

**Univerzita Pardubice**

**Fakulta ekonomicko-správní**

**Diferenciální rovnice a jejich ekonomické aplikace**

**Gregor Vohralík**

**Bakalářská práce  
2018**

Univerzita Pardubice  
Fakulta ekonomicko-správní  
Akademický rok: 2017/2018

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE (PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: Ing. Gregor Vohralík  
Osobní číslo: E14253  
Studijní program: B6208 Ekonomika a management  
Studijní obor: Ekonomika a provoz podniku  
Název tématu: Diferenciální rovnice a jejich ekonomické aplikace  
Zadávací katedra: Ústav matematiky a kvantitativních metod

### Zásady pro vypracování:

Cíl práce: Práce bude obsahovat shrnutí základních poznatků z teorie vybraných typů diferenciálních rovnic a na vhodných příkladech ukáže možnosti využití těchto rovnic zejména v oblasti podnikové ekonomiky.

Osnova:

- Základy teorie obyčejných diferenciálních rovnic.
- Lineární diferenciální rovnice 1. a 2. řádu.
- Aplikace vybraných typů diferenciálních rovnic při řešení ekonomických problémů.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy: cca 35 stran

Forma zpracování bakalářské práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

BARNETT, A., R., ZIEGLER, M., R. Applied Mathematics for Business, Economics, Life Sciences, and Social Sciences. 6th ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 1075 s. ISBN 0-13-574575-6.

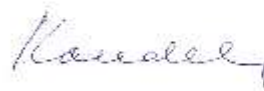
HOY, M., et al. Mathematics for Economics. 3rd ed. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2011. 959 s. ISBN 978-0-262-51622-8.

KALAS, J., RÁB, M. Obyčejné diferenciální rovnice. Brno: Masarykova Univerzita, 2001. 212 s. ISBN 80-210-2589-1.

MANKIW, G., N. Zásady ekonomie. Praha: Grada Publishing, 2000. 768 s. ISBN 978-80-7169-891-3.

TENENBAUM, M., POLLARD, H. Ordinary Differential Equations: An Elementary Textbook for Students of Mathematics, Engineering, and the Sciences. Dover Publications, 1985. ISBN 978-0486649405.


Vedoucí bakalářské práce:

  
Mgr. Libor Koudela, Ph.D.


Ústav matematiky a kvantitativních metod

Data zadání bakalářské práce: 1. září 2017

Termín odevzdání bakalářské práce: 30. dubna 2018

  
doc. Ing. Romana Převorová, Ph.D.  
děkanka

L.S

  
doc. Ing. Marcela Křížová, Ph.D.  
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 1. září 2017.

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 30.4.2018

Gregor Vohralík

## **PODĚKOVÁNÍ:**

Tímto bych rád poděkoval svému vedoucímu práce Mgr. Liboru Koudelovi, Ph.D. za jeho odbornou pomoc, cenné rady a poskytnuté materiály, které mi pomohly při zpracování bakalářské práce. Chtěl bych také poděkovat své rodině za morální podporu a trpělivost během celého studia.

## **ANOTACE**

*Tato práce má za úkol přiblížit možnosti využití obyčejných diferenciálních rovnic při popisu a studiu ekonomických jevů. Vedle teoretického popisu problematiky obyčejných diferenciálních rovnic bude provedena praktická aplikace pomocí Solowova modelu ekonomického růstu a při imunizaci dluhopisového portfolia.*

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

*Obyčejné diferenciální rovnice, lineární diferenciální rovnice 1. řádu, lineární diferenciální rovnice 2. řádu, Solowův model ekonomického růstu, HDP, dluhopisy, durace dluhopisů.*

## **TITLE**

Differential equations and economic applications

## **ANNOTATION**

*This work aims to approach the possibilities of using ordinary differential equations in the description and study of economic phenomena. In addition to a theoretical description of the problem of ordinary differential equations, practical application will be implemented using the Solow model of economic growth and the immunization of the bond portfolio.*

## **KEYWORDS**

*Ordinary differential equations, linear differential equations of first order, linear differential equations of second order, Solow's model of economics growth, Gross Domestic Product, bond, duration of bond.*

# OBSAH

ÚVOD .....	10
<b>1 ZÁKLADY TEORIE OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC.....</b>	<b>11</b>
1.1 STRUČNÁ HISTORIE DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC .....	11
1.2 ŘEŠENÍ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC .....	13
1.3 GEOMETRICKÁ INTERPRETACE OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC .....	14
<b>2 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU .....</b>	<b>16</b>
2.1 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI.....	16
2.2 LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU .....	20
2.3 NĚKTERÉ DALŠÍ TYPY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 1. ŘÁDU .....	24
2.3.1 <i>Autonomní rovnice</i> .....	24
2.4 SOLOWŮV MODEL -EKONOMICKÁ APLIKACE ODR 1.ŘÁDU.....	25
2.4.1 <i>Neoklasická teorie ekonomického růstu</i> .....	26
2.4.2 <i>Solowův model a jeho předpoklady</i> .....	27
2.5 DURACE DLUHOPISŮ - EKONOMICKÁ APLIKACE ODR 1.ŘÁDU .....	31
2.5.1 <i>Základní pojmy</i> .....	31
2.5.2 <i>Základní členění dluhopisů</i> .....	32
2.5.3 <i>Způsoby určení ceny dluhopisů</i> .....	33
2.5.4 <i>Výnosová křivka a výnosnost dluhopisů</i> .....	35
2.5.1 <i>Fisher-Weilova durace</i> .....	37
<b>3 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU .....</b>	<b>39</b>
3.1 HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DR 2. ŘÁDU S KONST. KOEFICIENTY .....	39
3.2 NEHOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DR 2. ŘÁDU S KONST. KOEFICIENTY .....	41
3.2.1 <i>Stabilita a konvergence řešení nehomogenních DR 2. řádu</i> .....	45
<b>4 EKONOMICKÉ APLIKACE DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC .....</b>	<b>47</b>
4.1 SOLOWŮV MODEL EKONOMICKÉHO RŮSTU .....	47
4.1.1 <i>Stanovení konstant (<math>n+g</math>), <math>n</math> a <math>g</math></i> .....	47
4.1.2 <i>Stanovení časového vývoje jednotlivých ekonomických ukazatelů</i> .....	48
4.2 DURACE DLUHOPISOVÉHO PORTFOLIA POMOCÍ FISHER-WEILOVY DURACE .....	59
4.2.1 <i>Výpočet Fisher-Weilovy durace a sestavení dluhopisového portfolia</i> .....	59
4.2.2 <i>Testování dluhopisového portfolia na pohyb úrokových měr</i> .....	61
<b>ZÁVĚR.....</b>	<b>62</b>
<b>POUŽITÁ LITERATURA .....</b>	<b>63</b>
<b>SEZNAM PŘÍLOH .....</b>	<b>66</b>

## SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Konstanty Solowova modelu stanovené z experimentálních dat .....	48
Tabulka 2: Porovnání časového vývoje skutečného HDP a HDP zjištěného Solowovým modelem .....	49
Tabulka 3: Porovnání časového vývoje skutečného počtu pracovníků $L_{real}$ a počtu pracovníků zjištěných Solowovým modelem.....	53
Tabulka 4: Porovnání časového vývoje skutečné tvorby kapitálu $K_{real}$ a tvorby kapitálu zjištěné Solowovým modelem.....	55
Tabulka 5: Porovnání časového vývoje skutečné úrovně technologií $A_{real}$ a úrovně technologií zjištěné Solowovým modelem.....	58
Tabulka 6: Státní kuponové dluhopisy .....	59
Tabulka 7: Durace jednotlivých finančních instrumentů .....	60
Tabulka 8: Výsledky imunizace dluhopisového portfolia.....	61

## SEZNAM ILUSTRACÍ

Obrázek 1: Směrové pole diferenciální rovnice .....	14
Obrázek 2: Směrové pole diferenciální rovnice, integrální křivky a izokliny.....	15
Obrázek 3: Směrové pole DR, integrální křivky a izokliny diferenciální rovnice $y'(x) = x$ ....	15
Obrázek 4: Vývoj ročních tržeb $S$ v závislosti na čase.....	19
Obrázek 5: Vývoj zůstatku na BÚ $A$ v závislosti na čase .....	23
Obrázek 6: Výnosová křivka dluhopisu .....	36
Obrázek 7: Porovnání vývoje reálného HDP České republiky a HDP zjištěných Solowovým modelem .....	50
Obrázek 8: Skladba HDP České republiky v roce 2005.....	51
Obrázek 9: Skladba HDP České republiky v roce 2016.....	51
Obrázek 10: Předpověď vývoje HDP České republiky na období let 2017 až 2021 .....	52
Obrázek 11: Porovnání vývoje reálné prac. síly České republiky a $L$ zjištěných Solowovým modelem .....	54
Obrázek 12: Porovnání vývoje tvorby hrubého fixního kapitálu České rep. a $K$ určeným Solowovým modelem.....	56
Obrázek 13: Podíl jednotlivých činností na tvorbě hrubého fixního kapitálu České rep. v roce 2005 .....	56
Obrázek 14: Podíl jednotlivých činností na tvorbě hrubého fixního kapitálu České rep. v roce 2016 .....	57
Obrázek 15: Porovnání vývoje úrovně technologií České republiky a $A$ zjištěných Solowovým modelem .....	59



## **SEZNAM ZKRATEK A ZNAČEK**

ČNB	Česká národní banka
ČSÚ	Český statistický úřad
DR	Diferenciální rovnice
FW durace	Fisher-Weilova durace
HDP	Hrubý domácí produkt
LDR	Lineární diferenciální rovnice
ODR	Obyčejné diferenciální rovnice

# ÚVOD

Obyčejné diferenciální rovnice představují velice zajímavou, a co se týká aplikací významnou součást matematických věd. Aplikace diferenciálních rovnic nalezneme ve většině oblastí lidského bádání a vědění. Ekonomické vědy netvoří žádnou výjimku. Zde diferenciální rovnice nacházejí své praktické uplatnění především při popisu ekonomických jevů vyvíjejících se určitým způsobem v čase. Práce je rozdělena do 4 částí.

V první teoretické části práce je provedeno objasnění základů teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Je zde uvedena i stručná historie diferenciálních rovnic. Poté je pozornost věnována způsobům řešení diferenciálních rovnic a jejich geometrické interpretaci.

Druhá část práce je taktéž teoretická a zabývá se objasněním teorie obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu včetně teoretických základů jejich ekonomických aplikací. Jsou zde popsány možnosti řešení diferenciálních rovnic se separovanými proměnnými, lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu a jsou zde lehce zmíněny i ostatní typy diferenciálních rovnic 1. řádu. Teoretické poznatky jsou v této části práce aplikovány na modelových příkladech s ekonomickou tematikou. Další dvě podkapitoly se věnují teorii ekonomických aplikací. Jedná se o problematiku Solowova modelu ekonomického růstu a problematiku dluhopisů.

Poslední teoretická část se věnuje teorii a možnostem řešení obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu. Je zde uvedena teorie homogenní i nehomogenní diferenciální rovnice 2. řádu doplněná o ukázky řešení příkladů.

Poslední část práce již tvoří praktické aplikace obyčejných diferenciálních rovnic na reálných datech. První ekonomickou aplikaci představuje Solowův model ekonomického růstu, kde se pozornost práce zaměřuje na popis vývoje HDP a ostatních ekonomických ukazatelů České republiky. Druhá ekonomická aplikace se týká provedení imunizace dluhopisového portfolia pomocí Fisher-Weilovy durace.

Cílem práce je shrnout základní poznatky z teorie obyčejných diferenciálních rovnic a na vhodných příkladech ukázat možnosti jejich využití při popisu ekonomických jevů.

# 1 ZÁKLADY TEORIE OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Pod pojem diferenciální rovnice lze zahrnout všechny typy rovnic obsahující neznámou funkci  $y$  spolu s jejími derivacemi. Pokud se jedná o funkci pouze jedné proměnné, pak takovou rovnici označujeme jako *obyčejnou diferenciální rovnici* (ODR). Na rozdíl od tzv. *parciálních diferenciálních rovnic*, které obsahují derivace hledané funkce podle více proměnných. ODR představují typ rovnic, které mají široké uplatnění v přírodních i společenských vědách včetně ekonomie. Pomocí ODR lze zkoumat řadu jevů, neboť funkce které, jsou řešením těchto rovnic, právě tyto jevy vysvětlují a popisují.

Rovnici

$$F(x, y, y' \dots y^n) = 0 \quad (1.1)$$

nazveme obyčejnou diferenciální rovnicí  $n$ -tého řádu. Pokud v rovnici vystupuje pouze první derivace dané funkce, označuje se taková rovnice jako *obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu*. V případě výskytu druhé derivace pak analogicky takovou rovnici nazýváme obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu. Řádem diferenciální rovnice tedy rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v dané rovnici vyskytuje.

Funkce  $F$  v rovnici  $F(x, y, y') = 0$  má definiční obor  $G$ , který je podmnožinou trojrozměrného euklidovského prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Řešením takovéto rovnice je pak funkce  $y$ , která je diferencovatelná v určitém intervalu  $J$  a splňuje podmínky [10]

$$[x, y(x), y'(x)] \in G \quad (1.2)$$

$$F(x, y, y' \dots y) = 0 \quad (1.3)$$

## 1.1 Stručná historie diferenciálních rovnic

Historie týkající se diferenciálních rovnic sahá až na přelom 16. a 17. století, kde se prvně objevily zmínky náležící do teorie diferenciálních rovnic v pracích autorů *Johna Napiera* (1550-1716) a *René Descarta* (1596-1650). Prvně jmenovaný autor se zabýval výpočtem logaritmu čísel a druhý jmenovaný pracoval s objevem zákona lomu světla a zabýval se konstrukcí křivek pomocí vlastností jejich tečen nebo normál.

Za skutečné průkopníky teorie diferenciálních rovnic jsou však považováni až *Isaac Newton* (1642 -1727) a *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716) ve svých pracích vydaných na konci 17. století. Práce těchto autorů tvoří samotný základ diferenciálního a integrálního

počtu. I. Newton se prvně pokusil o klasifikaci rovnic 1. řádu při studiu pohybu 2 a více těles při vzájemném gravitačním působení. G. W. Leibniz se již roku 1675 zabýval hledáním primitivních funkcí, což lze již považovat za samotné řešení diferenciálních rovnic.

Další vývoj teorie obyčejných diferenciálních rovnic ovlivnili *Jacob Bernoulli* (1655-1705) a *Johann Bernoulli* (1667-1748). *Johann Bernoulli* zformuloval úlohu popisující tvar tzv. řetězovky, obrácený tvar řetězovky měl využití především při konstrukcích stropních oblouků v dávné architektuře. *Řetězovka* je tedy křivka, kterou vytvoří řetěz (lépe řečeno homogenní dokonale pevné a ohebné vlákno), který je na svých koncích zavěšen (ne nutně ve stejné výšce) v homogenním gravitačním poli. Její tvar odpovídá grafu funkce hyperbolický kosinus a je to poloha, v níž má vlákno zavěšené mezi dvěma body nejmenší polohovou energii. Také formuloval řešení týkající se problému popisu isochron, což jsou obecně čáry spojující místa v grafu či na mapě se stejným časem výskytu daného jevu. Problém izochrony byl formulován takto: pohybuje-li se hmotný bod po izochroně, nezávisí doba, za kterou pod vlivem gravitace dospěje do koncového bodu, na poloze startovního bodu. *Izochrona* je obrácená cykloida.

*Jacob Bernoulli* se zasadil o explicitní popis separace proměnných, o kterém je zmínka již v práci Leibnize z roku 1691. Jednalo se v podstatě o vývoj teorie obyčejných diferenciálních rovnic hledající obecné metody integrace řešených rovnic. Tato etapa trvala přibližně do roku 1775.

V roce 1824 dokázal *Louis Augustin Cauchy* (1784-1857) tvrzení o existenci a jednoznačnosti řešení pro spojité funkce, které mají spojitou derivaci podle  $y$ . Metoda řešení soustav rovnic o dvou až čtyřech neznámých pochází od *Colina Maclaurina* (1698-1746). Další významný matematik *Gabriel Cramer* (1704-1752) popsal v roce 1750 známé *Cramerovo pravidlo*, které se používá při řešení soustavy lineárních algebraických rovnic, kde matice systému je regulární. Tento úsek dějin diferenciálních rovnic dovršil norský matematik *Sophus Lie* (1842-1899), který využil ke studiu diferenciálních rovnic tzv. teorii spojitě symetrie. Poukazoval na to, že kvadraturami lze řešit jen omezený okruh rovnic, takže problém integrace tak ztratil svůj původní význam a obecná teorie řešení diferenciálních rovnic se musí podle něho ubírat jiným směrem.

Současně však vznikaly v různých oborech problémy, vyžadující studium funkcí definovaných diferenciálními rovnicemi v celém jejich existenčním rozsahu. To přimělo *Alexandra Michajloviče Ljapunova* (1857-1918) k budování kvalitativní teorie. Jeho práce

měla obrovský význam pro další rozvoj teorie diferenciálních rovnic a jejich aplikaci při studiu oscilací mechanických soustav [2].

## 1.2 Řešení obyčejných diferenciálních rovnic

*Řešením* obyčejné diferenciální rovnice obecně  $n$ -tého řádu rozumíme funkci jedné proměnné  $y = y(x)$  definovanou na určitém intervalu, která má derivace právě až do  $n$ -tého řádu a po jejím zpětném dosazení do původní *ODR* tuto rovnici převádí na daném intervalu na identickou rovnost.

Řešení diferenciální rovnice nemusí být vyjádřeno pouze explicitně jako  $y = y(x)$ , může být vyjádřeno i v implicitním tvaru  $G(x,y) = 0$ .

Lze rozlišit 3 druhy řešení *ODR*  $n$ -tého řádu:

- (a) **obecné řešení** *ODR*  $n$ -tého řádu má tvar  $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , kde  $C_i$  jsou konstanty,
- (b) **partikulární řešení** je řešení, které můžeme získat z obecného řešení vhodnou volbou konstant vyhovující tzv. počáteční podmínce,
- (c) **singulární řešení** je řešení, které není možné získat z obecného řešení žádnou volbou konstant [16].

Způsob, kterým dospějeme k řešení obecně určité diferenciální rovnice, můžeme velice snadno demonstrovat na diferenciální rovnici prvního řádu ve tvaru

$$y' = f(x, y) \quad (1.4)$$

Tato rovnice je zvláštním případem rovnice (1.1), řešením této rovnice za splnění podmínek (1.2) a (1.3) je funkce  $y$ . Z výše uvedeného vyplývá, že se jedná o funkci diferencovatelnou v určitém intervalu  $J$ . Grafická podoba řešení takovéto rovnice se označuje jako *integrální křivka*.

