřen rovnicí (4.2.1.2). Tento model je dále využit pro predikci kurzu.

$$y_t = -0,000766447 - 0,215751y_{t-1} - 0,981699y_{t-2} + y_{t-1} + 0,215751y_{t-2} + 0,981699y_{t-3} - 0,232087\varepsilon_{t-1} - 0,929131\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \quad (4.2.1.2)$$

4.2.3. Využití modelu pro predikci vývoje kurzu CZK/USD

V rámci diagnostiky modelu nebyly zjištěny žádné závažné nedostatky a lze ho tedy použít k dalšímu kroku, kterým je predikce. Vzhledem k tomu, že podmíněná heteroskedasticita byla na základě testu vyloučena, není nutné na data aplikovat model volatility. Predikce je tedy provedena čistě z úrovněvého modelu, a již není třeba ji upravovat o predikci modelu volatility. Na obrázku č. 34 je zachycena intervalová predikce pro řadu logaritmických diferencí.



Obrázek č. 34: Intervalová predikce pro řadu logaritmických výnosů řady kurzu CZK/USD

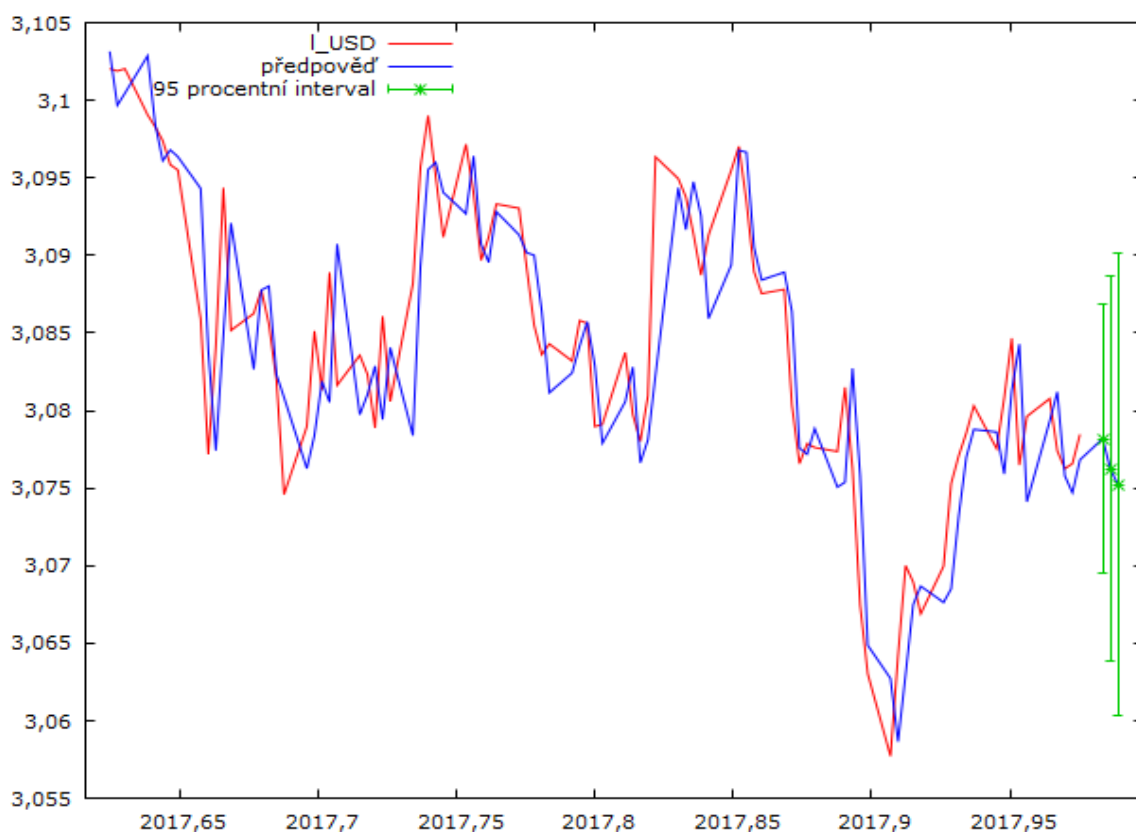
Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018

V níže uvedené tabulce č. 4 jsou hodnoty intervalových a bodových odhadů pro řadu logaritmů kurzu CZK/USD pro příslušné dny. A na obrázku č. 35 je intervalová předpověď pro tuto řadu graficky znázorněna.