Tzv. *Cauchyova úloha* představuje úkol nalézt řešení rovnice (1.4) splňující počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0. \quad (1.5)$$

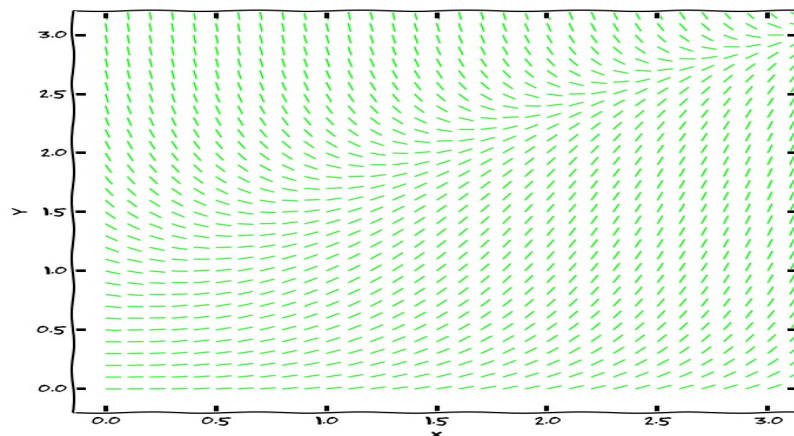
Obecným řešením diferenciální rovnice se rozumí každá funkce  $y(x, C)$ , z níž lze vhodnou volbou konstanty  $C$  obdržet libovolné řešení této rovnice. Obecné řešení je tedy funkce, která závisí na jednom parametru  $C$ . Konkrétní volbou konstanty  $C$  lze

z obecného řešení dané diferenciální rovnice získat řešení vyhovující počáteční podmínce, které se označuje jako řešení *partikulární* [13].

### 1.3 Geometrická interpretace obyčejných diferenciálních rovnic

Diferenciální rovnice (1.4) přiřazuje právě každému bodu  $[x,y]$  z definičního oboru funkce  $F$ , právě jednu hodnotu  $y'(x)$ , kterou můžeme chápat jako směrnici přímky procházející bodem  $[x,y]$ . Tato přímka, se středem v bodě  $[x,y]$  a směrnici  $y'(x)$ , se nazývá *lineární element*.

Množina všech lineárních elementů tvoří tzv. *směrové pole* dané diferenciální rovnice, jak je možné vidět na obr. 1. Grafy všech možných řešení dané diferenciální rovnice pak tvoří křivky procházející daným směrovým polem, tak že v každém jejich bodě mají lineární elementy svoje tečny.



**Obrázek 1:** Směrové pole diferenciální rovnice

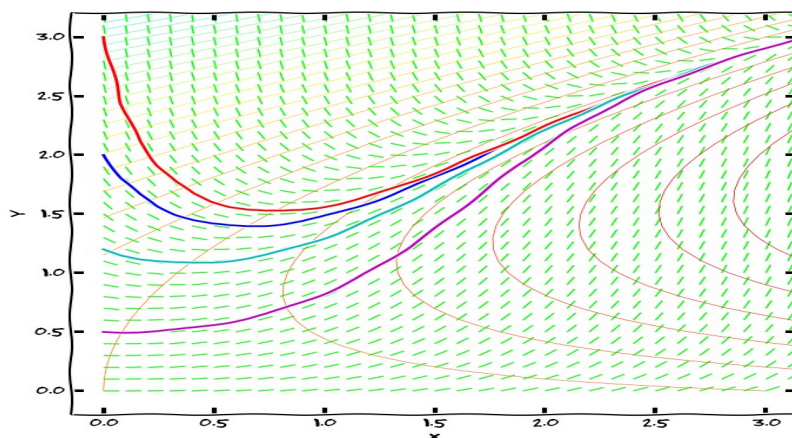
Zdroj: [13]

Počáteční podmínka  $y(x_0) = y_0$  v podstatě geometricky vyjadřuje skutečnost, že graf příslušného řešení prochází v rovině bodem  $[x_0, y_0]$ . Graf odpovídající příslušnému partikulárnímu řešení se nazývá *integrální křivka*. Pokud se jedná o jediné řešení počáteční podmínky, tak tímto bodem prochází pouze tato jedna křivka.

Vrstevnice funkce  $f(x,y)$  mají tu vlastnost, že derivace integrálních křivek podél každé z vrstevnic je konstantní. Proto tyto křivky nazýváme *izokliny*, což jsou množiny bodů oblasti  $G$ , kterým je přiřazen stejný směr [13]. (viz obr. 2) Na tomto obrázku jsou právě izokliny zvýrazněny barevně, a to tenkou červenou čarou. I když je zřejmé že integrálních křivek odpovídající příslušné počáteční podmínce může být mnoho, tak barevně jsou označeny na tomto obrázku celkem 4 (červená, tmavě a světle modrá a fialová křivka). Na obr. 3 je

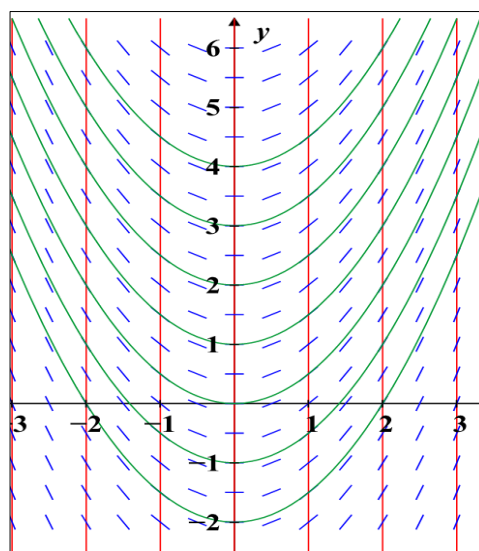
názorně zobrazeno směrové pole, integrální křivky a izokliny pro diferenciální rovnici ve tvaru  $y'(x) = x$ , která poskytuje obecné řešení prostou integrací ve tvaru  $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ . Integrální křivky zde tvoří zeleně zvýrazněné paraboly, jejichž  $y$  souřadnice průsečíků s osou  $y$  je rovna hodnotě konstanty  $C$  pro konkrétní partikulární řešení.

Izokliny zde reprezentují červeně zvýrazněné rovnoběžky s osou  $y$ . Matematicky lze totiž izoklinu popsat  $y'(x) = C_2$ , jelikož spojují body se stejným směrem, tak musí mít stejnou hodnotu derivace. Z tvaru původní DR vyplývá rovnost  $y'(x) = C_2 = x$ . A tedy  $x = C_2$  pro každé  $y$ , proto jsou v tomto konkrétním případě izokliny tvořeny rovnoběžkami s osou  $y$  protínající osu  $x$  v bodě s  $x$  souřadnicí rovnou právě konstantě  $C_2$ .



**Obrázek 2:** Směrové pole diferenciální rovnice, integrální křivky a izokliny

Zdroj: [14]



**Obrázek 3:** Směrové pole DR, integrální křivky a izokliny diferenciální rovnice  $y'(x) = x$

Zdroj: [15]

## 2 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

Jak již bylo zmíněno, pokud se v diferenciální rovnici vyskytuje nanejvýše první derivace hledané funkce, označuje se skupina takových rovnic jako diferenciální rovnice 1. řádu. Jedná se o širokou škálu nejrůznějších typů rovnic. Všem je však společná věta o existenci a jednoznačnosti řešení, kterou je na místě zde uvést.

**Věta 2.1 (o existenci a jednoznačnosti řešení).** *Nechť  $f(x,y)$  je funkce, která je spojitá v oblasti  $G$  a současně má v této oblasti ohraničenou parciální derivaci  $\partial f/\partial y$ . Potom ke každé dvojici čísel  $[x_0, y_0]$  z množiny  $G$  existuje právě jedno řešení rovnice (1.4), které je definované v jistém intervalu  $J$  obsahujícím bod  $x_0$ , přičemž  $y(x_0) = y_0$ . Každé jiné řešení  $z$  splňující podmínku  $z(x_0) = y_0$  je zúžením tohoto řešení [18].*

Mezi základní typy diferenciálních rovnic 1. řádu lze zařadit rovnice se separovanými proměnnými a lineární diferenciální rovnice 1. řádu. Těmto dvěma skupinám rovnic bude v následujícím textu věnována pozornost.

### 2.1 Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Tento typ rovnic patří k nejzákladnějším typů diferenciálních rovnic. Obecný tvar rovnice se separovanými proměnnými je

$$y' = f(x) \cdot g(y). \quad (2.1)$$

Nyní je potřeba uvést větu, která nám naznačí řešení rovnice (2.1). Její důkaz je v uveden v literatuře [10].

**Věta 2.1.1 (o řešení diferenciální rovnice se separovanými proměnnými).** *Nechť funkce  $f$  je třídy  $C^0(a,b)$ , funkce  $g$  je třídy  $C^0(c,d)$ ,  $g(y) \neq 0$  pro každé  $y$  z intervalu  $(c,d)$ . Pak je funkce  $y$  řešením počátečního problému*

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in (a,b), \quad y_0 \in (c,d)$$

na intervalu  $I$ , který obsahuje bod  $x_0$ , právě tehdy, když

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(s) ds \quad \text{pro každé } x \text{ z intervalu } I. \quad (2.2)$$

V ekonomii se můžeme setkat se situací, kdy určitá ekonomická veličina roste či klesá v čase. Tento růst či pokles je však omezen shora či zdola určitým limitem či omezením. Jedná se o tzv. *omezený růstový zákon*. DR rovnici popisující tento případ má obecný tvar



$$\frac{dy}{dt} = c(M - y)$$

kde  $y$  je pozorovaná ekonomická veličina závislá na čase  $t$ ,  $C$  je libovolná konstanta a  $M$  limitní hodnota, ke které se pozorovaná veličina přibližuje zdola (v případě horního limitu) či shora (v případě dolního limitu).

Tento případ může nastat v situaci, kdy očekávané roční tržby nově založené společnosti porostou přímo úměrně s rozdílem mezi určitým horním limitem tržeb na daném trhu a aktuální hodnotou tržeb. Pokud se tedy rozdíl bude snižovat, bude společnosti klesat i rychlost narůstání tržeb. Na následujícím modelovém *Příkladu 2.1* z literatury [1] bude ukázán postup řešení DR se separovanými proměnnými včetně grafického znázornění výsledného řešení.

### *Příklad 2.1*

*Zadání: Nově vzniklá společnost očekává roční růst tržeb omezený horním limitem 20 mil. Kč. Počáteční podmínky pro řešení příslušné diferenciální rovnice jsou:*

- *jelikož se jedná o nově založenou společnost, tak tržba v čase  $t = 0$  je nulová, tedy*

$$S(0) = 0$$

- *druhou podmínkou je požadavek na velikost tržby v druhém roce, která musí činit podle plánu 4 mil. Kč, tedy  $S(2) = 4$  mil. Kč.*

*Vedení podniku zajímá*

- a) jakých tržeb dosáhne společnost v desátém roce působení na trhu*
- b) ve kterém roce tržby dosáhnou 15 mil. Kč a tedy kdy se navrátí počáteční investice v této výši.*

*Řešení:*

Pokud si označíme roční tržby  $S$  ( mil. Kč) a čas  $t$ , pak DR popisující růst tržeb bude mít tvar

$$\frac{dS}{dt} = k(20 - S) \tag{2.3}$$

Počáteční podmínky:  $S(0) = 0$ ,  $S(2) = 4$ .

Nejprve budeme hledat obecné řešení DR (2.3) a poté pomocí počátečních podmínek určíme hodnotu konstanty  $k$ .

Provedeme separaci proměnných  $S$  a  $t$ . Poté obě strany rovnice integrujeme a získáme obecné řešení rovnice

$$\int \left( \frac{dS}{20 - S} \right) = \int k dt$$

$$-\ln(20 - S) = kt + C$$

$$\ln(20 - S) = -kt - C$$

$$20 - S = Ae^{-kt} \quad \text{kde } A = e^{-C},$$

$$\mathbf{S = 20 - Ae^{-kt}.}$$

Získali jsme obecné řešení DR (2.3), nyní využijeme počátečních podmínek k určení konstant  $A$  a  $k$ .

$$S(0) = 20 - Ae^0$$

$$S(0) = 20 - A$$

$$\mathbf{A = 20}$$

$$S(2) = 20 - 20e^{-2k} (= 4)$$

$$20e^{-2k} = 16$$

$$e^{-2k} = 0,8$$

$$-2k = \ln 0,8$$

$$\mathbf{k = -(\ln 0,8/2) \approx 0,1116}$$

Partikulární řešení rovnice (2.3) je tedy tvaru

$$\mathbf{S = 20 - 20e^{(t/2)\ln 0,8}.} \quad (2.4)$$

Nyní již zbývá pouze odpověď na otázky týkající se vývoje tržeb v čase

*a) tržby v desátém roce*

$$S(10) = 20 - 20e^{5\ln 0,8} \approx \mathbf{13,45 \text{ mil. Kč}}$$

Prostým dosazením do partikulárního řešení DR (2.4) za čas  $t = 10$  let, jsme předpověděli, že tržby v desátém roce budou přibližně **13,45 mil. Kč**.

*b) v jakém roce společnost dosáhne tržeb 15 mil. Kč*

$$S(t) = 20 - 20e^{(t/2)\ln 0,8}$$

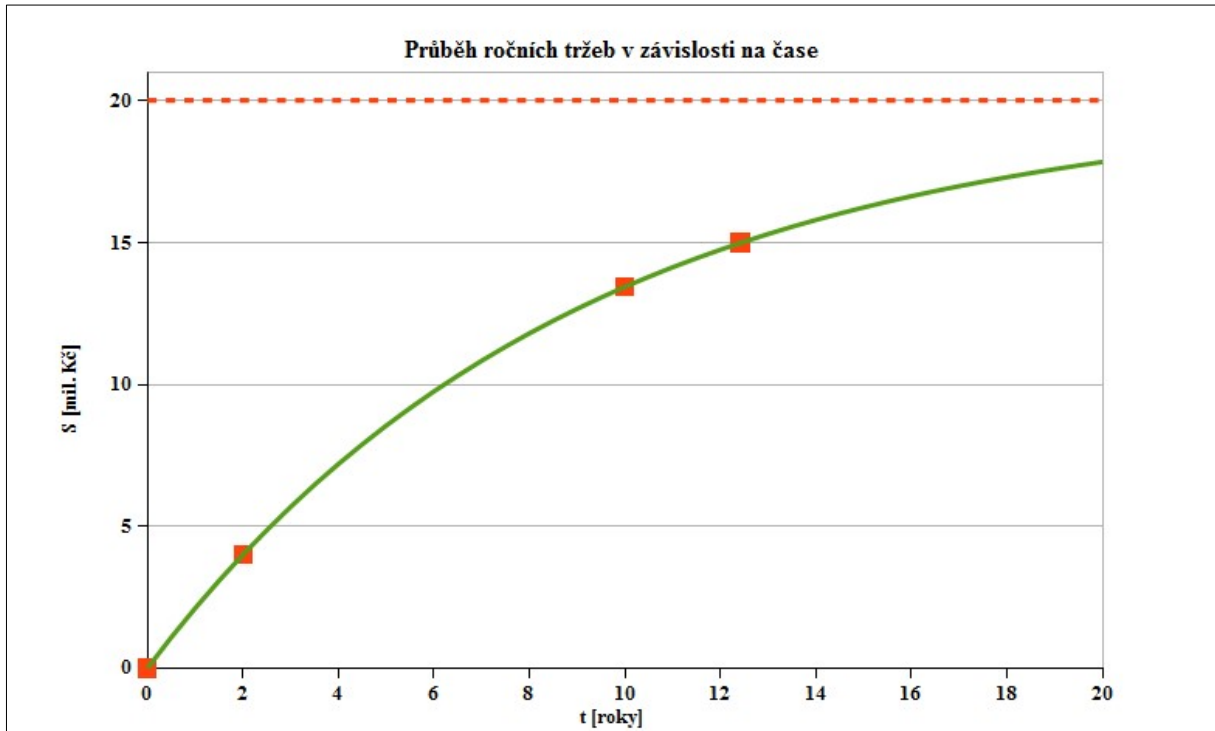
$$15 = 20 - 20e^{(t/2)\ln 0,8}$$

$$e^{(t/2)\ln 0,8} = 0,25$$

$$t = (2 \ln 0,25) / \ln 0,8 \approx 12,43 \text{ let}$$

Prostým dosazením do partikulárního řešení DR (2.4) za tržby  $S = 15 \text{ mil. Kč}$ , jsme předpověděli že tržby ve výši  $15 \text{ mil. Kč}$  společnost dosáhne ve **13. roce** působení na trhu.

Na následujícím obrázku je graficky znázorněn časový vývoj ročních tržeb  $S$ , včetně zvýrazněných bodů odpovídajících počátečním podmínkám i oběma výsledkům řešení.



**Obrázek 4:** Vývoj ročních tržeb  $S$  v závislosti na čase

*Zdroj: vlastní zpracování*

## 2.2 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Důležitou skupinu diferenciálních rovnic 1. řádu tvoří lineární diferenciální rovnice.

Obecným tvarem lineární diferenciální rovnice je

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (2.5)$$

kde  $a(x)$  a  $b(x)$  jsou funkce spojité na intervalu  $J$ . Je-li funkce  $b \equiv 0$ , hovoříme o homogenní rovnici.

Lineární diferenciální rovnice homogenní má obecný tvar

$$y' = a(x) \cdot y \quad (2.6)$$

Jedná se o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými. Pro každou počáteční podmínku  $y(x_0) = y_0$ ,  $x_0 \in J$ ,  $y_0 \in R$ , má rovnice (2.6) právě jedno řešení definované na celém intervalu  $J$ . Obecné řešení lze nalézt jednoduchými úpravami a následnou integrací pravé a levé strany rovnice se separovanými proměnnými

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dt}{t} = \int_{x_0}^x a(t) dt$$

$$y = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right).$$

Obecné řešení pak lze zapsat ve tvaru

$$y = C \exp\left(\int a(t) dt\right),$$

kde  $C$  je konstanta z oboru  $R$ ,  $\int a(t) dt$  značí libovolnou, ale pevně danou primitivní funkci k funkci  $a$ .

LDR prvního řádu mají tvar (2.5). Jak již bylo uvedeno výše, obecně je  $b \neq 0$ . Rovnice s nenulovou pravou stranou se označují jako *nehomogenní*. Z tohoto důvodu většinou nejde tuto rovnici převést jednoduchými úpravami na rovnici se separovanými proměnnými, jako tomu je v případě lineárních diferenciálních rovnic homogenních.

Existují dvě metody, pomocí kterých lze nehomogenní rovnice řešit. Jedná se o *metodu variace konstanty* a *metodu integračního faktoru*. V dalším textu bude pozornost věnována druhé uvedené metodě, o *metodě variace konstanty* se lze více dozvědět v literatuře [4].

Druhá uvedená metoda řešení nehomogenních diferenciálních rovnic 1. řádu se tedy nazývá *metoda integračního faktoru*. Princip spočívá v nalezení tzv. integračního faktoru  $g(x)$

za podmínky, že  $g(x) \neq 0$  na  $J$ . Eleganost této metody spočívá v tom, že po vynásobení celé řešené rovnice integračním faktorem, na levé straně vznikne derivace součinu.

$$y' = a(x)y + b(x) \quad / \cdot g$$

$$y'g - agy = bg \tag{2.7}$$

Musí tedy platit

$$y'g - agy = (yg)',$$

proto je také splněna rovnost pro vztah  $-a(x)g(x) = g'(x)$

a to je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, jejíž řešení má obecný tvar

$$g(x) = e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt},$$

a to je v podstatě hledaný *integrační faktor*, který se následně dosadí do rovnice (2.7).