Tabulka č. 4: Bodová a intervalová předpověď pro řadu logaritmů kurzu CZK/ USD

Datum	Předpověď	
	Intervalová	Bodová
27.12.2017	3,0695 - 3,0869	3,0782
28.12.2017	3,0638 - 3,0886	3,0762
29.12.2017	3,0603 - 3,0902	3,0752

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018



Obrázek č. 35: Predikce pro řadu logaritmů kurzu CZK/USD

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018

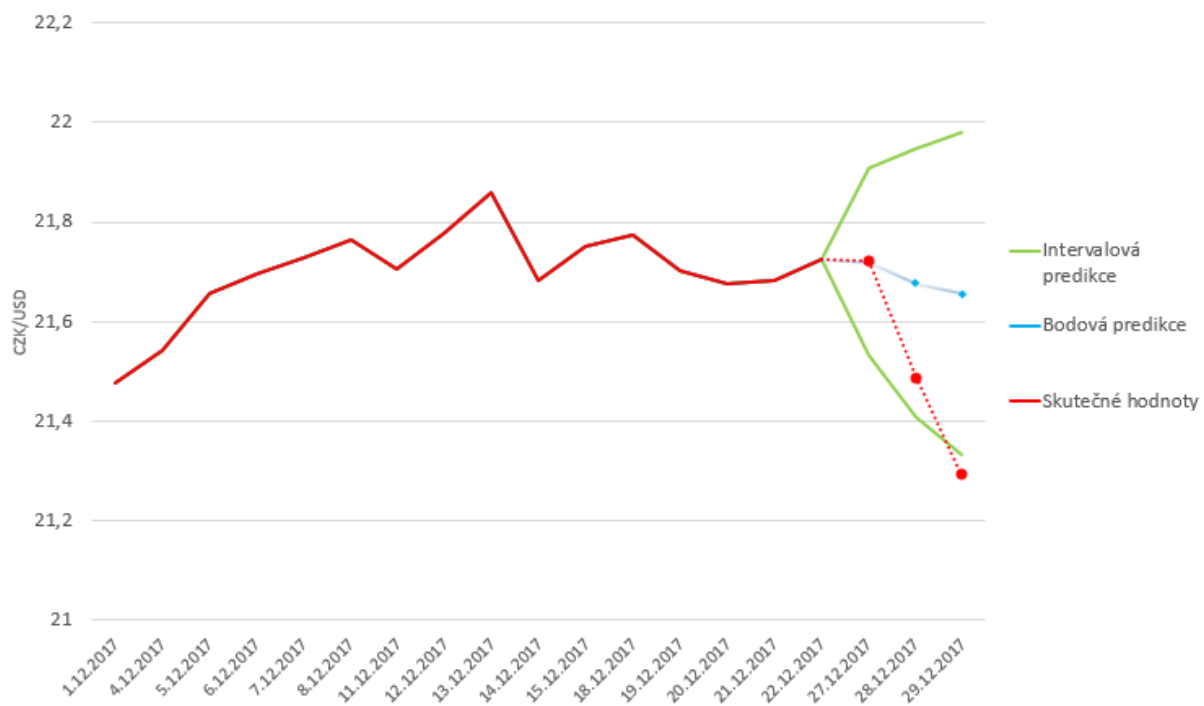
Tabulka níže poskytuje porovnání predikovaného intervalového a bodového odhadu se skutečnými hodnotami, za které byl dolar v dané dny reálně obchodován.