Po dosazení integračního faktoru vznikne rovnice

$$\left( y(x) e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt} \right)' = b(x) e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt},$$

kteřou lze zintegrovat a vyjádřit  $y(x)$ , což je hledané řešení rovnice (2.5).

$$\int \left( y(x) e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt} \right)' = \int b(x) e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt}$$

$$y(x) e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt} = \int_{x_0}^x b(t) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} dt + C$$

$$y(x) = \left\{ \int_{x_0}^x b(t) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} dt + C \right\} \cdot e^{\int_{x_0}^x a(t) dt}.$$

Praktickou aplikací LDR 1. řádu nehomogenní může být situace, kdy nějaké počáteční množství určité ekonomické veličiny (nejčastěji peněz, zásob apod.) je určitým způsobem doplňováno (připisováním úroků z vkladu, zhodnocením aktiv na trhu), ale zároveň dochází k pravidelnému úbytku v čase (pravidelné výběry, spotřeba atd.).

DR popisující tento problém lze vyjádřit v následujícím tvaru

$$\frac{dA}{dt} = rA - m, \quad (2.8)$$

kde diferenciál  $dA/dt$  představuje celkovou změnu veličiny  $A$  (množství peněz na účtě),  $rA$  reprezentuje rychlost s jakou dochází k „doplňování“ veličiny  $A$  například připisováním úroků z vkladu a poslední člen rovnice  $m$  je rychlost úbytku veličiny  $A$  např. výběr z účtu.

Následující *Příklad 2.2* z literatury [1] ukáže využití *metody integračního faktoru* při řešení praktické situace na bankovním účtu.

### *Příklad 2.2*

*Zadání: Počáteční vklad na bankovní účet je 10 mil Kč. Očekává se, že vklad bude kontinuálně vydělávat 2% z vložené částky. Pro jednoduchost se předpokládá, že každý rok bude z účtu vybrán 1 mil. Kč, což je v podstatě rychlost úbytku  $m$ , do doby než bude celý účet vybrán.*

*Vlastníka účtu bude zajímat*

*a) jaká funkce vyjádří závislost množství peněz na účtu v čase*

*b) kdy bude účet zcela vybrán (zůstatek na účtu bude 0)*

*Řešení:*

Obecný tvar LDR popisující stav peněz na účtu je podle (2.8)

$$\frac{dA}{dt} - 0,02 A = -1 \quad (2.9)$$

Integrační faktor pro tuto rovnici je

$$g(t) = e^{\int -0,02 dt} = e^{-0,02t},$$

nyní se vynásobí obě strany rovnice integračním faktorem  $g(t)$ , na levé straně rovnice získáme derivaci součinu, ke které vyjádříme původní funkci a poté stačí již provést integraci levé strany a získáme obecné řešení rovnice (2.9).

$$\begin{aligned} e^{-0,02t} \frac{dA}{dt} - 0,02 e^{-0,02t} A &= -1 e^{-0,02t} \\ \left( e^{-0,02t} A \right)' &= -1 e^{-0,02t} \\ e^{-0,02t} A &= \int -1 e^{-0,02t} dt \end{aligned}$$

$$A = 50 + Ce^{0,02t} \quad (2.10)$$

Získali jsme obecné řešení LDR (2.9), které je ve tvaru (2.10). Nyní využijeme počáteční podmínky  $A(0) = 10 \text{ mil Kč}$  k vyjádření konstanty  $C$  a tedy nalezení partikulárního řešení rovnice (2.9). A to bude v podstatě odpověď na první otázku, jaká je závislost množství peněz na účtě v závislosti na čase  $t$ .

$$10 = 50 + Ce^0$$

$$C = -40$$

$$A(t) = 50 - 40e^{0,02t} \quad (2.11)$$

Rovnice (2.11) představuje *partikulární řešení* rovnice (2.9) a vyjadřuje rychlost úbytku peněz na účtu v závislosti na čase  $t$ .

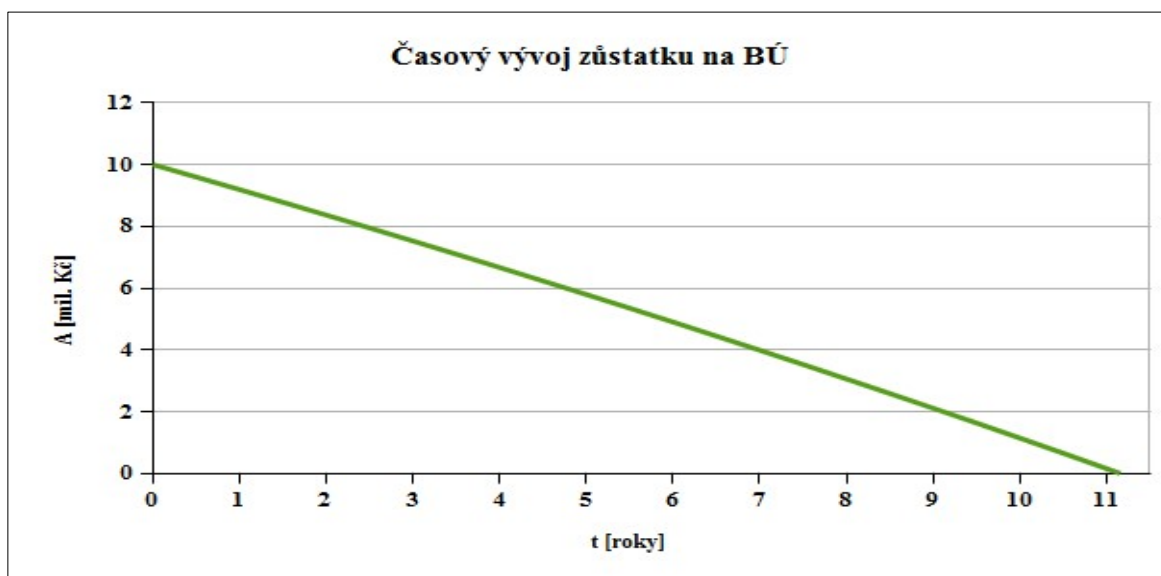
*b) kdy bude účet zcela vyčerpán*

$$A(t) = 0$$

$$0 = 50 - 40e^{0,02t}$$

$$t = (\ln 1,25)/0,02 \approx 11,157 \text{ let}$$

Dosažením podmínky  $A(t) = 0$  do partikulárního řešení (2.11) jsme zjistili, že účet bude zcela vyčerpán za **11,157** roků.



**Obrázek 5:** Vývoj zůstatku na BÚ  $A$  v závislosti na čase

*Zdroj: vlastní zpracování*

## 2.3 Některé další typy diferenciálních rovnic 1. řádu

V praxi se lze setkat i s následujícími typy rovnic 1. řádu. Prvním typem rovnic jsou rovnice homogenní, druhou skupinu tvoří rovnice exaktní, dalším typem je Bernoulliho rovnice a lehce bude v následující podkapitole nastíněna problematika rovnic autonomní.

Bližší pojednání o zbývajících typech rovnic lze nalézt například v knize [21].

### 2.3.1 Autonomní rovnice

Autonomní rovnice je speciální typ lineární diferenciální rovnice (následující poznatky se týkají i ostatních lineárních DR), která má obecný tvar

$$y' + ay = b, \quad (2.12)$$

kde  $a$  a  $b$  jsou konstanty. Při hledání obecného řešení tohoto typu DR lze vyjít ze skutečnosti, že obecné řešení autonomní DR je součtem obecného řešení homogenní rovnice (2.12)

a speciálního řešení nehomogenní diferenciální rovnice (2.12) [8].

Obecné řešení DR lze označit  $y_H$  (při  $b = 0$ ) a speciální řešení nehomogenní DR pak  $y_P$ . Poté tedy platí  $y = y_H + y_P$ .

Při řešení autonomní DR se nejprve řeší příslušná homogenní lineární DR ve tvaru  $y' + ay = 0$ . Pokud je  $a = 0$  je řešení velice snadné a jedná se o přímou integraci  $y(t) = C$ , kde  $C$  je libovolná konstanta. Je-li  $a \neq 0$ , odečte se  $a \cdot y$  od obou stran rovnice a vzniklá rovnice se vydělí  $y$ . Získá se

$$y'/y = -a,$$

kde  $y = y(x)$  a integrací na pravé straně vznikne  $-at + C_1$ , kde  $C_1$  je konstanta. Na levé straně se integrací získá  $\ln y + C_2$ , kde  $C_2$  je opět konstanta. Vznikne tedy rovnice ve tvaru

$$\ln y + C_2 = -a \cdot t + C_1,$$

kterou lze upravit do tvaru

$$y = e^{-at+C_1+C_2} = e^{-at} e^{C_1+C_2} = C e^{-at},$$

kde  $C = e^{C_1+C_2}$  je libovolná konstanta.

Obecné řešení homogenní lineární autonomní DR je tedy ve tvaru

$$y_H(t) = C e^{-at}. \quad (2.13)$$



Nyní již zbývá pouze nalézt partikulární řešení nehomogenní lineární DR ve tvaru  $y_p = b/a$ . Poté obecné řešení autonomní lineární DR je tedy ve tvaru

$$y(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a}.$$

#### *Příklad 2.4*

Nejlépe lze demonstrovat postup řešení lineární autonomní DR na vhodném příkladu z praxe. V následujícím příkladu převzatém a upraveném podle literatury [13] bude využit tento typ rovnice k popisu konstantního růstu spotřeby elektrické energie ve výrobním podniku v souvislosti s rostoucí potřebou počtu nových, na spotřebu elektrické energie náročných, strojů.

Jako  $y$  lze označit celkovou spotřebu elektrické energie ve výrobním podniku. Předpokládá se roční růst spotřeby této energie konstantním tempem 3% za rok. Úkolem je tedy nalézt vztah popisující stupeň spotřeby elektrické energie v čase  $t$ .

Jelikož procentuální růst spotřeby energie je konstantní a roven 3%, lze tedy vyslovit tvrzení, že spotřeba energie roste konstantně o 3 % a matematicky se toto tvrzení popíše vztahem

$$\frac{y'}{y} = 0,03.$$

Jedná se tedy o homogenní autonomní DR, neboť v tomto případě je  $b = 0$ . Obecné řešení tohoto typu DR ukazuje vztah (2.13). Pak tedy řešení této konkrétní rovnice, vyjadřující stupeň spotřeby el. energie v čase  $t$ , je ve tvaru

$$y(t) = Ce^{0,03t}.$$

## **2.4 Solowův model -ekonomická aplikace ODR 1.řádu**

*Solowův-Swanův model ekonomického růstu* je jedním z nejznámějších neoklasických modelů, který slouží k vysvětlení dlouhodobých trendů ekonomického růstu v průmyslově rozvinutých národních ekonomikách. *Solowův-Swanův model* je dílem nositele Nobelovy ceny za ekonomii, amerického ekonoma *Roberta Solowa* a australského ekonoma *Trevora Swana*. Podle slavnějšího autora je však tento model zkráceně nazýván **Solowův model**.

Základem tohoto modelu je tzv. *neoklasická produkční funkce*, která slouží k řešení řady ekonomických otázek. Umožňuje predikovat vývoj národního produktu v dané zemi, vývoj zaměstnanosti a také jaká kapitálová zásoba bude v určitém čase v dané zemi k dispozici [6]. Tento model je považován za skutečný základ moderní teorie hospodářského růstu, a i když byl autory vyvinut v roce 1956, tak dodnes představuje pro většinu ekonomů základní rámec pro analýzu hospodářského růstu.

Model je zde zdůrazněn z důvodu využití ODR 1. řádu, pomocí kterých lze popsat vývoj národního produktu, zaměstnanosti i kapitálu v závislosti na čase.

### 2.4.1 Neoklasická teorie ekonomického růstu

Nejprve budeme věnovat pozornost pojmům *ekonomický růst*, *neoklasický model ekonomického růstu* a *neoklasická produkční funkce*.

#### Ekonomický růst

Ekonomický růst lze chápat jako zvýšení celkového produktu dané země během určitého časového období, nejčastěji vyjádřeno jako roční tempo růstu *reálného hrubého domácího produktu (HDP)* dané země.

**Hrubý národní produkt** (*Gross national product, GNP*) představuje veškerou finální produkci vyjádřenou v peněžních jednotkách (celkový objem výrobků a služeb), vytvořenou za určité období (zpravidla jeden rok) národními výrobními faktory dané země doma i v zahraničí. Nominální HDP je vyjádřen v běžných (skutečných) cenách daného období, oproti tomu reálný HDP je uváděn ve stálých (srovnatelných) cenách určitého výchozího roku. Ukazatel je tedy očištěný od inflace a zvýšení reálného HDP naznačuje skutečný nárůst fyzického objemu produktu během daného období. [12]

Existují 3 metody měření HDP : metoda výrobní, metoda důchodová a metoda výdajová. Více se lze o problematice HDP i o metodách jeho měření dozvědět v knize [12].

V dlouhém období lze životní standard obyvatel zvýšit pouze růstem potenciálního produktu. Podmínkou však je, že potenciální produkt poroste rychleji než obyvatelstvo.

Mezi určující faktory ekonomického růstu lze pak zařadit :

- růst pracovní síly
- růst kapitálové zásoby
- technologický pokrok.

*Růst pracovní síly* se odvíjí od přirozené míry růstu počtu obyvatel, velikosti migrace a v neposlední řadě od podílu ekonomicky aktivních obyvatel na celkovém počtu obyvatel.

*Růst kapitálové zásoby* přispívá k ekonomickému růstu především prostřednictvím investiční činnosti. Investice jsou složkou agregované poptávky a zároveň představují dodatečnou zásobu výrobních zdrojů.

*Technický pokrok* umožňuje zdokonalit efektivitu používaných technologií a tím přispět k růstu produktu při daném vstupu výrobních faktorů [5].

### **Neoklasický model ekonomického růstu**

*Neoklasický model ekonomického růstu* je model sloužící k popisu a objasnění dlouhodobých trendů vývoje ekonomického růstu v příslušných národních ekonomikách. Zdůrazňuje význam kapitálu a technologických inovací pro růst reálného HDP. Model vychází z tzv. *Cobb-Douglasovy produkční funkce* vyjadřující závislost růstu národního produktu na růstu práce  $L$  a na růstu kapitálu  $K$ . Tato rovnice bývá označována jako *neoklasická produkční funkce* [5]. Byla odvozena v roce 1928 a má tvar

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

kde  $Q$  objem celkové produkce (peněžní hodnota všech statků vytvořená za dané období),  $A$  je úrovněová konstanta,  $\alpha$  a  $\beta$  jsou elasticity výstupu práce a kapitálu, tyto parametry určené dostupnými technologiemi. Tyto koeficienty leží v intervalu  $(0;1)$  a jsou většinou odhadovány na základě statistických dat z minulosti.

V současné době ji Česká národní banka používá jako jednu z metod při odhadování výše potenciálního produktu. Výhodou této metody výpočtu je možnost analyzovat příspěvek jednotlivých faktorů (produktivity, práce a kapitálu) k růstu potenciálního produktu.

### **2.4.2 Solowův model a jeho předpoklady**

Solowův model zkoumá vývoj HDP, kapitálu a počtu pracujících obyvatel v čase. Je zřejmé, že ekonomika má v každém časovém okamžiku k dispozici určitý počet pracujících obyvatel  $L$ , které roste stabilním tempem a také určitou kapitálovou zásobu  $K$ . Pomocí těchto zdrojů, pak ekonomika vytváří určitý reálný důchod  $Y$ . Dále se předpokládá:

- uzavřenost ekonomiky- neexistuje export ani import
- neexistence státních výdajů a daní.

Základním předpokladem Solowova modelu je neoklasická produkční funkce

$$Y(t) = F[K(t), L(t), A(t)],$$

kde

- $Y$  je velikost produkce
- $K(t)$  jsou fyzické vstupy, tedy stroje, budovy, kancelářské potřeby, které se souhrnně označují jako kapitál
- $L(t)$  je pracovní síla, tedy počet pracovníků, jejich pracovní doba, vzdělání, schopnosti a dovednosti
- $A(t)$  představuje úroveň znalostí a technologií v dané ekonomice, v průběhu času dochází k postupnému zvyšování úrovně znalostí i technologií zvláště v zemích na sever od rovníku. Technologie je na rozdíl od  $K(t)$  a  $L(t)$  nerivalitní, neboť výrobci mohou ve stejný okamžik využívat stejnou technologii a i znalosti [7].

V praktické části této práce bude  $Y$  představovat **Hrubý domácí produkt**, který podle ČSÚ představuje „souhrn hodnot přidaných zpracováním ve všech odvětvích činností považovaných v systému národního účetnictví za produktivní (tj. včetně služeb tržních i netržních). Jde o propočet v kupních cenách, za které jsou realizovány tržní výkony (tzn. včetně daní z produktů a bez dotací na produkty). U netržních služeb je přidaná hodnota vyjádřena jako souhrn náhrad zaměstnancům a spotřeby fixního kapitálu“.

**Tvorba hrubého fixního kapitálu  $K$**  je podle ČSÚ definována „hodnotou pořízení hmotného i nehmotného investičního majetku koupeného, bezúplatně převzatého nebo vyrobeného ve vlastní režii, sníženou o hodnotu jeho prodeje a bezúplatného předání. Patří sem i pořízení formou finančního leasingu. Cílem pořízení je vždy využívat tento investiční majetek při produktivní činnosti, včetně bydlení v obydlí jeho vlastníka; nespádají sem předměty dlouhodobé spotřeby pořízené domácnostmi pro uspokojování konečné spotřeby ani čisté pořízení cenností“.

**Pracovní síla  $L$**  představuje podle definice ČSÚ „všechny osoby, které uvedly na Sčítacím listu osob, že patří mezi zaměstnané osoby, zaměstnavatele, samostatně činné, pracující důchodce, pracující studenty a učně, ženy na mateřské dovolené, osoby v základní, náhradní nebo civilní vojenské službě, ve vazbě a výkonu trestu nebo osoby nezaměstnané“.

Mezi předpoklady nutné ke konstrukci *Solowova modelu* lze zahrnout

- kladné a klesající mezní výnosy z faktorů- znamená, že produkce v čase roste, ale tempo tohoto růstu se zpomaluje. Je totiž stále obtížnější s rostoucím objemem zvyšovat výstup. Matematicky je tato skutečnost vyjádřena kladnou první parciální derivací produkční funkce  $F$  podle  $K$  i  $L$  znamenající *rostoucí funkci* a zápornou druhou parciální derivací téže funkce podle  $K$  i  $L$  vyjadřující *snižování přírůstků funkce v čase*.

$$\partial F/\partial K > 0, \quad \partial^2 F/\partial K^2 < 0$$

$$\partial F/\partial L > 0, \quad \partial^2 F/\partial L^2 < 0$$

- konstantní výnosy z rozsahu- produkční funkce je homogenní 1. stupně. Kolikrát se zvýší vstupy, tolikrát se zvýší i celkový výstup. Matematicky vyjádřeno

$$F(\lambda K, \lambda AL) = \lambda F(K, AL) \text{ pro } \lambda \geq 0$$

Model předpokládá neexistenci omezení růstu přírodními zdroji. Výstup tedy závisí pouze na pracovní síle, kapitálu a znalostech.