Tabulka č. 5: Výsledná intervalová a bodová předpověď pro kurz CZK /USD s porovnáním skutečných hodnot

Datum	Predikovaný interval	Bodová predikce	Skutečné hodnoty
27.12.2017	21,5308 - 21,9085	21,71888156	21,723
28.12.2017	21,4093 - 21,9469	21,67646262	21,489
29.12.2017	21,3337 - 21,9812	21,65507851	21,291

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018

Při zanesení obou predikcí a skutečného vývoje do grafu (viz obrázek č. 36) lze pozorovat, že první predikovaná hodnota pro den 27. prosince nejen, že spadá do odhadovaného intervalu, dokonce se téměř shoduje s bodovou predikcí. Hodnota eura pro den 28. prosince vůči dolaru posílila a taktéž spadá do predikovaného rozmezí. Dne 29. prosince koruna dále posilovala, až pod hranici predikované hodnoty. Stejně jako u časové řady směnného kurzu CZK/EUR lze rozdíl skutečného vývoje oproti předpovědi, odůvodnit vlivem *efektu konce roku*.



Obrázek č. 36: Porovnání bodové a intervalové predikce se skutečnými hodnotami kurzu CZK/USD

Zdroj: vlastní zpracování s využitím dat z kurzy.cz – Kurzy amerického dolaru, 2018

ZÁVĚR

Cílem práce bylo aplikovat popsané modely na časové řady směnných kurzů, zejména pak použít model volatility, jako stěžejní pojem diplomové práce. Dílčím cílem pak bylo následné využití odhadnutých modelů pro predikci budoucích hodnot dané časové řady. Pro tento účel byly vybrány časové řady dvou měnových párů. Konkrétně směnného kurzu CZK/EUR a CZK/USD. Data jsou zaznamenána na denní bázi a byla získána ze stránek kurzy.cz, přesné zdroje jsou uvedeny v seznamu použité literatur.

První řada, která byla pro modelování použita, je denní časová řada směnného kurzu české koruny vůči euru. Ačkoli při analýze řady bylo zjištěno, že model volatility není nezbytně nutné aplikovat, díky velmi malému přesahu *p-hodnoty* ARCH testu ve druhém zpoždění přes hladinu významnosti $\alpha = 0,05$, bylo možné model volatility pro řadu použít.

V rámci komparace reálných kurzů s predikcemi, bylo zjištěno, že do predikovaného intervalu se vešla hodnota pouze pro 28. prosinec. To může být způsobeno níže uvedenými jevy, díky nimž, má kurz ke konci roku mírně nestandardní vývoj.

Dne 27. prosince koruna vůči euru poměrně výrazně oslabil a kurz se dostal na hodnotu téměř 25,85 CZK/EUR, což je mírně nad krajní hodnotou predikovaného intervalu. Tento jev, označovaný jako *efekt závěru roku*, lze vysvětlit tím, že pro investory není výhodné držet ke konci roku větší množství koruny a investoři se jí tedy zbavují. Důvodem jsou odvody, které české banky musejí platit do Fondu pro řešení krize (což je nástroj ČNB pro financování nečekaných nastalých situací). Dalším možným vysvětlením je pákový efekt a nesynchronní obchodování. Po čtyři dny kdy se na trzích neobchodovalo (tedy dva státní svátky a dva víkendové dny) se kumulovaly informace, jejichž vliv se promítl právě v tomto oslabení. Další den, 28. prosince, naopak koruna vůči euru výrazně posílila, a to na hodnotu 25,645 CZK/EUR a kurz se tak udržel v predikovaném pásmu. Důvodem bylo ukončení výše zmíněného efektu a tedy opětovný zájem investorů o českou měnu. Tento trend pokračoval i 29. prosince, kdy se kurz koruny dostal na 25,54 CZK/EUR. Tato hodnota je již výrazně pod predikovaným intervalem a předčila i očekávání analytiků, kteří očekávali, že hodnota kurzu bude ke konci roku přinejlepším na hladině 25,7 CZK/EUR.