- neutrální technologický pokrok- technologický pokrok tzv. „rozšiřuje práci“, to si lze představit, tak že technologické inovace umocňují pracovní sílu  $L$ , a tím kladně působí na celkový výstup. *Produkční funkce* poté bude mít tvar

$$Y(t) = F [K(t), L(t)A(t)],$$

$A$  se také označuje jako „efektivnost práce“ a součin  $A$  a  $L$  jako „efektivní práce“

- Inadovy podmínky- popisují limitní chování produkční funkce, zaručují vnitřní stabilitu modelu. Tyto podmínky říkají, že čím více se množství kapitálu či práce blíží k nule, tím větší je mezní produkt a naopak. *Inadovy podmínky* lze vyjádřit jako

$$\lim_{K \rightarrow 0} (\partial F/\partial K) = \lim_{K \rightarrow 0} (\partial F/\partial L) = +\infty$$

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} (\partial F/\partial K) = \lim_{K \rightarrow +\infty} (\partial F/\partial L) = 0 \quad [7].$$

Posledním a velice důležitým předpokladem je konstantní tempo růstu pracovní síly  $n$  a konstantní tempo růstu technického pokroku  $g$ . Tuto skutečnost vyjadřují následující vztahy

$$\frac{L'}{L} = n = konst. \quad (2.14)$$

$$\frac{A'}{A} = g = konst. \quad (2.15)$$

Matematicky se jedná o autonomní *lineární DR s homogenní pravou stranou*; postup řešení tohoto typu rovnic je popsán v kapitole 2.3.4. Pro lepší názornost zde bude ve zkratce demonstrován postup řešení rovnice (2.14) a výsledkem bude vztah (2.16) popisující vývoj pracovní síly  $L$  v čase.

$$\frac{L'}{L} = n$$

$$\frac{dL}{dt} = nL$$

V následujícím kroku dojde k formálnímu oddělení obou diferenciálů a k nim se přiřadí příslušná proměnná funkce a získá se vztah

$$\frac{dL}{L} = n dt$$

u které stačí provést integraci a za podmínky, že úroveň pracovní síly v čase 0 je označen  $L_0$ , se získá vztah pro vývoj pracovní síly v čase

$$L(t) = L_0 e^{nt} \quad (2.16)$$

Stejný postup aplikovaný na (2.15) s počáteční podmínkou  $A(0) = A_0$ , poskytne následující vztah popisující časový vývoj *míry technického pokroku*  $A$

$$A(t) = A_0 e^{(gt)} \quad (2.17)$$

Pro časový růst *celkového produktu*  $Y$  pak platí vztah

$$Y(t) = Y_0 e^{((n+g)t)} \quad (2.18)$$

a pro růst kapitálu vztah (2.19)

$$K(t) = K_0 e^{((n+g)t)} \quad (2.19)$$

Výše uvedené vztahy (2.16) až (2.19) tvoří podstatu *Solowova modelu* a mají praktický význam pro prognózu vývoje HDP, pracovní síly, kapitálu a technologické úrovně v čase [6]. Tyto vztahy budou použity i v praktické části této práce, kdy z historických dat budou určeny konstanty  $n$  a  $g$  a následně budou takto získané konstanty použity k ověření modelu zpětným výpočtem vstupních dat. Následně bude provedena prognóza vývoje HDP a ostatních parametrů v budoucnosti.

## 2.5 Durace dluhopisů - ekonomická aplikace ODR 1.řádu

Jednou z dalších ekonomických aplikací ODR 1. řádu , která bude představena i v této práci, je tzv. *Fisher-Weilova durace*. Duraci lze obecně definovat jako míru citlivosti ceny dluhopisu na změnu úrokové míry. Jedná se tedy o velmi cenný nástroj pro sestavení imunizovaného portfolia různých dluhopisů, které chceme využít pro získání dostatečného kapitálu a zároveň se chceme zajistit proti případným změnám úrokových měr. Nejprve však zde budou uvedeny základní pojmy týkající se dluhopisů, jejich členění a oceňování. Poté bude popsán princip *spojitého úročení*, které se v této oblasti používá zejména pro určení ceny dluhopisu u *Fisher-Weilova durace*.

### 2.5.1 Základní pojmy

Podle Jakubka je dluhopis „*zastupitelný, dlužný cenný papír, s nímž je spojeno právo na splacení dlužné částky a povinnost eminenta toto právo uspokojit. Dluhopis má omezenou životnost, resp. přesně stanovenou dobu splatnosti až na konzolu, což je dluhopis s nekonečnou dobou splatnosti , neboť tato doba splatnosti není určena*“.[9]

Podle stejného autora je eminentem dluhopisu „*dlužník, který požaduje zapůjčení finančních prostředků většinou na delší dobu prostřednictvím dluhopisu*“ a věřitelem „*osoba, která finanční prostředky eminentovi poskytuje a stává se tak držitelem dluhopisu*“.

Příkladem věřitele může být banka, různé instituce jako například penzijní fondy, pojišťovny, ale i soukromé fyzické osoby. Dluhopis lze zakoupit přímo od eminenta na tzv. primárním trhu nebo již od jiného věřitele pak se mluví o obchodování na sekundárním trhu.[9]

*Cena dluhopisu (present value)* - označení pro skutečnou cenu, za kterou je dluhopis obchodován na kapitálovém trhu. Její hodnota se ustanovuje na základě nabídky a poptávky.

*Nominální hodnota (face value)* - v penězích vyjádřená hodnota na daného dluhopisu. Vyjadřuje výši dluhu a je vyplacena oprávněnému majiteli na konci doby splatnosti.

*Kuponová platba (coupon payment)* - jedná se o platbu v penězích odpovídající sjednané úrokové míře (kuponové sazbě). Je vyplácena majiteli dluhopisu v pravidelných intervalech až do konce životnosti dluhopisu.

*Kuponová sazba (coupon rate)* - v procentech vyjádřená kuponová platba z nominální hodnoty dluhopisu.

*Doba splatnosti (maturity)* - den, kdy je majiteli dluhopisu vyplacena jeho nominální hodnota.

*Kurz dluhopisu* – v procentech vyjádřená cena z nominální hodnoty dluhopisu.[19]

## 2.5.2 Základní členění dluhopisů

Dluhopisy lze členit podle mnoha kritérií. Nejčastějšími kritérii podle nichž lze členit dluhopisy jsou úroková sazba, eminent, doba splatnosti a forma dluhopisu.

### a) Dluhopisy podle úrokové sazby

*Dluhopis s pevnou úrokovou sazbou* - má pevně stanovenou výši úrokové sazby po celou dobu splatnosti. Úroková sazba i výnos dluhopisu tedy nejsou závislé na vývoji tržních úrokových sazeb.

*Dluhopis s pohyblivou úrokovou sazbou* – má úrokovou sazbu vázanou na předem určenou tržní referenční úrokovou sazbu. Úroková sazba se odvíjí od diskontní 2T repo sazby, kterou stanovuje ČNB. (například úroková sazba dluhopisu je stanovena na hodnotu o 3% vyšší oproti aktuální diskontní sazbě). U mezinárodně obchodovatelných dluhopisů se pak používá jako diskontní sazba například úroková sazba mezibankovních trhů LIBOR (London Interbank Offered Rate).

*Dluhopis s nulovou úrokovou mírou (zerobond)* – nemá úrokovou sazbu, výnos je dán rozdílem jmenovité hodnoty dluhopisu a jeho nižší emisní ceny.

*Dluhopis se speciálním kuponem* – úroky jsou stanoveny z hodnoty kapitálu eminenta ke dni splatnosti. Východiskem je tedy cenový vývoj finančních ukazatelů, tedy akcií, podílových fondů apod.

*Hybridní dluhopis* – má dvě úrokové míry a to pohyblivou a pevnou.

### b) Dluhopisy podle eminenta

*Státní dluhopisy* - jedná se o dluhopisy emitované vládou. Jsou charakteristické nízkou rizikovostí, ale i nízkým výnosem. Nejčastěji emisi řídí ministerstvo financí či centrální banka. Důvodem k emisi je pokrytí schodku státního rozpočtu, financování nákladných investičních projektů, budování rozsáhlých infrastrukturních celků apod. Do těchto dluhopisů nejčastěji investují banky, pojišťovny a penzijní fondy.

Do skupiny státních dluhopisů lze zařadit i *pokladniční poukázky*, které vydává centrální banka. Jsou typické kratší dobou splatnosti a vyšší nominální hodnotou.

*Komunální dluhopisy* – vydávají obce, města nebo banka, která z výnosu poskytuje obci úvěr. Stejně jako státní dluhopisy i komunální jsou málo rizikové s menším výnosem.



*Podnikové dluhopisy* – jedná se již o více rizikové dluhopisy, než tomu bylo v případě státních a komunálních dluhopisů. Za vyšší riziko však investoři požadují i vyšší výnos. Jak z názvu vyplývá tyto dluhopisy emitují soukromé firmy či komerční banky. Mezi podnikové dluhopisy lze zařadit i dluhopisy *zaměstnanecké*, které firma emituje pro své zaměstnance.

*Zahraniční dluhopisy* – jsou vydávány v dané zemi a v její měně, ale eminent je ze zahraničí.

c) Dluhopisy podle doby splatnosti

*Krátkodobé* – s dobou splatnosti do 1 roku.

*Střednědobé* – s dobou splatnosti od 1 do 5 let.

*Dlouhodobé* – se splatností větší než 5 let.

*Věčné renty (konzoly)* – nedochází u nich ke splacení jmenovité hodnoty, jsou vypláceny pouze úrokové výnosy.

d) Dluhopisy dle formy

*nematerializované (zaknihované)* – ve formě zápisu v registru cenných papírů, kde je uveden jejich majitel.

*listinné cenné papíry* – fyzicky vydané a ve vlastnictví investora v podobě kupónového archu.[19]

### **2.5.3 Způsoby určení ceny dluhopisů**

Způsoby určení ceny dluhopisu se značně liší a závisí především na tom, zdali se jedná o kuponový dluhopis či bezkuponový. U kuponového dluhopisu hraje roli i to zdali se jedná o cenu kuponového dluhopisu k datu výplaty kuponové platby či stanovujeme cenu mezi dvěma výplatami kuponové platby. Nejprve se budeme věnovat situaci, kdy chceme určit cenu dluhopisu k datu výplaty kuponové platby.

Při určení ceny *kuponového dluhopisu ke dni výplaty kuponové platby*, postupujeme následujícím způsobem. Cenu určíme jako součet jmenovité hodnoty tohoto dluhopisu a všech jeho budoucích kuponových plateb. Všechny budoucí kuponové platby diskontujeme k datu ocenění dluhopisu. Pro roční výplatu kuponových plateb, poté obdržíme vztah pro určení ceny dluhopisu  $PV$

$$PV = \sum_{i=1}^n \left( \frac{C}{(1+r_i)^i} + \frac{NH}{(1+r_n)^n} \right), \quad (2.20)$$

kde  $r_i$ ,  $r_n$  jsou úrokové míry pro diskontování jednotlivých finančních toků,  $n$  počet ročních kuponových období,  $C$  je kuponová platba a  $NH$  je nominální hodnota dluhopisu.

Cenu kuponového dluhopisu lze vyjádřit i pomocí *spojitého úročení*, které je v podstatě také ekonomickou aplikací ODR 1. řádu. Spojitého úročení lze využít za předpokladu, že úroková míra  $R$  je spojitá mezi obdobími  $t_0$  a  $t_n$ . Tedy v období od současné chvíle, kdy oceňujeme dluhopis až do vypršení života dluhopisu.

$$PV = \sum_{i=1}^n \left( C \cdot e^{-R(t_i - t_0)} + NH \cdot e^{-R(t_n - t_0)} \right). \quad (2.21)$$

U tohoto typu dluhopisu je tržní hodnota rovna nominální v případě, když jsou úrokové míry rovny kuponové sazbě. V případě větší kuponové sazby v porovnání s úrokovou mírou je poté tržní hodnota dluhopisu větší než jeho nominální hodnota. Platí i obrácený princip, kdy je tržní cena dluhopisu nižší než jeho jmenovitá hodnota, v případě větší úrokové míry než je kuponová sazba.

U kuponového dluhopisu může nastat situace, kdy potřebujeme určit jeho cenu mezi *dvěma výplatami kuponové sazby*. Logika věci nám říká, že cena dluhopisu v tomto případě bude tvořena tržní hodnotou dluhopisu v době poslední výplaty kuponové platby a určité poměrné části kuponové platby z období od poslední kuponové platby do okamžiku oceňování dluhopisu. Zde se rozlišuje, zdali se oceňuje dluhopis před či po vydání tzv. *ex-kuponu*. Při zakoupení dluhopisu před vydáním ex-kuponu, se tržní cena navyšuje o tzv. *aliquotní úrokový výnos AUV*, neboť s nákupem dluhopisu v této době je spojeno i právo nového majitele na výplatu celé příští kuponové platby. V případě pořízení dluhopisu až po vydání ex-kuponu se tržní cena snižuje o *AUV*, jelikož nový vlastník nemá právo na příští kuponovou platbu, která přísluší v tomto případě předchozímu majiteli.

Cenu určíme následujícím postupem: pomocí vztahu (2.20) určíme cenu dluhopisu k datu poslední kuponové výplaty a k datu nejbližší budoucí kuponové výplaty. Poté určíme cenu v době obchodu  $PV'$  pomocí lineární interpolace z cen dluhopisu v době poslední a budoucí kuponové platby. Nakonec se určí aliquotní úrokový výnos za určené výnosové období *AUV*.

Cena kuponového dluhopisu před datem ex- kuponu je pak dána vztahem

$$PV_{\text{před ex-kuponem}} = PV' + AUV.$$

V případě kuponového dluhopisu po datu ex-kuponu se cena určí

$$PV_{po\ ex-kuponu} = PV' - AUV.$$

U *diskontovaného (bez kuponového) dluhopisu* je určení ceny snadnější. Cena je v tomto případě rovna nominální hodnotě dluhopisu diskontované k datu obchodu. Tuto skutečnost lze vyjádřit vztahem

$$PV = \frac{NH}{(1+r_n)^n},$$

kde  $n$  je životnost dluhopisu v letech a  $r$  je diskontní úroková míra.

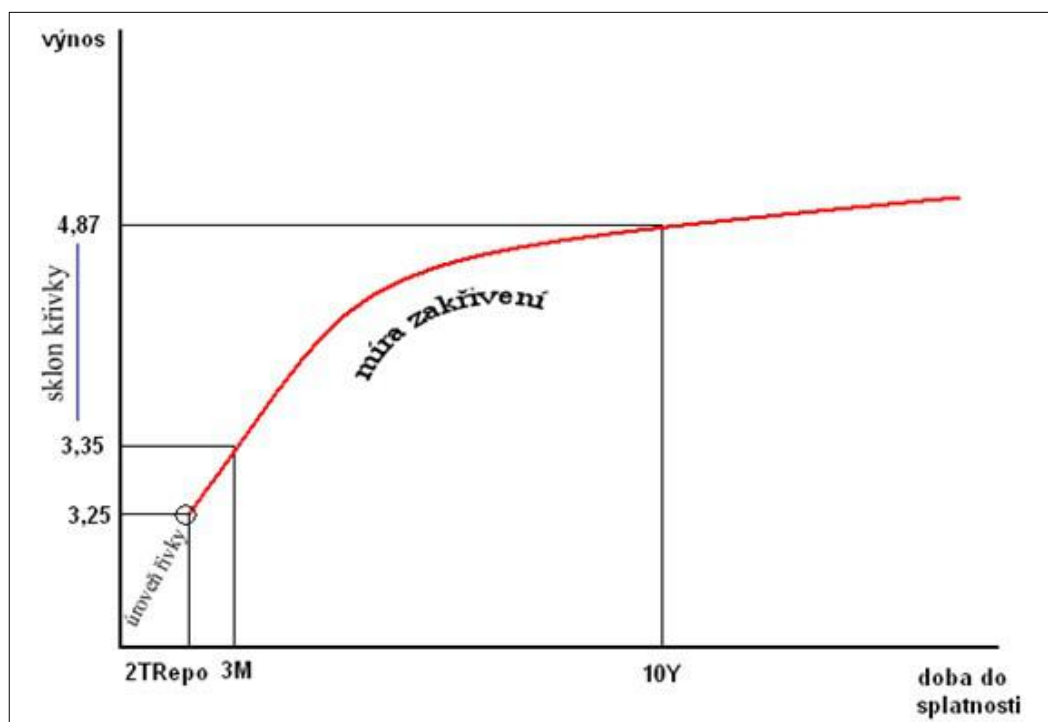
Stejně jako u kuponových dluhopisů, tak i u diskontovaného dluhopisu, lze uvažovat spojitou úrokovou míru  $R$  po celou dobu splatnosti tedy životnosti dluhopisu. Poté je cena bezkuponového dluhopisu určena vztahem[19]

$$PV = NH \cdot e^{-R(t-t_0)}. [19]$$

#### 2.5.4 Výnosová křivka a výnosnost dluhopisů

*Výnosová křivka dluhopisu* vyjadřuje vztah mezi výnosnostmi dluhopisů stejných vlastností a dobou zbývající do jejich splatnosti. Podmínku stejných vlastností nejlépe splňují státní dluhopisy lišící se pouze dobou splatnosti, z těchto se také nejčastěji výnosová křivka konstruuje. Dluhopisy s vyšší rizikovostí pak mají výnosovou křivku umístěnou nad výnosovou křivkou méně rizikových dluhopisů. Neboť investoři požadují za vyšší riziko i vyšší výnos. Nejnižší bude tedy umístěna výnosová křivka státních dluhopisů, které jsou téměř bezrizikové a nad ní postupně výnosové křivky ostatních dluhopisů podle rizikovosti.[19]

Na obr. 6 lze vidět tvar výnosové křivky, charakteristický 3 parametry. První parametr se označuje jako tzv. *úroveň křivky*. Jedná se o bod, kde začíná celá křivka, hodnota tohoto bodu je nejčastěji určena 2T repo sazbou, kterou stanovuje centrální banka. Další parametr se označuje jako tzv. *sklon křivky*, a jeho hodnota je dána rozdílem mezi úrokovými sazbami dlouhodobých a krátkodobých dluhopisů. Sklon křivky závisí na mnoha parametrech, jako příklad lze uvést očekávání na trhu investic, rovnováha na trhu s cennými papíry apod. Posledním parametrem výnosové křivky je její *zakřivení*. Výnosová křivka totiž není lineární, ale zakřivená z důvodu nelineární závislosti mezi výnosem do splatnosti a dobou do splatnosti. Na obr. 6 jsou znázorněny dva dluhopisy a to tříměsíční 3M s výnosem 3,35% a desetiletý 10Y s výnosem 4,87%.



**Obrázek 6:** Výnosová křivka dluhopisu

Zdroj:[19]

Podle literatury [20] rozlišujeme několik základních tvarů výnosové křivky.

- *Rostoucí výnosová křivka* je nejčastěji se objevující tvar výnosové křivky. Dluhopisy s kratší dobou splatnosti mají nižší výnos než dluhopisy s delší dobou splatnosti.
- *Klesající výnosová křivka* je symbolická pro období ekonomické recese. Krátkodobé dluhopisy mají v tomto případě vyšší výnosnost než ty dlouhodobé.
- *Zhoupanutá výnosová křivka* indikuje neočekávaný vývoj na trhu. Střednědobé dluhopisy mají vyšší výnosnost než krátkodobé a dlouhodobé.
- *Plochá výnosová křivka* tvoří přechod mezi rostoucí a klesající strukturou úrokových měr. Dluhopisy s různou dobou splatnosti mají přibližně stejný výnos.

Teorii vysvětlující tvar výnosové křivky je několik, je však nad rámec této práce je zde uvádět a vysvětlovat. Pro bližší seznámení s těmito teoriemi lze využít literaturu například [20].

### 2.5.1 Fisher-Weilova durace

*Durace* je průměrná doba, za kterou je možno získat příjmy z dluhopisů. Jak již bylo uvedeno v úvodu této kapitoly, durace se používá pro učení citlivosti tržní ceny dluhopisu na změnu tržních úrokových sazeb. To z ní dělá významný nástroj pro sestavování imunizovaného dluhopisového portfolia.