Dalším poměrně zajímavým zjištěním je skutečnost, že na časovou řadu kurzu české koruny vůči euru nebylo nezbytně nutné modely volatility aplikovat. Vzhledem k ukončeným intervencím 6. dubna 2017 (po téměř třech a půl letech, od listopadu 2013) se dalo očekávat, že kolísání kurzu bude naopak znatelnější. Česká národní banka byla také na tuto skutečnost

připravena a byla ochotna rozkolísanost kurzu tolerovat, aby si měna našla svou rovnovážnou úroveň, která by odrážela základní parametry české ekonomiky. V dlouhodobém horizontu očekávali analytici posílení koruny, což se potvrdilo. Zde lze odkázat na obrázek č. 6, na kterém je znázorněn vývoj kurzu po uvolnění intervencí. Konkrétně se mluvilo o posílení k hranici 25,50 CZK/EUR. V tomto směru mohli být analytici ještě mírně optimističtější, neboť nejnižší hodnota do konce roku 2017 byla 24. listopadu, kdy se kurz dostal na 25,41 CZK/EUR. Co se týká oslabení, byla diskutována hodnota 29,00 CZK/EUR. Nejvyšší hodnoty bylo dosaženo 26. dubna, a to 26,945 CZK/EUR. (Euro.cz, 2017)

Druhou analyzovanou časovou řadou byla denní časová řada směnného kurzu české koruny vůči americkému dolaru. V tomto případě byl postačující úrovnový model, neboť ARCH testem se nepotvrdila heteroskedasticita v žádném zpoždění.

Predikce pro tuto časovou řadu byla zvláště pro první predikovanou hodnotu až překvapivě přesná. Dne 27. prosince byl kurz koruny vůči americkému dolaru 21,723 CZK/USD, což je téměř odpovídá bodové predikci 21,719 CZK/USD. Následující dva dny koruna vůči americkému dolaru, stejně jako vůči euru, posilovala. 28. prosince se obchodovalo za 21,489 CZK/USD, což je hodnota patřící do predikovaného intervalu. 29. prosince byl kurz koruny vůči americkému dolaru 21,291 CZK/USD, což už ovšem predikovanému rozmezí neodpovídá. Toto oslabení dolaru lze zdůvodnit například tím, že mnoho investorů ke konci roku prodává tuto měnu z daňových důvodů.

Je zajímavé, že u kurzu CZK/EUR bylo možné pozorovat poměrně velký vliv pákového efektu v první predikovaný den, zatímco na kurzu CZK/USD se tento efekt prakticky nepodepsal.

Reálné hodnoty kurzů byly tedy ovlivněny nesynchronním obchodováním a pákovým efektem, dále lze pak pozorovat výrazný vliv efektu závěru roku. Tyto skutečnosti samozřejmě nemůže model předpokládat a do predikce tyto informace zahrnout. Tímto vznikl nesoulad mezi predikcí a skutečnými cenami měn.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] ARLT, Josef a Markéta ARLTOVÁ. Ekonomické časové řady: [vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace]. Praha: Grada, 2007. ISBN 80-247-1319-5.
- [2] ARLT, Josef a Markéta ARLTOVÁ. Finanční časové řady: [vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace]. Praha: Grada, 2003. ISBN 80-247-0330-0.
- [3] ARLT, Josef. Časové řady typu $I(0)$ a $I(1)$. Acta oeconomica pragensia [online]. Vysoká škola ekonomická, 1998, (2.), 5 [cit. 2018-03-31]. Dostupné z: http://nb.vse.cz/~arlt/hlavni/publik/A_CRTI0I1_98.pdf
- [4] ARLT, Josef. Moderní metody modelování ekonomických časových řad. Praha: Grada, 1999. ISBN 80-7169-539-4.
- [5] ARLTOVÁ, Markéta a Josef ARLT. Grafické metody analýzy ekonomických časových řad. Statistika 32[online]. Vysoká škola ekonomická, 1995, (11), 483 - 493 [cit. 2018-03-31]. ISSN 0322-788x. Dostupné z: http://nb.vse.cz/~arlt/publik/aa_gmaecr_95.pdf
- [6] BOROVIČKA, Adam. Modelování volatility akciového indexu FTSE 100. GRANT journal [online]. 2012 [cit. 2018-03-31]. ISSN 1805-062X. Dostupné z: <http://www.grantjournal.com/issue/0101/PDF/0101borovicka.pdf>
- [7] CIPRA, Tomáš. Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1986. ISBN 99-00-00157-X
- [8] CIPRA, Tomáš. Finanční ekonometrie. Praha: Ekopress, 2008. ISBN 978-80-86929-43-9.
- [9] ČNB ukončila intervence. Koruna posílila k hranici 26,60 za euro. Euro [online]. Mladá fronta, 2017 [cit. 2018-03-31]. Dostupné z: <https://www.euro.cz/politika/cnb-ukoncila-intervence-koruna-posilila-k-hranici-26-60-za-euro-1340727>
- [10] DUSPIVA, Pavel a Liběna TETŘEVOVÁ. Kapitálové trhy: pro kombinovanou formu studia. Vyd. 3., upr. a dopl. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2006. ISBN 80-7194-896-9.
- [11] EUR euro, od 22.12.2017 do 2.1.2017, historie kurzů měn. Kurzycz [online]. 2018 [cit. 2018-03-31]. Dostupné z: <https://www.kurzy.cz/kurzy-men/kurzy.asp?A=H&KM=EUR&D1=2.1.2017&D2=22.12.2017&I=1>

- [12] GOURIEROUX, Christian. ARCH models and financial applications. New York: Springer, c1997. ISBN 0-387-94876-7.
- [13] HUŠEK, Roman. Ekonometrická analýza. Praha: Oeconomica, 2007. ISBN 978-80-245-1300-3.
- [14] CHEN, James. Essentials of foreign exchange trading. Hoboken, N.J.: Wiley, c2009. ISBN 978-047-0390-863.
- [15] Implikovaná volatilita. Středoevropské centrum pro finance a management [online]. [cit. 2018-03-31]. Dostupné z: <http://www.finance-management.cz/080vypisPojmu.php?IdPojPass=76>
- [16] JÍLEK, Josef. Finanční rizika. Praha: Grada, 2000. ISBN 80-7169-579-3.
- [17] KOHOUT, Pavel. Investiční strategie pro třetí tisíciletí. 7., aktualiz. a přeprac. vyd. Praha: Grada, 2013. Finance (Grada). ISBN 978-80-247-5064-4.
- [18] O fondu pro řešení krize. *Garanční systém finančního trhu* [online]. 2016 [cit. 2018-04-24]. Dostupné z: <https://www.garancnisystem.cz/reseni-krize/>
- [19] Povaha a rizika obchodování s cennými papíry. Lynxbroker.cz [online]. [cit. 2018-03-31]. Dostupné z: https://www.lynxbroker.cz/media/dokumenty/LYNX_Povaha_a_Rizika.pdf
- [20] RADOVÁ, Jarmila, Petr DVOŘÁK a Jiří MÁLEK. Finanční matematika pro každého. 8., rozš. vyd. Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4831-3.
- [21] Režimy měnových kurzů. Kurzy měn ČNB [online]. 2013 [cit. 2018-03-31]. Dostupné z: <http://www.kurzymencnb.cz/Rezimy-menovych-kurzu.php>
- [22] SHILLER, Robert J. Market volatility. Cambridge, Mass.: MIT Press, c1989. ISBN 026219290x.
- [23] SCHWARTZ, Robert A. a Reto. FRANCIONI. Equity markets in action: the fundamentals of liquidity, market structure & trading. Hoboken, N.J.: J. Wiley, c2004. ISBN 978-0471469223.
- [24] TSAY, Ruey S. Analysis of financial time series. 2nd ed. Hoboken: John Wiley, c2005. ISBN 0-471-69074-0.
- [25] TYLEČEK, Jiří. Pár slov o tom, jak profitovat na vysoké volatilitě. XPuls [online]. 2014 [cit. 2018-03-31]. Dostupné z: <https://xpuls.cz/par-slov-o-tom-jak-profitovat-na-vysoke-volatilite/>