S prodlužováním doby splatnosti se durace zvyšuje. Tedy dluhopisy s největší průměrnou dobou příjmu mají i největší citlivost na změnu tržní úrokové sazby. Z toho vyplývá, že čím vyšší hodnota durace, tím větší vliv mají změny úrokové sazby na tržní cenu dluhopisu.

Existuje několik typů durací, které se liší principem výpočtu. V další práci bude používána tzv. Fisher-Weilova durace, která využívá cenu dluhopisu definovanou pomocí spojitého úročení. Cena dluhopisu je zde určena pomocí vztahu (2.22)

$$PV = \sum_{i=1}^n C \cdot e^{-r_i t_i} + NH \cdot e^{-r_n t_n}, \quad (2.22)$$

kde  $r_i$  je spojitá úroková míra a  $C$  jsou kuponové platby vypláceny v jednotlivých časových periodách, nejčastěji se jedná o roční výplatu kuponu.[19]

Zde je na místě vysvětlit princip *spojitého úročení*, ze kterého v podstatě vztah (2.22) vyplývá, neboť tento vztah je v podstatě jistou formou diskontování budoucích příjmů z investice na současnou hodnotu pomocí spojitě úrokové míry. Spojité úročení vychází z hlavní myšlenky, že po celou dobu trvání investice či závazku jsou úroky připisovány každým okamžikem. Za předpokladu konstantní úrokové míry  $r_i$  a krátkého časového období  $\tau$  lze zvolit nějaký základní okamžik, může se jednat například o začátek roku apod. Poté můžeme chápat čas  $t$ , jako určitý časový interval od základního okamžiku a v tomto čase bude na účtě množství peněz  $B(t) > 0$ . V čase  $t + \tau$  je poté na účet připsána poměrná částka  $rB(t)\tau$ . Celková částka na účtu je poté dána vztahem

$$B(t + \tau) = B(t) + rB(t)\tau.$$

Z tohoto vztahu lze jednoduchými úpravami poté vyjádřit úrokovou míru  $r$

$$r = \frac{B(t + \tau) - B(t)}{B(t)\tau}.$$

Za předpokladu diferencovatelnosti funkce  $B(t)$  lze pro nekonečně malý časový úsek  $\tau$  a za splnění počáteční podmínky  $B(0) = A$ , kde  $A$  představuje počáteční vklad na účtě, lze získat vztah pro lineární diferenciální rovnici 1. řádu

$$r = \frac{B'}{B} . \quad (2.23)$$

Řešením rovnice (2.23) lze získat vztah pro určení budoucí hodnoty  $B(t)$  počátečního vkladu na účtu

$$B(t) = Ae^{rt} \quad \text{pro } t \in [0, \infty). \quad (2.24)$$

Tento vztah lze samozřejmě modifikovat pro případ opačný, kdy chceme zjistit současnou hodnotu budoucí platby to znamená, že chceme provést diskontování budoucí hodnoty na současnou. V tomto případě vztah (2.24) přejde do tvaru

$$A(t) = Be^{-rt} . \quad [17]$$

Nyní se vraťme zpět k FW duraci, kde je cena dluhopisu určena právě pomocí spojitého úročení, jak dokládá vztah (2.22). V reálném světě může nastat situace, že se úroková míra posune o určitý inkrement  $\delta$  a vztah (2.22) lze přepsat do tvaru

$$PV(\delta) = \sum_{i=1}^n C \cdot e^{-(r_i+\delta)t_i} + NH \cdot e^{-(r+\delta)t_n} . \quad (2.25)$$

Pokud vztah (2.25) zderivujeme podle  $\delta$  a jednoduchou úpravou (dělením  $PV(\delta)$ ) obdržíme vztah

$$\frac{dPV(\delta)}{PV(\delta)d\delta} = \frac{1}{PV(\delta)} \sum_{i=1}^n (-t_i) C \cdot e^{-(r_i+\delta)t_i} + (-t_n) NH \cdot e^{-(r+\delta)t_n} .$$

Za předpokladu  $\delta = 0$  pak obdržíme vztah pro *Fisher-Weilovu duraci*

$$D_{FW} = \frac{1}{PV(0)} \sum_{i=1}^n (-t_i) C \cdot e^{-r_i t_i} + (-t_n) NH \cdot e^{-r t_n} . \quad (2.26)$$

Durace má využití při sestavování imunizovaného dluhopisového portfolia. Úkolem imunizace je odstranění úrokového rizika. Princip spočívá v rovnosti celkové durace dluhopisového portfolia určité společnosti duraci portfolia závazků této společnosti. Pro celkovou duraci portfolia skládajícího se ze dvou druhů dluhopisů platí vztah

$$w_1 \cdot D_1 + w_2 \cdot D_2 = D_{portfolia} . \quad [19]$$

### 3 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU

Rovnice  $F(x,y,y',y'')=0$ , nazýváme diferenciální rovnice druhého řádu. Analogicky jako u rovnic 1. řádu u nich můžeme definovat obecné, partikulární a singulární řešení, popřípadě se zabývat existencí a jednoznačností výsledku [15].

V dalším textu bude věnována pozornost důležitému typu DR 2. řádu a to diferenciálním rovnicím lineárním s konstantními koeficienty obecného tvaru

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x), \quad (3.1)$$

kde  $a_1, a_2$  jsou reálné konstanty a  $f$  je reálná spojitá funkce definovaná na intervalu  $J$ . Dále je nutné uvést větu zaručující existenci a jednoznačnost řešení příslušné lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty.

**Věta 3.1 (o existenci a jednoznačnosti řešení).** *Nechť je funkce  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá,  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}$  a  $x_0 \in J$ . Pak právě existuje jedno řešení  $y$  diferenciální rovnice (3.1), které je definované na intervalu  $J$  a splňuje počáteční podmínky  $y(x_0) = \zeta_1$  a  $y'(x_0) = \zeta_2$  [18].*

Pokud je funkce  $f$  na pravé straně rovnice (3.1) rovna 0, pak se jedná o homogenní lineární DR 2. řádu s konstantními koeficienty. V případě, že funkce  $f$  v rovnici (3.1) není nulová, tak se jedná o nehomogenní lineární DR 2. řádu s konstantními koeficienty.

#### 3.1 Homogenní lineární DR 2. řádu s konst. koeficienty

Homogenní DR 2. řádu má obecný tvar

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0, \quad (3.2)$$

kde  $a_1, a_2$  jsou reálné konstanty a  $y$  je neznámá funkce. Hledaná funkce  $y$  je v podstatě libovolná lineární kombinace dvou funkcí  $u$  a  $v$  z intervalu  $J$

$$y = C_1u + C_2v,$$

kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Než přejdeme k obecnému řešení homogenní DR 2. řádu, tak si definujeme co je tzv. *fundamentální systém řešení*.

**Věta 3.3** Necht'  $y_1, y_2$  tvoří *fundamentální systém řešení rovnice (3.2)*, pak funkce

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  je *obecným řešením rovnice (3.2)*.

Každou dvojici lineárně nezávislých řešení  $y_1, y_2$  dané homogenní lineární DR 2. řádu lze označit jako *fundamentální systém řešení* (též někdy označované jako báze řešení). Vhodnou volbou konstant  $C_1, C_2$  lze z obecného řešení získat partikulární řešení rovnice (3.2).

K nalezení *obecného řešení* rovnice (3.2) se využívá tzv. *charakteristické rovnice*

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \quad (3.3)$$

kteřá má kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}. \quad (3.4)$$

Existují poté 3 možné varianty obecného řešení dané homogenní DR 2. řádu v závislosti na parametrech  $a_1, a_2$ .

a) Pokud  $a_1^2 > 4a_2$ , pak kořeny charakteristické rovnice (3.3) jsou tvaru

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2},$$

jedná se tedy o dva různé reálné kořeny a obecné řešení je ve tvaru

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

b) Pokud  $a_1^2 = 4a_2$ , pak kořen charakteristické rovnice (3.3) je reálný dvojnásobný kořen tvaru

$$\lambda_{1,2} = -a_1/2$$

a obecné řešení lze psát ve tvaru

$$y(x) = C_1 e^{-\left(\frac{a_1}{2}x\right)} + C_2 x e^{-\left(\frac{a_1}{2}x\right)}. \quad (3.5)$$

c) Pokud  $a_1^2 < 4a_2$ , pak kořeny charakteristické rovnice jsou komplexně sdružené,

tedy ve tvaru

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm i\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}.$$

Pokud si označíme pro zjednodušení zápisu výraz  $\frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$  jako  $\beta$ ,  $\frac{-a_1}{2}$  jako  $\alpha$ ,

lze obecné řešení napsat ve tvaru

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad [3]$$



Postup řešení homogenní DR 2. řádu, jejíž charakteristická rovnice poskytuje komplexně sdružené kořeny, lze snadno ukázat na následujícím příkladu 3.1 převzatém z literatury [3].

### Příklad 3.1

Cílem je určit obecné řešení rovnice

$$y'' + 2y' + 5y = 0. \quad (3.6)$$

Nejprve je nutné vyjádřit *charakteristickou rovnici* podle (3.3), která má v tomto konkrétním příkladu tvar

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,$$

Pro tuto charakteristickou rovnici se poté vypočítají charakteristické kořeny podle (3.4)

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5}}{2}.$$

V tomto případě je  $a_1^2 < 4a_2$  a řešením charakteristické rovnice jsou 2 komplexně sdružené kořeny. Pokud si označíme výraz  $\frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$  jako  $\beta$ ,  $\frac{-a_1}{2}$  jako  $\alpha$ , tak dostaneme

že  $\alpha = -1$  a  $\beta = 2$ .

Charakteristické kořeny tedy jsou

$$\lambda_1 = -1 + 2i \quad \lambda_2 = -1 - 2i.$$

Pak obecné řešení rovnice (3.6) je ve tvaru

$$y(x) = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x$$

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

## 3.2 Nehomogenní lineární DR 2. řádu s konst. koeficienty

V ekonomických a jiných vědách se často setkáme s *nehomogenní lineární diferenciální rovnicí 2. řádu s konstantními koeficienty*, která má obecný tvar

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (3.7)$$

kde  $a_1, a_2$  jsou reálné konstanty a funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $J$ . Jak již bylo zmíněno v úvodu této kapitoly, hlavní odlišností těchto rovnic od rovnic homogenních je, že  $f(x) \neq 0$ . I u tohoto typu rovnic je možné pomocí fundamentálního systému řešení určit řešení obecné, což říká i následující věta [4].

**Věta 3.4 (o existenci a jednoznačnosti řešení nehomogenní rovnice).** Necht'  $y_1, y_2$  je fundamentální systém řešení rovnice (3.2), pak obecné řešení nehomogenní rovnice (3.7) lze psát ve tvaru

$$y = y_h(x) + y_p(x),$$

kde  $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  je obecné řešení příslušné přidružené homogenní rovnice (3.2) a  $y_p(x)$  je partikulární řešení rovnice (3.7).

Tento typ rovnic lze řešit metodou variace konstant či metodou neurčitých koeficientů.

**a) metoda variace konstanty u nehomogenních rovnic 2. řádu**

U této metody je snaha v obecném řešení homogenní rovnice zaměnit konstanty  $C_1, C_2$  vhodnými funkcemi  $K_1(x)$  a  $K_2(x)$  a poté nalézt řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x).$$

Postup výpočtu nám objasní následující věta převzatá z literatury [18].

**Věta 3.5** Necht'  $y_1, y_2$  je fundamentální systém řešení rovnice (3.2), a necht' funkce  $K_1(x)$  a  $K_2(x)$  vyhovují soustavě rovnic

$$K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x) = 0,$$

$$K_1(x)y_1'(x) + K_2(x)y_2'(x) = f(x).$$

Jsou-li  $C_1, C_2$  libovolné primitivní funkce k funkcím  $K_1, K_2$ , pak

$$y_p = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{3.8}$$

je řešením rovnice (3.6). Navíc je-li  $x_0 \in J$  a zvolíme-li

$$C_1(x) = \int_{x_0}^x K_1(t) dt$$

$$C_2(x) = \int_{x_0}^x K_2(t) dt,$$

pak (3.8) je řešením rovnice (3.7) a pro tato řešení platí

$$y_p(x_0) = 0, \quad y_p'(x_0) = 0.$$

Příklad 3.2 následně ukáže aplikaci Věty 3.5 na početním příkladu, který byl převzat z literatury [3].

### Příklad 3.2

Pomocí metody variace konstanty určíme obecné a následně i partikulární řešení následující nehomogenní lineární DR 2. řádu s konstantními koeficienty

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x}.$$

Charakteristická rovnice přidružené homogenní rovnice k dané rovnici je

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

pro tuto rovnici se vypočítají charakteristické kořeny podle (3.4)

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1}}{2}.$$

Charakteristická rovnice má tedy dvojnásobný reálný kořen  $\lambda_{1,2} = 1$  a tedy podle (3.5) je obecné řešení přidružené rovnice

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x = (C_1 + C_2 x) e^x.$$

Nyní je na místě určit i řešení partikulární podle Věty 3.5. Je třeba vyřešit soustavu dvou rovnic

$$K_1(x) \cdot e^x + K_2(x) \cdot x \cdot e^x = 0$$

$$K_1(x) \cdot e^x + K_2(x) \cdot (e^x + x \cdot e^x) = e^x / (1 + x),$$

po úpravě obou rovnic získáme

$$K_1(x) + K_2(x) \cdot x = 0$$

$$K_1(x) + K_2(x) \cdot (1 + x) = 1 / (1 + x).$$

Řešením této soustavy rovnic jsou funkce  $K_1(x)$  a  $K_2(x)$ , které se následně integrují za účelem zjištění jejich primitivních funkcí  $C_1(x)$  a  $C_2(x)$

$$K_1(x) = -x / (1 + x), \quad K_2(x) = 1 / (1 + x).$$

Integrací se získají primitivní funkce  $C_1(x)$  a  $C_2(x)$

$$C_1(x) = -x + \ln|1 + x| + c_1, \quad C_2(x) = \ln|1 + x| + c_2,$$

kde  $c_1$  a  $c_2$  jsou libovolné reálné konstanty. Nyní již zbývá pouze vyjádřit obecné řešení dané nehomogenní rovnice podle Věty 3.5

$$y_p(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$$

$$y_p = (-x + \ln|1+x| + c_1) \cdot e^x + (\ln|1+x| + c_2) \cdot x \cdot e^x.$$

## **b) metoda neurčitých koeficientů u nehomogenních rovnic 2. řádu**

Při této metodě se nejprve nalezne řešení homogenní části rovnice (3.7) v obecném tvaru

$$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Další krok spočívá v nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice (3.7). Dále se budeme zabývat případy, kdy  $f(x)$  má speciální tvar a v tomto případě lze nalézt partikulární řešení  $y_p(x)$ . Mohou nastat tyto případy speciálního tvaru pravé strany nehomogenní rovnice 2. řádu:

- pravá strana rovnice je ve tvaru  $f(x) = Q_m(x)e^{\alpha x}$ ,

$Q_m$  je polynom stupně  $m \in \mathbb{N}$ , tedy platí  $Q_m(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ ,

tento typ má partikulární řešení ve tvaru

$$y_p = x^\rho Q'_m(x) e^{\alpha x}$$

(3.9)

kde  $\rho$  je určité číslo, které je v závislosti na  $\alpha$  rovno 0 (pokud  $\alpha$  není kořenem charakteristické rovnice) nebo je rovno násobku  $\alpha$  (pokud  $\alpha$  je kořenem charakteristické rovnice) a  $Q'_m$  je neznámý polynom stupně  $m$ .

Partikulární řešení (3.9) dosazené do původní DR nám umožní nalézt koeficienty polynomu  $Q'_m$ , tak že porovnáme na obou stranách rovnice koeficienty u stejných mocnin  $x$ .

- pravá strana rovnice je ve tvaru  $f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$ ,

tyto rovnice mají tvar partikulárního řešení ve tvaru

$$y_p = x^\rho e^{\alpha x} (P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

kde  $\rho$  je buď rovno 0 (pokud  $\alpha + \beta i$  není kořenem charakteristické rovnice) nebo rovno 1 a  $P_m$  a  $Q_m$  jsou polynomy, které jsou stupně nejvýše  $m$ . Příslušné koeficienty se opět zjistí dosazením partikulárního řešení do původní DR.

- pokud je na pravé straně rovnice funkce  $f(x)$ , která je konečným součtem předchozích dvou typů funkcí, tak partikulární řešení rovnice s pravou stranou  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$  je rovno součtu partikulárních řešení rovnic se stejnou levou i pravou stranou  $f_1, \dots, f_k$  [4].

### 3.2.1 Stabilita a konvergence řešení nehomogenních DR 2. řádu

Pokud pomocí nehomogenních lineárních DR 2. řádu s konstantními koeficienty a konstantní pravou stranou popisujeme určité ekonomické jevy, které se vyvíjejí v čase a my chceme zjistit jestli postupem času spějí k nějaké rovnováze či cílové hodnotě (pak je řešení rovnice stabilní) či nikoliv (nestabilní řešení), bude nás zajímat tzv. *stabilita a konvergence řešení* při  $t \rightarrow +\infty$ . Tento typ rovnice má obecný tvar

$$y'' + a_1y' + a_2y = k, \quad (3.10)$$

kde  $a_1, a_2$  jsou reálné konstanty a  $k$  je konstanta reprezentující pravou stranu rovnice. Kořeny získané vyřešením *charakteristické rovnice* se poté označí jako  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Vzhledem k hodnotě *diskriminantu*  $D$  poté rozlišujeme 3 různé typy *obecného řešení* rovnice (3.10):

a) je-li  $D > 0$ , má obecné řešení rovnice (3.10) tvar

$$y(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + k/c.$$

Pokud  $\lambda_1 < 0$  a  $\lambda_2 < 0$  je  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = k/c$ , neboť pro taková  $\lambda$  je  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda t} = 0$ . Poté je takové řešení *stabilní a konverguje* pro libovolná  $C_1, C_2$  k hodnotě  $k/c$ .

Pokud je  $\lambda_1 = 0$  a  $\lambda_2 < 0$  nebo obráceně, poté je řešení opět *stabilní a konverguje*

k funkci  $C_1 + k/c$ .

Pokud je alespoň jeden z kořenů  $\lambda_1, \lambda_2$  kladný, poté  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$  je konečná pouze pokud příslušná konstanta  $C_1$  respektive  $C_2$  je nulová. Pokud tomu tak není, řešení nemá konečnou limitu a mluví se o *nestabilním řešení* rovnice (3.10).

b) je-li  $D = 0$ , má obecné řešení rovnice (3.10) tvar

$$y(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2te^{\lambda t} + k/c.$$

Pokud dvojnásobný kořen  $\lambda < 0$ , poté limita  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = k/c$  a řešení je tedy *stabilní*. Každé řešení pro libovolné  $C_1$  a  $C_2$  tedy *konverguje* k tomuto stabilnímu řešení.

Pokud dvojnásobný kořen  $\lambda \geq 0$ , poté limita  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$  nemá konečnou hodnotu a řešení je *nestabilní*.

c) hodnota  $D < 0$ , poté má charakteristická rovnice dva komplexně sdružené kořeny

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  a obecný tvar řešení rovnice (3.10) je

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) + k/c.$$

Pokud  $\alpha < 0$  je  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = k/c$  a řešení je *stabilní* a *konverguje* k uvedené hodnotě pro libovolná  $C_1$  a  $C_2$ .