- [26] USD americký dolar, od 22.12.2017 do 2.1.2017, historie kurzů měn. Kurzy.cz [online]. 2018 [cit. 2018-03-31]. Dostupné z: <https://www.kurzy.cz/kurzy-men/kurzy.asp?A=H&KM=USD&D1=02.01.2017&D2=22.12.2017&I=1>
- [27] ZAPLETAL, Josef. Úvod do analýzy ekonomických časových řad. Brno: PC-DIR Real, 2000. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-1719-6.

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha A **Data směnného kurzu CZK/EUR**

Příloha B **Data směnného kurzu CZK/USD**

Příloha A

Data směnného kurzu CZK/EUR

Datum	EUR				
6.4.2017	26,75	2.6.2017	26,36	1.8.2017	26,13
7.4.2017	26,565	5.6.2017	26,325	2.8.2017	26,125
10.4.2017	26,53	6.6.2017	26,335	3.8.2017	25,965
11.4.2017	26,66	7.6.2017	26,315	4.8.2017	26,065
12.4.2017	26,695	8.6.2017	26,27	7.8.2017	26,115
13.4.2017	26,705	9.6.2017	26,22	8.8.2017	26,15
14.04.2017	26,7	12.6.2017	26,2	9.8.2017	26,16
17.04.2017	26,73	13.6.2017	26,145	10.8.2017	26,16
18.4.2017	26,76	14.6.2017	26,165	11.8.2017	26,155
19.4.2017	26,795	15.6.2017	26,21	14.8.2017	26,12
20.4.2017	26,91	16.6.2017	26,23	15.8.2017	26,14
21.4.2017	26,935	19.6.2017	26,17	16.8.2017	26,045
24.4.2017	26,795	20.6.2017	26,295	17.8.2017	26,01
25.4.2017	26,77	21.6.2017	26,265	18.8.2017	26,11
26.4.2017	26,945	22.6.2017	26,27	21.8.2017	26,085
27.4.2017	26,935	23.6.2017	26,295	22.8.2017	26,085
28.4.2017	26,92	26.6.2017	26,24	23.8.2017	26,125
01.05.2017	26,905	27.6.2017	26,27	24.8.2017	26,1
2.5.2017	26,89	28.6.2017	26,325	25.8.2017	26,085
3.5.2017	26,87	29.6.2017	26,285	28.8.2017	26,1
4.5.2017	26,77	30.6.2017	26,195	29.8.2017	26,14
5.5.2017	26,78	3.7.2017	26,14	30.8.2017	26,045
08.05.2017	26,725	4.7.2017	26,13	31.8.2017	26,105
9.5.2017	26,67	05.07.2017	26,135	1.9.2017	26,075
10.5.2017	26,64	06.07.2017	26,1075	4.9.2017	26,06
11.5.2017	26,6	7.7.2017	26,08	5.9.2017	26,075
12.5.2017	26,575	10.7.2017	26,095	6.9.2017	26,11
15.5.2017	26,47	11.7.2017	26,125	7.9.2017	26,11
16.5.2017	26,42	12.7.2017	26,11	8.9.2017	26,1
17.5.2017	26,435	13.7.2017	26,12	11.9.2017	26,075
18.5.2017	26,63	14.7.2017	26,075	12.9.2017	26,105
19.5.2017	26,5	17.7.2017	26,09	13.9.2017	26,1
22.5.2017	26,485	18.7.2017	26,08	14.9.2017	26,1
23.5.2017	26,48	19.7.2017	26,035	15.9.2017	26,08
24.5.2017	26,465	20.7.2017	26,04	18.9.2017	26,09
25.5.2017	26,41	21.7.2017	26,02	19.9.2017	26,105
26.5.2017	26,435	24.7.2017	26,025	20.9.2017	26,09
29.5.2017	26,435	25.7.2017	26,02	21.9.2017	26,085
30.5.2017	26,465	26.7.2017	26,045	22.9.2017	26,045
31.5.2017	26,42	27.7.2017	26,045	25.9.2017	26,035
1.6.2017	26,395	28.7.2017	26,05	26.9.2017	26,055
		31.7.2017	26,08	27.9.2017	26,035