Pokud  $\alpha \geq 0$  není  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$  konečná a řešení je *nestabilní* [3].

## 4 EKONOMICKÉ APLIKACE DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

### 4.1 Solowův model ekonomického růstu

Pro názorné představení ekonomických aplikací ODR byl vybrán *Solowův model* ekonomického růstu popsáný v části 2.4, který bude aplikován na vybrané makroekonomické ukazatele České republiky z období let 2005 až 2016. Data z roku 2017 nebyla do vstupních dat zahrnuta záměrně, jelikož se právě na hodnotě HDP z tohoto roku ověří možnosti modelu predikovat vývoj HDP. Veškerá data byla získána na webových stránkách Českého statistického úřadu a jsou uvedena v Příloze A. Jedná se o následující ukazatele:

- Hrubý domácí produkt  $Y$ – uveden v běžných cenách daného období v **mld. Kč**.
- Tvorba hrubého fixního kapitálu  $K$ - uveden v běžných cenách daného období v **mld. Kč**.
- Pracovní síla  $L$ - počet ekonomicky aktivních obyvatel v **tisících**.

#### 4.1.1 Stanovení konstant $(n+g)$ , $n$ a $g$

Ke stanovení konstant Solowova modelu byly použity 2 přístupy. První přístup využívá ke stanovení dané konstanty geometrického průměru přírůstků daného ekonomického ukazatele. Hledaná konstanta je v podstatě přirozený logaritmus tohoto geometrického průměru. Druhý přístup využívá lineární regrese, kdy vztah pro daný ekonomický ukazatel se zlogaritmuje, čímž se provede linearizace. Hledaná konstanta v tomto případě představuje směrnici takto získané lineární závislosti ukazatele na čase. K oběma způsobům určení konstant byl využit software MS Excel s příslušnými funkcemi. Určené přírůstky jednotlivých ukazatelů včetně přirozených logaritmů využitých pro lineární regresi jsou uvedeny v Příloze A společně se vstupními hodnotami ukazatelů  $Y$ ,  $K$ ,  $L$ .

Hodnoty stanovených konstant jsou uvedeny v tab. 1. Z uvedených hodnot je patrný rozdíl ve stanovení konstant jednotlivými přístupy. Konstanta  $g$  byla stanovena z hodnot úrovně technologií  $A$  rovněž zlogaritmováním geometrického průměru přírůstků  $A$  v čase a linearizací vztahu (2.17) jako zbylé 2 konstanty. Teoreticky lze hodnota konstanty  $g$  zjistit rozdílem  $(n+g)$  a  $n$ , avšak já jsem v práci upřednostnil výpočet z reálných dat. V případě konstant  $(n+g)_Y$  a  $(n+g)_K$  se jedná o tu samou konstantu, pouze v prvním případě je určena z reálných hodnot HDP a v druhém se k jejímu stanovení použily reálné hodnoty tvorby hrubého fixního kapitálu České republiky.

**Tabulka 1:** Konstanty Solowova modelu stanovené z experimentálních dat

Konstanta	Hodnota <sub>geometrický průměr</sub>	Hodnota <sub>regrese</sub>
$(n + g)_Y$	0,0345	0,0266
$(n + g)_K$	0,0233	0,0132
$n$	0,0030	0,0026
$g$	0,0112	0,0134

*Zdroj: vlastní zpracování*

#### 4.1.2 Stanovení časového vývoje jednotlivých ekonomických ukazatelů

##### a) Hrubý domácí produkt

Z hodnot HDP ( $Y_{skutečný}$ ) zjištěných na stránkách ČSÚ byla stanovena konstanta  $(n+g)$  postupem uvedeným v oddíle 4.1.1. Podle vztahu (2.18) poté byly dopočítány hodnoty Hrubého domácího produktu z konstanty  $(n+g)_Y$ , zjištěné z přirozeného logaritmu geometrického průměru přírůstků reálných hodnot HDP. Takto stanovené hodnoty HDP jsou v tab. 2 označeny jako  $Y_{geomet. p.}$ . Dosazením konstanty  $(n+g)_Y$  zjištěné pomocí lineární regrese závislosti hodnot přirozených logaritmů skutečných hodnot HDP na čase, byly získány také modelové hodnoty HDP, které jsou v tab. 2 označeny  $Y_{regrese}$ .

Ve stejné tabulce jsou uvedeny i odchylky skutečného HDP v daném roce od modelové hodnoty stanovené oběma způsoby. Odchylka je vyjádřena jako kladný rozdíl mezi hodnotou  $Y_{skutečný}$  a příslušnou modelovou hodnotou  $Y$  ve stejném roce, to děleno  $Y_{skutečný}$  a celé vynásobené 100. Takže v podstatě se jedná o procentní rozdíl vztahený k  $Y_{skutečný}$ .

Jak je patrné z hodnot odchylek v tab. 2 a také v grafu obr. 6, pohybují se odchylky v jednotkách procent. To je velice uspokojivý výsledek svědčící o použitelnosti tohoto modelu i v dnešní době. Největší odchylky je dosaženo v roce 2008 a druhé nejvyšší odchylky o rok dříve tedy v roce 2007. Jedná se o roky, kdy docházelo k celosvětové ekonomické recesi.



**Tabulka 2:** Porovnání časového vývoje skutečného HDP a HDP zjištěného Solowovým modelem

Rok	$Y_{\text{skutečný}}$ [mld. Kč]	$Y_{\text{geomet. p.}}$ [mld. Kč]	$Y_{\text{regrese}}$ [mld. Kč]	Odchylka $Y_{\text{skutečný}}$ a $Y_{\text{geomet. p.}}$ [%]	Odchylka $Y_{\text{skutečný}}$ a $Y_{\text{regrese}}$ [%]
2005	3264,9	<b>3 264,9</b>	<b>3 264,9</b>	0,00	0,00
2006	3512,8	<b>3 379,6</b>	<b>3 353,0</b>	3,79	4,55
2007	3840,1	<b>3 498,3</b>	<b>3 443,5</b>	8,90	10,33
2008	4024,1	<b>3 621,2</b>	<b>3 536,5</b>	10,01	12,12
2009	3930,4	<b>3 748,4</b>	<b>3 631,9</b>	4,63	7,59
2010	3962,5	<b>3 880,1</b>	<b>3 729,9</b>	2,08	5,87
2011	4033,8	<b>4 016,4</b>	<b>3 830,6</b>	0,43	5,04
2012	4059,9	<b>4 157,5</b>	<b>3 934,0</b>	2,40	3,10
2013	4098,1	<b>4 303,5</b>	<b>4 040,2</b>	5,01	1,41
2014	4313,8	<b>4 454,7</b>	<b>4 149,2</b>	3,27	3,82
2015	4595,8	<b>4 611,2</b>	<b>4 261,2</b>	0,34	7,28
2016	4773,2	<b>4 773,2</b>	<b>4 376,2</b>	0,00	8,32

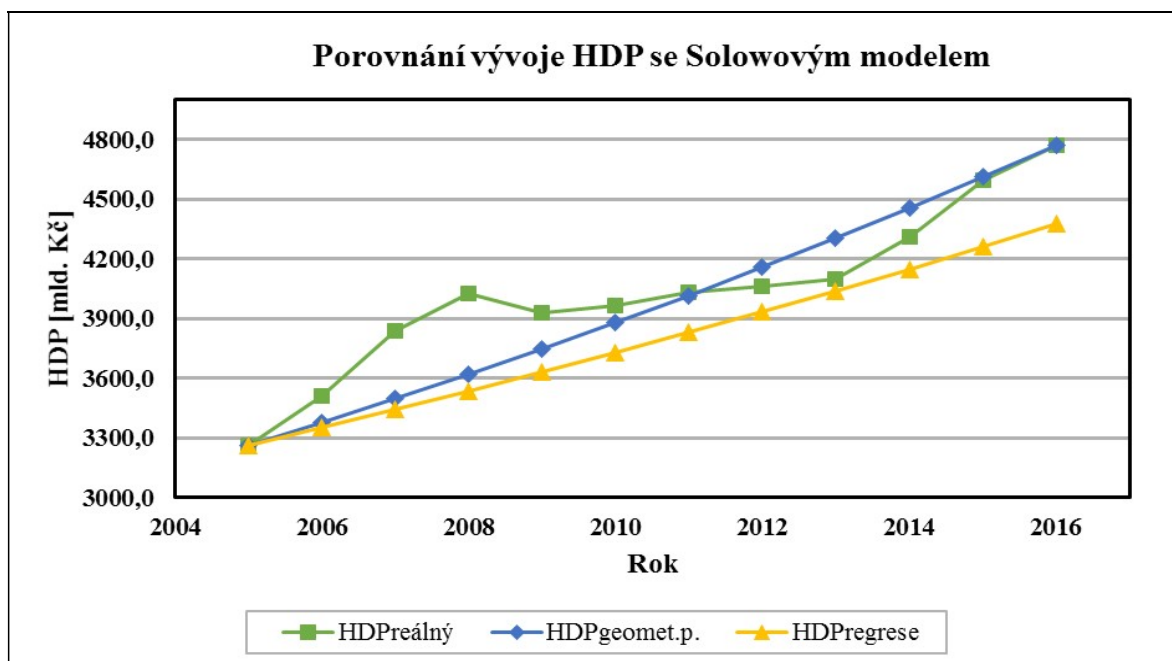
*Zdroj: vlastní zpracování*

Z obr. 7 je patrné, že historické hodnoty modelu jsou podhodnocené ve srovnání s realitou. Čím více se model blíží přítomnosti, tím dochází ke sblížování modelových hodnot s realitou. Odchylky mohou být způsobeny zavedením zjednodušujících předpokladů tohoto modelu, které jsou uvedeny v kapitole 2.4.2. Především se jedná o to, že model nepočítá s otevřeností ekonomiky (dovoz/vývoz) a také neberu v úvahu státní výdaje a daně. Jak je všeobecně známo, obě tyto ekonomické skutečnosti ovlivňují hodnotu HDP dané země.

Ze stejného grafu je patrné, že modelové hodnoty  $Y$  vypočítané z konstanty  $(n+g)$  určené lineární regrese, jsou celkově nižší než modelové hodnoty určené z geometrického průměru. To je způsobeno rozdílem hodnot konstanty  $(n+g)$  stanovené uvedenými způsoby.

Obecně lze říci, že konstanta  $(n+g)$  stanovená z geometrického průměru přírůstků  $HDP$  poskytuje větší shodu modelových hodnot HDP s realitou. Z tohoto důvodu byla i použita k prognóze vývoje HDP mezi roky 2017 až 2021, jak dokládá obr. 10. Z grafu je zřejmý rovnoměrný růst HDP, model totiž nebere v úvahu žádné mimořádné události v celosvětové ekonomice. To se může jevit jako slabina tohoto modelu. Pokud by totiž došlo k celosvětové ekonomické krizi, jistě by došlo ke stagnaci či dokonce k poklesu růstu HDP a jeho modelové hodnoty by neodpovídaly reálným hodnotám tohoto makroekonomického ukazatele výkonnosti národní ekonomiky.

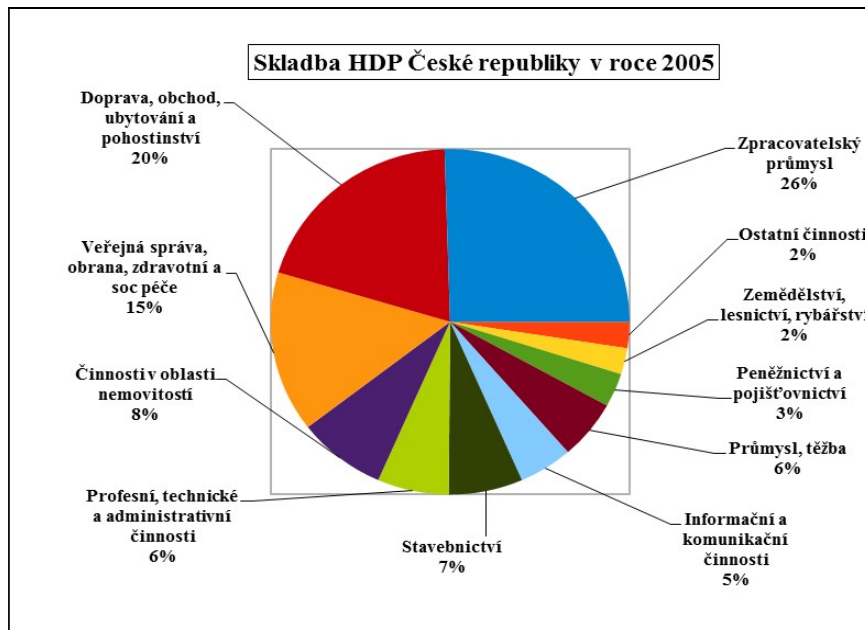
Na obr. 10 je patrné, že model předpovídá pro rok 2017 hodnotu HDP 4941 mld. Kč. Skutečná hodnota činila 5050 mld. Kč, tedy model předpověděl HDP s odchylkou pouhých 2,2%. Jedná se o excelentní výsledek.



**Obrázek 7:** Porovnání vývoje reálného HDP České republiky a HDP zjištěných Solowovým modelem

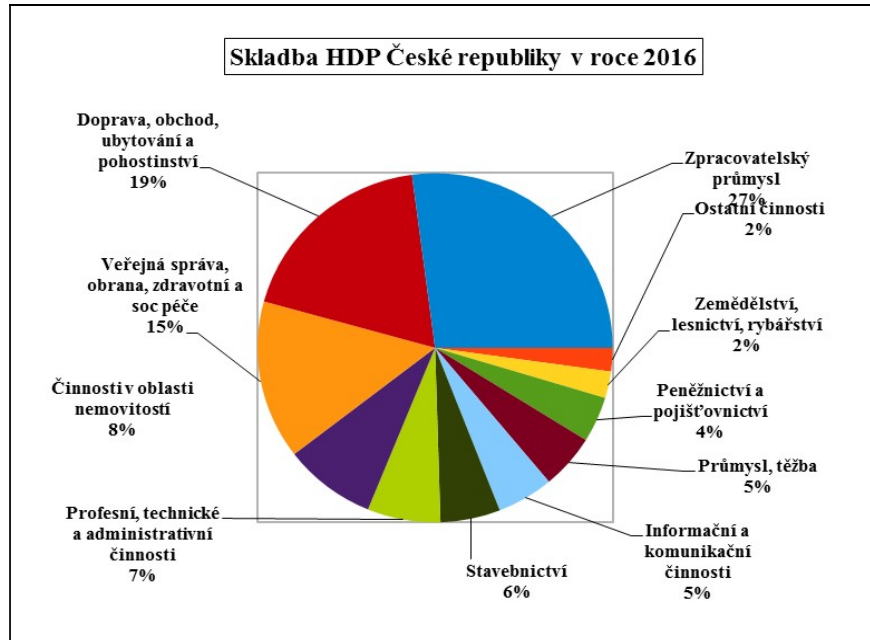
*Zdroj: vlastní zpracování*

Podíl jednotlivých činností národní ekonomiky na vytvoření HDP v roce 2005 je graficky znázorněn na obr. 8 a 9. Data ke konstrukci těchto koláčových grafů byla opět zjištěna ze statistik ČSÚ. Z grafů je patrné, že se jedná o příliš časově krátké období, aby mohlo dojít k velkým změnám v podílech jednotlivých odvětví, které přispívají ke konečné hodnotě HDP. Za povšimnutí stojí zvýšení podílu peněžnictví a bankovníctví (o více než 1%) a také zpracovatelského průmyslu (rovněž o více než 1%). Tím se skladba HDP České republiky přibližuje skladbě HDP západních ekonomik. K tomuto trendu dochází zřejmě na úkor poklesu podílu těžkého průmyslu a těžby, ale také dopravy a veřejné správy. Očekával bych však větší nárůst podílu informačních a komunikačních činností, které zvýšily podíl o necelého 0,5%, což se může jevit jako relativně malý skok v míře přispění těchto činností na celkovém HDP. Dle mého názoru je právě v informačních a komunikačních činnostech stále velký potenciál a do budoucnosti by právě tato oblast mohla přispět k dalšímu růstu HDP České republiky.



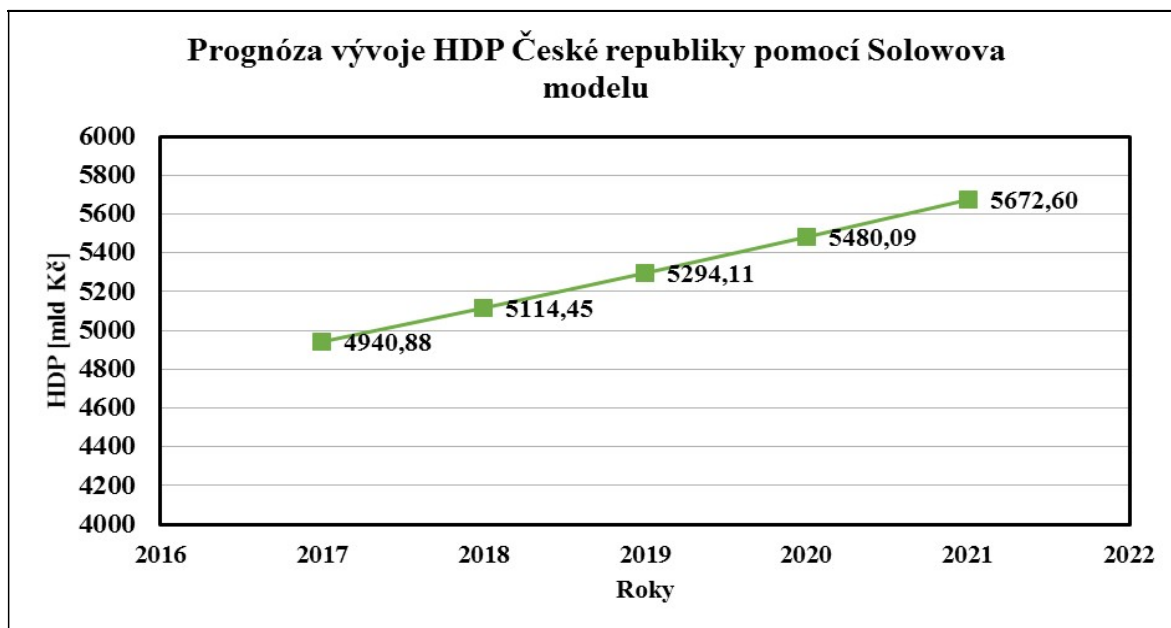
Obrázek 8: Skladba HDP České republiky v roce 2005

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 9: Skladba HDP České republiky v roce 2016