28.09.2017	26,005
29.9.2017	25,975
2.10.2017	25,995
3.10.2017	25,93
4.10.2017	25,885
5.10.2017	25,835
6.10.2017	25,815
9.10.2017	25,89
10.10.2017	25,9
11.10.2017	25,88
12.10.2017	25,89
13.10.2017	25,81
16.10.2017	25,765
17.10.2017	25,735
18.10.2017	25,705
19.10.2017	25,725
20.10.2017	25,69
23.10.2017	25,64
24.10.2017	25,58
25.10.2017	25,59
26.10.2017	25,585

27.10.2017	25,67
30.10.2017	25,645
31.10.2017	25,67
1.11.2017	25,555
2.11.2017	25,56
3.11.2017	25,65
6.11.2017	25,61
7.11.2017	25,59
8.11.2017	25,56
9.11.2017	25,53
10.11.2017	25,545
13.11.2017	25,565
14.11.2017	25,565
15.11.2017	25,67
16.11.2017	25,56
17.11.2017	25,5625
20.11.2017	25,565
21.11.2017	25,53
22.11.2017	25,47
23.11.2017	25,46
24.11.2017	25,41

27.11.2017	25,43
28.11.2017	25,46
29.11.2017	25,475
30.11.2017	25,495
1.12.2017	25,525
4.12.2017	25,56
5.12.2017	25,655
6.12.2017	25,635
7.12.2017	25,61
8.12.2017	25,555
11.12.2017	25,6
12.12.2017	25,625
13.12.2017	25,65
14.12.2017	25,685
15.12.2017	25,68
18.12.2017	25,685
19.12.2017	25,66
20.12.2017	25,675
21.12.2017	25,715
22.12.2017	25,75