Zdroj: vlastní zpracování



**Obrázek 10:** Předpověď vývoje HDP České republiky na období let 2017 až 2021

*Zdroj: vlastní zpracování*

### **b) Pracovní síla**

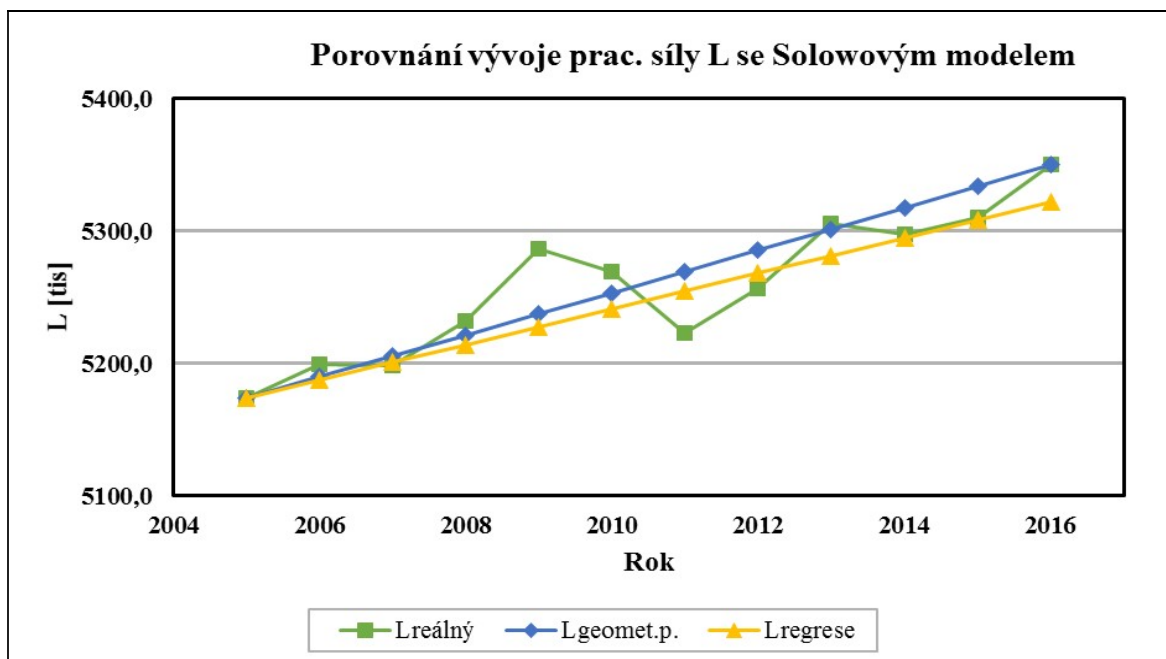
U zkoumání časového vývoje pracovní síly  $L$  byl aplikován stejný postup jako u hrubého domácího produktu. Byla stanovena konstanta  $n$  podle postupu uvedeného v kapitole 4.1.1, kde jsou v tab. 1 uvedeny hodnoty této konstanty pro oba přístupy jejího stanovení. Poté byly podle vztahu (2.16) stanoveny modelové hodnoty pracovní síly  $L$ . Modelové hodnoty  $L_{geomet.p.}$  a  $L_{regrese}$  byly poté porovnány z reálnou hodnotou pracovní síly  $L_{real.}$ , jak je uvedeno v tab. 3. Stejným způsobem jako u hrubého domácího produktu, byly i u počtu pracujících vypočítány odchylky modelové a reálné hodnoty. Z odchylek uvedených v 5. a 6. sloupci tab. 3 je patrná ještě lepší shoda modelových a reálných hodnot než u hrubého domácího produktu a pro většinu roků ze zkoumaného intervalu je odchylka do 1%. Nejvyšší odchylky (1,12%) bylo zjištěno v roce 2009 s konstantou  $n$  určenou jako směrnice lineární regrese závislosti  $\ln L_{real.}$  na čase, kdy model podhodnocuje celkové množství pracovníků v národním hospodářství oproti realitě. To dokládá i obr. 11, z kterého je patrné že model poskytuje hodnoty  $L$  s lepší lineární závislostí na čase než tomu tak je ve skutečnosti. Na první pohled se zdá, jako by model prováděl linearizaci skutečných hodnot počtu pracovníků v čase. Ve skutečnosti by se mělo jednat podle vztahu (2.16) o exponenciální závislost, rozdíl může být způsoben vstupními

daty a zavedením zjednodušujících předpokladů tohoto modelu, které jsou uvedeny v kapitole 2.4.2. Nad rámec této bakalářské práce by mohlo být ověření této lineární závislosti v nějakém statistickém programu, například v programu *Statistica*. S přihlédnutím ke skutečným a modelovým hodnotám počtu pracovníků, lze konstatovat, že celkový počet ekonomicky aktivního obyvatelstva v čase mírně roste, pouze s drobnými výkyvy v letech 2009 a 2011. Na růst počtu ekonomicky aktivního obyvatelstva může mít pozitivní vliv i příliv pracovní síly ze zahraničí. Další příčinou růstu může být to, že se do produktivního věku dostávají silné populační ročníky z 80.let minulého století.

**Tabulka 3:** Porovnání časového vývoje skutečného počtu pracovníků  $L_{real}$  a počtu pracovníků zjištěných Solowovým modelem

Rok	$L_{real}$ [tis.]	$L_{geom. p.}$ [tis.]	$L_{regrese}$ [tis.]	Odchylka $L_{real}$ a $L_{geom. p.}$ [%]	Odchylka $L_{real}$ a $L_{regrese}$ [%]
2005	5 174,2	5 174,2	5 174,2	0,00	0,00
2006	5 199,4	5 189,9	5 187,5	0,18	0,23
2007	5 198,3	5 205,7	5 200,8	0,14	0,05
2008	5 232,3	5 221,6	5 214,2	0,21	0,35
2009	5 286,5	5 237,4	5 227,6	0,93	1,12
2010	5 268,9	5 253,4	5 241,0	0,29	0,53
2011	5 223,0	5 269,4	5 254,5	0,89	0,60
2012	5 256,9	5 285,4	5 268,0	0,54	0,21
2013	5 306,0	5 301,5	5 281,5	0,09	0,46
2014	5 297,9	5 317,6	5 295,1	0,37	0,05
2015	5 309,9	5 333,8	5 308,7	0,45	0,02
2016	5 350,0	5 350,0	5 322,4	0,00	0,52

*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 11:** Porovnání vývoje reálné prac. síly České republiky a  $L$  zjištěných Solowovým modelem

*Zdroj: vlastní zpracování*

### **c) Tvorba hrubého fixního kapitálu**

Pro časový vývoj tvorby hrubého fixního kapitálu  $K$  byl aplikován stejný postup jako u předchozích dvou ukazatelů. Byla stanovena konstanta  $(n+g)_K$  podle postupu uvedeného v kapitole 4.1.1, ale v tomto případě byly vstupními daty pro stanovení této konstanty skutečné hodnoty tvorby hrubého fixního kapitálu  $K_{real.}$  převzaté ze statistik ČSÚ. Poté byly podle vztahu (2.19), uvedeného v teoretické části práce, stanoveny modelové hodnoty  $K$ . Modelové hodnoty  $K_{geom.p.}$  a  $K_{regrese}$  byly poté porovnány z reálnou hodnotou  $K$ , jak je uvedeno v tab. 4. Stejným způsobem jako u hrubého domácího produktu, byly i zde vypočítány odchylky modelové a reálné hodnoty  $K$ .

Zde se však model v porovnání s předchozími dvěma ukazateli značně rozchází s reálnými data a to především v letech 2007 a 2008. V těchto letech nastává podhodnocení hodnot tvorby hrubého fixního kapitálu v porovnání se skutečností. To může být způsobeno, tím že do krize v roce 2008 rostla tvorba hrubého fixního kapitálu mnohem rychleji než po roce 2008, kde začalo z důvodu nejistoty docházet k omezování investic. Situaci dokládá obr. 12, na něm je patrný trend u reálných hodnot  $K_{real.}$ , kde po krizi v roce 2008 nastává stagnace až pokles reálných hodnot  $K$ . Ke změně dochází v roce 2013, kdy nastává oživení ekonomiky zřejmě i zásluhou intervencí ČNB. Po nich totiž nastává meziroční růst investic a tedy i růst

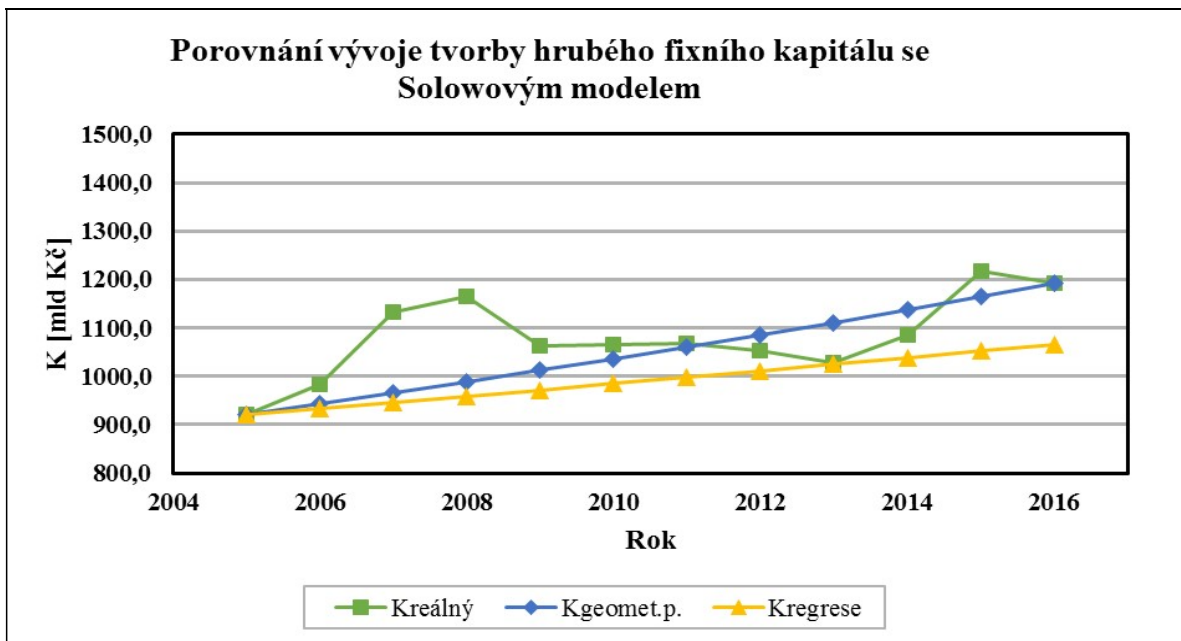
reálných hodnot  $K$ . Proto hodnoty  $K_{real}$ . z období 2008 až 2013 použité ke stanovení konstanty  $(n+g)_K$ , tuto konstantu podhodnotily, a z tohoto důvodu jsou i modelové hodnoty  $K$  v letech 2007 a 2008 o více než 10 % nižší než byla skutečnost.

Na obr. 13 a obr. 14 je názorně zobrazen podíl jednotlivých činností, z nichž se skládala tvorba hrubého fixního kapitálu v České republice v letech 2005 a 2016. Při porovnání obou grafů je zcela evidentní nárůst podílu produktů duševního vlastnictví, ICT a ostatních strojů, ale také význam výstavby obydlí (byty, rodinné domy). Naopak mezi těmito obdobími došlo k poklesu podílu výstavby ostatních budov a staveb, kam se řadí především výstavby továren, hal a účelových budov, ale také k poklesu podílu pěstovaných biologických celků. U pěstovaných biologických celků je pokles z relativního hlediska ze všech činností nejvyšší. Podíl dopravních prostředků se jeví v těchto dvou období jako téměř konstantní.

**Tabulka 4:** Porovnání časového vývoje skutečné tvorby kapitálu  $K_{real}$ . a tvorby kapitálu zjištěné Solowovým modelem

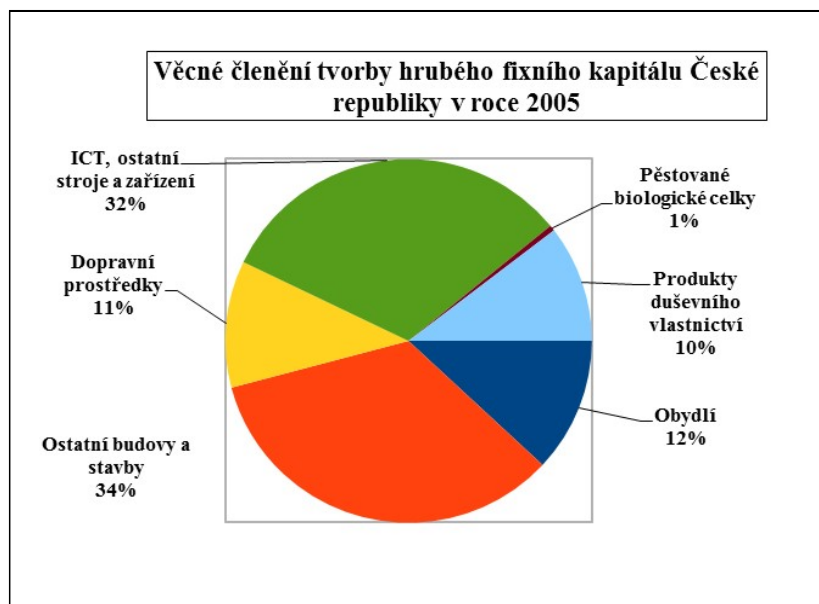
Rok	$K_{real}$ . [tis.]	$K_{geomet. p.}$ [tis.]	$K_{regrese}$ [tis.]	Odchylka $K_{real}$ . a $K_{geomet.}$ p. [%]	Odchylka $K_{real}$ . a $K_{regrese}$ [%]
2005	921,8	<b>921,8</b>	<b>921,8</b>	0,00	0,00
2006	983,1	<b>943,6</b>	<b>934,1</b>	4,01	4,98
2007	1 132,3	<b>965,9</b>	<b>946,5</b>	14,70	16,41
2008	1 165,2	<b>988,7</b>	<b>959,0</b>	15,15	17,69
2009	1 063,3	<b>1 012,0</b>	<b>971,8</b>	4,82	8,61
2010	1 066,2	<b>1 035,9</b>	<b>984,7</b>	2,84	7,64
2011	1 067,0	<b>1 060,3</b>	<b>997,8</b>	0,62	6,49
2012	1 051,9	<b>1 085,4</b>	<b>1 011,0</b>	3,18	3,89
2013	1 027,1	<b>1 111,0</b>	<b>1 024,4</b>	8,17	0,26
2014	1 084,1	<b>1 137,2</b>	<b>1 038,0</b>	4,90	4,25
2015	1 216,3	<b>1 164,1</b>	<b>1 051,8</b>	4,30	13,52
2016	1 191,5	<b>1 191,5</b>	<b>1 065,8</b>	0,00	10,55

*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 12:** Porovnání vývoje tvorby hrubého fixního kapitálu České rep. a  $K$  určeným Solowovým modelem

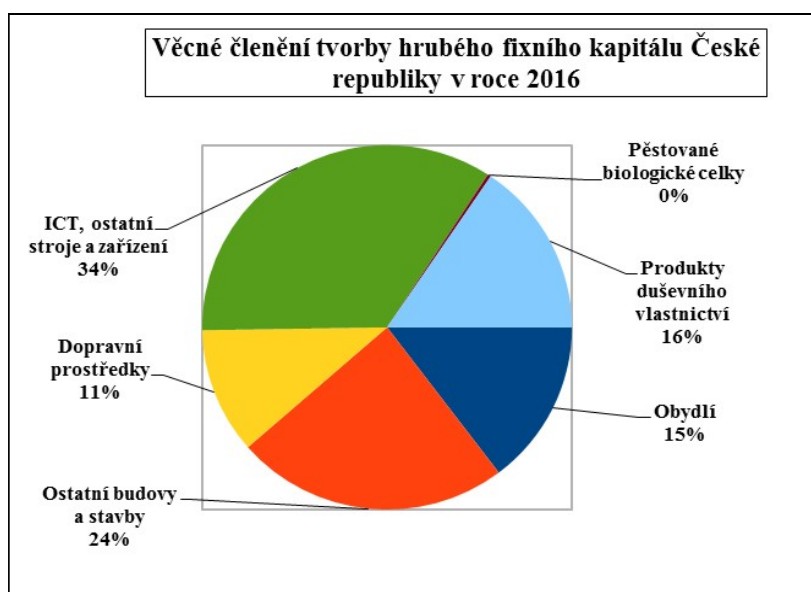
*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 13:** Podíl jednotlivých činností na tvorbě hrubého fixního kapitálu České rep. v roce 2005

*Zdroj: vlastní zpracování*





**Obrázek 14:** Podíl jednotlivých činností na tvorbě hrubého fixního kapitálu České rep. v roce 2016

*Zdroj: vlastní zpracování*

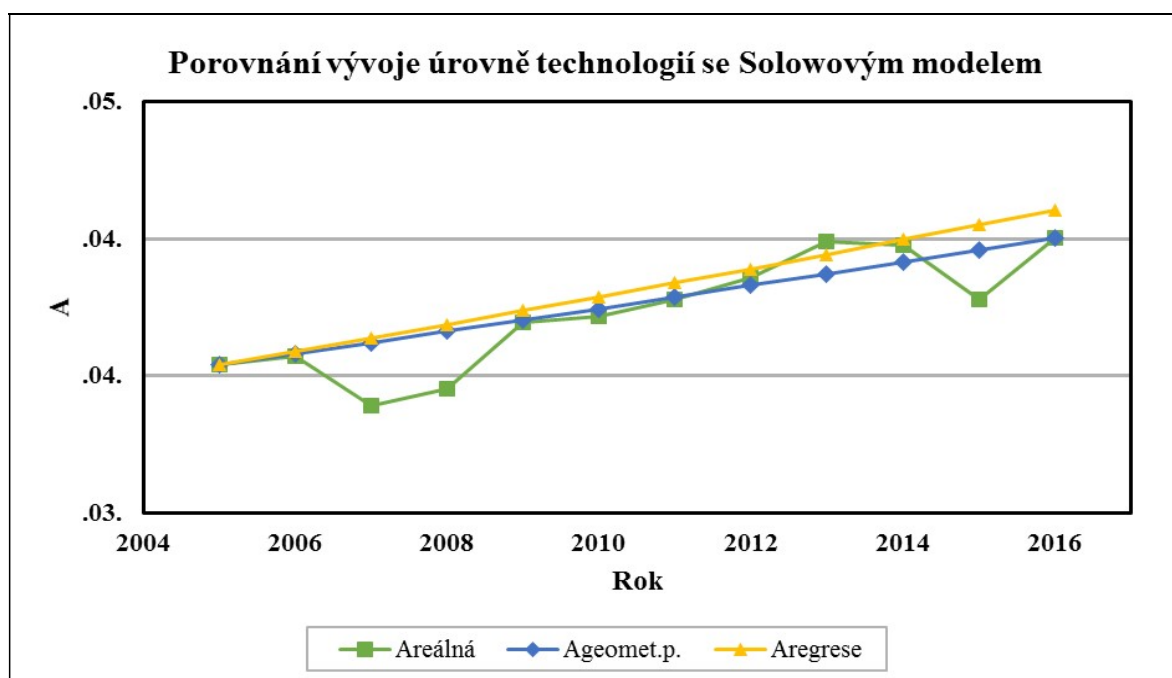
#### **d) Míra technického pokroku (úroveň technologií)**

Reálné hodnoty úrovně technologií  $A_{real}$  byly vypočítány jako poměr reálných hodnot HDP  $Y_{skutečný}$  a reálných hodnot tvorby hrubého fixního kapitálu  $K_{real}$  pro jednotlivé roky. Poté byly pomocí konstanty  $g$  a vztahu (2.17) určeny modelové hodnoty tohoto bezrozměrného ukazatele stejným způsobem jako u předchozích ukazatelů. Modelové hodnoty  $A$  spolu s odchylkami od hodnoty spočítané z reálných dat  $A_{real}$  jsou uvedeny v tab. 5. Graficky dokládá průběh reálné i modelových hodnot  $A$  obr. 15. Zde je stejně jako u ukazatele tvorby hrubého fixního kapitálu dosaženo nejvyšší odchylky modelových hodnot od hodnoty reálné v letech 2007 a 2008. Odchylky ukazatele  $A$  jsou v podstatě ze stejných příčin jako u tvorby kapitálu  $K$ .