Příloha B

Data směnného kurzu CZK/USD

Datum	USD				
6.4.2017	25,076	2.6.2017	23,501	1.8.2017	22,123
7.4.2017	24,999	5.6.2017	23,401	2.8.2017	22,099
10.4.2017	25,082	6.6.2017	23,393	3.8.2017	21,89
11.4.2017	25,112	7.6.2017	23,459	4.8.2017	21,961
12.4.2017	25,172	8.6.2017	23,392	7.8.2017	22,135
13.4.2017	25,122	9.6.2017	23,463	8.8.2017	22,134
14.4.2017	25,147	12.6.2017	23,348	9.8.2017	22,301
17.04.2017	25,1	13.6.2017	23,308	10.8.2017	22,297
18.4.2017	25,053	14.6.2017	23,354	11.8.2017	22,232
19.4.2017	24,985	15.6.2017	23,468	14.8.2017	22,143
20.4.2017	25,043	16.6.2017	23,49	15.8.2017	22,26
21.4.2017	25,179	19.6.2017	23,369	16.8.2017	22,243
24.4.2017	24,706	20.6.2017	23,568	17.8.2017	22,24
25.4.2017	24,58	21.6.2017	23,565	18.8.2017	22,243
26.4.2017	24,735	22.6.2017	23,522	21.8.2017	22,177
27.4.2017	24,752	23.6.2017	23,53	22.8.2017	22,16
28.4.2017	24,629	26.6.2017	23,457	23.8.2017	22,14
01.05.2017	24,634	27.6.2017	23,29	24.8.2017	22,106
2.5.2017	24,639	28.6.2017	23,141	25.8.2017	22,098
3.5.2017	24,607	29.6.2017	23,032	28.8.2017	21,887
4.5.2017	24,499	30.6.2017	22,952	29.8.2017	21,697
5.5.2017	24,433	3.7.2017	22,993	30.8.2017	21,849
08.05.2017	24,465	4.7.2017	23,017	31.8.2017	22,073
9.5.2017	24,497	05.07.2017	23,005	1.9.2017	21,871
10.5.2017	24,486	06.07.2017	22,9285	4.9.2017	21,895
11.5.2017	24,495	7.7.2017	22,852	5.9.2017	21,928
12.5.2017	24,435	10.7.2017	22,917	6.9.2017	21,88
15.5.2017	24,124	11.7.2017	22,907	7.9.2017	21,801
16.5.2017	23,888	12.7.2017	22,804	8.9.2017	21,641
17.5.2017	23,778	13.7.2017	22,878	11.9.2017	21,736
18.5.2017	23,927	14.7.2017	22,842	12.9.2017	21,87
19.5.2017	23,71	17.7.2017	22,762	13.9.2017	21,787
22.5.2017	23,557	18.7.2017	22,57	14.9.2017	21,953
23.5.2017	23,615	19.7.2017	22,572	15.9.2017	21,794
24.5.2017	23,642	20.7.2017	22,671	18.9.2017	21,836
25.5.2017	23,552	21.7.2017	22,347	19.9.2017	21,809
26.5.2017	23,606	24.7.2017	22,344	20.9.2017	21,734
29.5.2017	23,627	25.7.2017	22,25	21.9.2017	21,891
30.5.2017	23,69	26.7.2017	22,371	22.9.2017	21,771
31.5.2017	23,545	27.7.2017	22,269	25.9.2017	21,937
1.6.2017	23,554	28.7.2017	22,209	26.9.2017	22,103
		31.7.2017	22,24	27.9.2017	22,176

28.09.2017	22,0895
29.9.2017	22,003
2.10.2017	22,135
3.10.2017	22,065
4.10.2017	21,97
5.10.2017	22,003
6.10.2017	22,05
9.10.2017	22,044
10.10.2017	21,96
11.10.2017	21,878
12.10.2017	21,837
13.10.2017	21,852
16.10.2017	21,828
17.10.2017	21,885
18.10.2017	21,881
19.10.2017	21,736
20.10.2017	21,739
23.10.2017	21,84
24.10.2017	21,753
25.10.2017	21,715
26.10.2017	21,779

27.10.2017	22,117
30.10.2017	22,086
31.10.2017	22,06
1.11.2017	22,008
2.11.2017	21,949
3.11.2017	22,006
6.11.2017	22,098
7.11.2017	22,132
8.11.2017	22,053
9.11.2017	21,954
10.11.2017	21,923
13.11.2017	21,929
14.11.2017	21,766
15.11.2017	21,684
16.11.2017	21,712
17.11.2017	21,7065
20.11.2017	21,701
21.11.2017	21,791
22.11.2017	21,677
23.11.2017	21,487
24.11.2017	21,392

27.11.2017	21,279
28.11.2017	21,418
29.11.2017	21,542
30.11.2017	21,519
1.12.2017	21,475
4.12.2017	21,541
5.12.2017	21,656
6.12.2017	21,695
7.12.2017	21,727
8.12.2017	21,765
11.12.2017	21,705
12.12.2017	21,776
13.12.2017	21,86
14.12.2017	21,682
15.12.2017	21,75
18.12.2017	21,775
19.12.2017	21,702
20.12.2017	21,677
21.12.2017	21,684
22.12.2017	21,725