**Tabulka 5:** Porovnání časového vývoje skutečné úrovně technologií  $A_{real}$  a úrovně technologií zjištěné Solowovým modelem

Rok	$A_{real}$	$A_{geomet. p.}$	$A_{regrese}$	Odchylka $A_{real}$ a $A_{geomet. p.}$ [%]	Odchylka $A_{real}$ a $A_{regrese}$ [%]
2005	3,5417	3,5417	3,5417	0,00	0,00
2006	3,5734	3,5816	3,5896	0,23	0,46
2007	3,3914	3,6219	3,6382	6,80	7,28
2008	3,4536	3,6627	3,6875	6,06	6,77
2009	3,6965	3,7039	3,7374	0,20	1,11
2010	3,7165	3,7456	3,7879	0,78	1,92
2011	3,7805	3,7878	3,8392	0,19	1,55
2012	3,8594	3,8305	3,8912	0,75	0,82
2013	3,9900	3,8736	3,9438	2,92	1,16
2014	3,9792	3,9172	3,9972	1,56	0,45
2015	3,7785	3,9613	4,0513	4,84	7,22
2016	4,0059	4,0059	4,1061	0,00	2,50

*Zdroj: vlastní zpracování*



**Obrázek 15:** Porovnání vývoje úrovně technologií České republiky a  $A$  zjištěných Solowovým modelem

*Zdroj: vlastní zpracování*

## 4.2 Durace dluhopisového portfolia pomocí Fisher-Weilovy durace

V praktické části práce bude využito Fisher-Weilovy durace k sestavení dluhopisového portfolia, skládajícího se ze dvojice státních kuponových dluhopisů s rozdílnou dobou splatnosti. Cílem bude sestavit imunní dluhopisové portfolio, které nám umožní po sedmi letech splatit úvěr ve výši 5 milionů Kč. Tento úvěr umožní firmě ABC zvýšit rentabilitu vlastního kapitálu. Sestavené dluhopisové portfolio bude zhodnoceno na základě ověření, zdali je portfolio imunní proti pohybu tržní úrokové míry. Informace o dluhopisech byly získány na internetových stránkách ČNB. Na těchto stránkách byla pro každý dluhopis zjištěna *doba splatnosti, jmenovitá hodnota dluhopisu, hodnota kuponu, průměrná cena, průměrná výnosová míra* a tzv. *ISIN*. *ISIN* (International Securities Identification Number) je mezinárodní identifikační číslo cenného papíru, které zajišťuje jeho dokonalou identifikaci při obchodování.

V následující tab. 6 jsou uvedeny charakteristiky dlouhodobých státních dluhopisů použitých v této práci. Nejprve bude provedena durace dvojice šestiletých a jedenáctiletých dluhopisů a poskytnutého úvěru. Poté došlo k sestavení portfolia dluhopisů, které bylo následně podrobena zkoumání, zdali je imunní vůči pohybu tržní úrokové míry.

**Tabulka 6:** Státní kuponové dluhopisy

Splatnost dluhopisu	Jmenovitá hodnota [Kč]	ISIN	Kupon [Kč]	Průměrná cena [%]	Průměrný výnos [%]
6 let	10 000	CZ 0001003834	150	103,83	1,492
11 let	10 000	CZ 0001005375	275	107,24	2,033

*Zdroj: vlastní zpracování*

### 4.2.1 Výpočet Fisher-Weilovy durace a sestavení dluhopisového portfolia

Výpočet FW durace bude proveden podle vztahu (2.26), kde za hodnotu spojitě úrokové míry bude dosazena hodnota průměrného výnosu dluhopisu z tab. 6. V případě durace úvěru byla použita jako spojitá úroková míra, *úroková sazba korunových úvěrů poskytnutých bankami nefinančním podnikům z období 02/2018*, která činí 3,58% p.a. Tato úroková sazba byla zjištěna na internetových stránkách ČNB.

Postup výpočtu FW durace u šestiletého dluhopisu bude ukázán na následujícím příkladu

$$D_6 = \frac{1}{PV(0)} \cdot \left\{ (-t_1)C \cdot e^{-r_6 t_1} + (-t_2)C \cdot e^{-r_6 t_2} + (-t_3)C \cdot e^{-r_6 t_3} + (-t_4)C \cdot e^{-r_6 t_4} + (-t_5)C \cdot e^{-r_6 t_5} + (-t_6)NH \cdot e^{-r_6 t_6} \right\},$$

kde za  $PV$  se dosadí průměrná cena šestiletého dluhopisu v Kč,  $C$  je hodnota kuponové platby v Kč,  $NH$  v tomto případě představuje jmenovitou hodnotu navýšenou o poslední kuponovou platbu  $C$  a  $r_6$  je spojitá úroková míra reprezentovaná průměrným výnosem šestiletého dluhopisu.

Po dosazení příslušných hodnot z tab. 6 a následujícím výpočtu obdržíme hodnotu durace  $D_6$  pro šestiletý dluhopis

$$D_6 = \frac{1}{10383} \cdot \left\{ (-1)150 \cdot e^{-0,01492 \cdot 1} + (-2)150 \cdot e^{-0,01492 \cdot 2} + (-3)150 \cdot e^{-0,01492 \cdot 3} + (-4)150 \cdot e^{-0,01492 \cdot 4} + (-5)150 \cdot e^{-0,01492 \cdot 5} + (-6)10150 \cdot e^{-0,01492 \cdot 6} \right\}$$

$$D_6 = 5,568 \text{ roků.}$$

Stanovení durace jedenáctiletého dluhopisu  $D_{11}$  bylo provedeno stejným způsobem jako u dluhopisu šestiletého, pouze se změnami příslušných vstupních hodnot. U jedenáctiletého dluhopisu byl za spojitou úrokovou míru dosazen průměrný výnos jedenáctiletého dluhopisu, který podle tab. 6 činí 2,033%.

V případě určení durace úvěru, lze vztah modifikovat, neboť odpadají členy vyjadřující peněžní toky prostřednictvím kuponových plateb jak tomu bylo u dluhopisů. Jelikož úvěr bude jednorázově splacen, tak nemusíme brát v úvahu ani jednotlivé roční úroky. Ve vztahu tedy zbude pouze první a poslední člen, kde  $NH$  představuje současná výše úvěru v Kč a  $PV$  je nominální hodnota úvěru diskontovaná pomocí úrokové sazby úvěrů z období 02/2018. V tab. 7 jsou poté uvedeny zjištěné durace u obou typů dluhopisů a u úvěru.

**Tabulka 7:** Durace jednotlivých finančních instrumentů

Finanční instrument	Hodnota FW durace [roky]
6letý dluhopis	5,568
11letý dluhopis	9,652
7letý úvěr	6,969

*Zdroj: vlastní zpracování*

Ze stanovených hodnot durací byly stanoveny relativní podíly dluhopisů v portfoliu, za splnění podmínky rovnosti durace takto sestaveného portfolia s durací úvěru. Tím bude provedena imunizace portfolia proti paralelnímu posunu úrokových měr.

$$w_6 \cdot D_6 + w_{11} \cdot D_{11} = D_{úvěr} \quad (4.1)$$

Dosazením hodnot durací do vztahu (4.1) byl zjištěn relativní podíl šestiletého dluhopisu 65,7%, což v absolutním množství odpovídá 247 kusům těchto dluhopisů. Relativní podíl

jedenáctiletých dluhopisů je poté tedy 34,3% a to odpovídá 125 kusům těchto cenných papírů. K jednotlivým počtům kusů lze dospět podělením relativního podílu daného dluhopisu z diskontované částky úvěru, tržní cenou daného dluhopisu. Tržní cenu představuje průměrnou cenou dluhopisu z tab. 6.

#### 4.2.2 Testování dluhopisového portfolia na pohyb úrokových měr

Sestavené dluhopisové portfolio bude otestováno na pohyb tržní úrokové míry. V následující části práci bude testována imunita portfolia proti paralelnímu posunu úrokových měr nahoru i dolů. Konkrétně budou posuny  $\delta$  činit +1, -1, +2, -2, +3, a -3 procentních bodů. Výpočty FW durací a sestavení portfolia bude analogické jako v části 4.2.1, ale vždy s příslušnou spojitou úrokovou mírou sníženou či zvýšenou o příslušné  $\delta$ .

Hodnoty FW durací a výsledky imunizací pro jednotlivé posuny úrokových měr jsou uvedeny v tab. 8. Z této tabulky je patrný vliv úrokové míry na hodnotu durací jednotlivých finančních instrumentů i na relativní zastoupení jednotlivých dluhopisů v příslušném portfoliu. S rostoucí úrokovou mírou se snižují hodnoty FW durací, tedy se zkracuje doba za kterou se získat zpět investovaný kapitál. Současně se zvyšuje relativní zastoupení jedenáctiletého dluhopisu v portfoliu na úkor poklesu relativního zastoupení šestiletého dluhopisu. V případě poklesu úrokových měr je situace opačná a doba za kterou se vrátí zpět investovaný kapitál se prodlužuje. V tomto případě se naopak zvyšuje podíl šestiletého dluhopisu v portfoliu a klesá podíl jedenáctiletého dluhopisu.

**Tabulka 8:** Výsledky imunizace dluhopisového portfolia

Posun úrokové míry $\delta$ [%]	Rel. podíl dluhopisu 6 [%]	Rel. podíl dluhopisu 11 [%]	$D_6$ [roky]	$D_{11}$ [roky]	$D_{dluhopis}$ [roky]
-3	75,3	24,7	7,049	13,324	8,598
-2	73,8	26,2	6,644	11,885	8,017
-1	67,4	32,6	5,908	10,720	7,475
0	65,7	34,3	5,249	9,652	6,969
1	64,0	36,0	5,249	8,720	6,498
2	61,5	38,5	4,947	7,837	6,059
3	58,8	41,1	4,664	7,058	5,649

*Zdroj: vlastní zpracování*

Z tab. 8 je patrné, že při posunu úrokové míry o 3% body nahoru či dolů je změna zastoupení dluhopisů v portfoliu do 10 % bodů. Lze tedy konstatovat, že zvolené dluhopisové portfolio je chráněné při pohybu úrokové míry v intervalu od -3% bodů do +3% bodů. Větší pohyby úrokových měr nebyly testovány, neboť jsou v praxi nereálné.

## ZÁVĚR

Cílem bakalářské práce bylo shrnout základní poznatky týkající se obyčejných diferenciálních rovnic a zjištěné poznatky následně uplatnit při zkoumání a popisu ekonomických jevů.

Základům obyčejných diferenciálních rovnic je pozornost věnována v první části práce. Je zde uvedena stručná historie diferenciálních rovnic, která sahá na přelom 16. a 17. století. Následně jsou zde uvedeny jednotlivé typy řešení těchto rovnic včetně geometrické interpretace těchto řešení.

Na první část navazuje druhá, ve které jsou uvedeny významné typy obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu. Je zde popsán způsob řešení diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, lineární diferenciální rovnice 1. řádu metodou integračního faktoru a autonomní rovnice. Jsou zde i uvedeny teoretické základy ekonomických problémů, které byly poté řešeny v praktické části práce pomocí obyčejných diferenciálních rovnic. Je zde uveden teoretický rámec Solowova modelu ekonomického růstu včetně jeho předpokladů, za kterých je použitelný. Druhý ekonomický problém, kterému byla věnována pozornost v této části práce se dotýkal problematiky dluhopisů. Byly zde vysvětleny základní pojmy z oblasti dluhopisů, jejich členění podle různých hledisek a také vysvětlena podstata výnosové křivky dluhopisů. V souvislosti s dluhopisy byla v základních bodech představena tzv. Fisher-Weilova durace sloužící k sestavení dluhopisového portfolia imunního proti pohybům úrokové míry. Tento typ durace využívá cenu dluhopisu určenou pomocí spojitého úročení.

Ve třetí části jsou uvedeny způsoby řešení homogenní i nehomogenní lineární rovnice 2. řádu s konst. koeficienty. Je zde uveden teoretický základ popisu stability a konvergence řešení nehomogenní lineární rovnice 2. řádu s konst. koeficienty.

Poslední část práce se věnuje aplikaci obyčejných diferenciálních rovnic při řešení dvou ekonomických problémů. První ekonomický problém se týká využití Solowova modelu k popisu časového vývoje makroekonomických ukazatelů České republiky z období let 2005 až 2016. Využitelnost modelu k prognóze vývoje těchto ukazatelů byla prokázána na hodnotě HDP v roce 2017, kdy modelová hodnota vykazovala dobrou shodu s reálnou hodnotou. Druhou aplikaci, již z oblasti podnikové ekonomiky představovala sestavení dluhopisového portfolia, které bylo následně otestováno a byla prokázána imunita proti pohybu úrokové míry do 3% bodů. ODR mají tedy využití při popisu a řešení ekonomických problémů.

## POUŽITÁ LITERATURA

- [1] BARNETT, A. R., ZIEGLER M. R. *Applied Mathematics for Business, Economics, Life Sciences, and Social Sciences*. 6th ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 1075 s. ISBN 0-13-574575-6.
- [2] BRZEZINA, M., VESELÝ, J. *Obyčejné (lineární) diferenciální rovnice a jejich systémy* [online]. Liberec: Technická univerzita, 2012. 146 s. [cit. 2017-11-11]. Dostupné z: [https://www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/Brz\\_ves/difrov.pdf](https://www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/Brz_ves/difrov.pdf).
- [3] DOBIÁŠEK, J. *Lineární diferenciální rovnice 2. řádu a jejich užití v ekonomii* [online]. Brno. 2008. 32 s. [cit. 2017-12-03]. Dostupné z: [https://is.muni.cz/th/150997/prif\\_b/Bakalarska\\_prace.pdf](https://is.muni.cz/th/150997/prif_b/Bakalarska_prace.pdf). Bakalářská práce. Masarykova Univerzita v Brně. Vedoucí práce doc. RNDr. Bedřich Půža, CSc.
- [4] DVOŘÁKOVÁ, J. *Diferenciální rovnice v ekonomii* [online]. Brno. 2013. 68 s. [cit. 2017-11-02]. Dostupné z: [https://is.muni.cz/th/324449/prif\\_m/diplomova\\_prace.pdf](https://is.muni.cz/th/324449/prif_m/diplomova_prace.pdf). Diplomová práce. Masarykova univerzita. Vedoucí práce Mgr. Petr Zemánek, Ph.D.
- [5] DUBNOVÁ, J. *Nelineární diferenciální rovnice 1. řádu a jejich užití v ekonomii* [online]. Brno. 2007. 33 s. [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/th/iabno/bakalarka.pdf>. Bakalářská práce. Masarykova univerzita Brno. Vedoucí práce doc. RNDr. Josef Kalas, CSc.
- [6] HADÁČKOVÁ, L. *Modelování dynamických procesů v ekonomii s využitím programu Derive5* [online]. Milevsko. 2007. 65 s. [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: <https://vsqp.vse.cz/eid/3650>. Bakalářská práce. Vysoká škola ekonomická v Praze. Vedoucí práce RNDr. Jitka Bartošová.
- [7] HOFMANOVÁ, M. *Dynamické modely v ekonomii* [online]. Hradec Králové. 2015. 46 s. [cit. 2018-02-24]. Dostupné z: <https://theses.cz/id/vet4xj/STAG74201.pdf>. Bakalářská práce. Univerzita Hradec Králové. Vedoucí práce Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D.

- [8] HOY, M., et al. *Mathematics for Economics*. 3rd ed. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2011. 959 s. ISBN 978-0-262-51622-8.
- [9] JAKUBEK, M. *Komparace investování do akcií a dluhopisů* [online]. Brno. 2009. 51 s. [cit. 2018-04-01]. Dostupné z: [https://is.muni.cz/th/207001/esf\\_b/](https://is.muni.cz/th/207001/esf_b/). Bakalářská práce. Masarykova univerzita Brno. Vedoucí práce ing. Gabriela Oškrdalová.
- [10] KALAS, J., RÁB, M. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno: Masarykova Univerzita, 2001. 212 s. ISBN 80-210-2589-1.
- [11] KOZELKOVÁ, L. *IS-LM ekonomický model* [online]. Olomouc. 2010. 39 s. [cit. 2017-12-02]. Dostupné z: <https://theses.cz/id/m4japf/73221-828019377.pdf>. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci. Vedoucí práce prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.
- [12] MANKIWI, G.,N. *Zásady ekonomie*. Praha: Grada Publishing, 2000. 768 s. ISBN 978-80-7169-891-3.
- [13] MAŇÁKOVÁ, D. *Lineární diferenciální rovnice 1. řádu v ekonomii* [online]. Brno. 2007. 29 s. [cit. 2017-11-01]. Dostupné z: [https://is.muni.cz/th/150703/prif\\_b/Bakalarska\\_praca\\_-\\_Dasa\\_Manakova.pdf](https://is.muni.cz/th/150703/prif_b/Bakalarska_praca_-_Dasa_Manakova.pdf). Diplomová práce. Masarykova univerzita. Vedoucí práce doc. RNDr. Bedřich Půža, CSc.
- [14] MAŘÍK, R. *Diferenciální rovnice prvního řádu* [online]. 2014. [cit. 2017-11-11]. Dostupné z: [http://user.mendelu.cz/marik/wiki/am/slidy/odr\\_1/index\\_h.html](http://user.mendelu.cz/marik/wiki/am/slidy/odr_1/index_h.html).
- [15] *Matematika II- Lineární diferenciální rovnice 2. řádu* [online]. [cit. 2017-12-11]. Dostupné z: [http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola\\_9\\_1.pdf](http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_9_1.pdf).
- [16] MOUČKA, J., RÁDL, P. *Matematika pro studenty ekonomie*. Praha: Grada, 2015. 272 s. ISBN 978-80-247-5406-2.
- [17] PRAŽÁK, P. *Diferenciální rovnice a jejich použití v ekonomii* [online]. Praha. 2006. 178s.[cit. 2018-04-08]. Dostupné z:<https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/140001795>. Disertační práce. Univerzita Karlova. Vedoucí práce doc. RNDr. Jana Stará, CSc.



- [18] RÁB, M. *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. Brno: Masarykova Univerzita, 2012. 102 s. ISBN 978-80-210-5816-3.
- [19] SVOBODOVÁ, M. *Durace a její využití při imunizaci dluhopisového portfolia* [online]. Olomouc. 2010. 53 s. [cit. 2018-04-01]. Dostupné z: [https://theses.cz/id/kejgch/Bakalarska\\_prace.pdf](https://theses.cz/id/kejgch/Bakalarska_prace.pdf) Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci. Vedoucí práce Mgr. Eva Bohanesová, Ph.D.
- [20] ŠTUDENTOVÁ, D. *Vybrané metody odhadu výnosových křivek a jejich aplikace na reálná data* [online]. Plzeň. 2014. 89 s. [cit. 2018-04-02]. Dostupné z: <https://dspace5.zcu.cz/handle/11025/14663>. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni. Vedoucí práce prof. RNDr. Blanka Šedivá, Ph.D.
- [21] TERENBAUM, M., POLLARD, H. *Ordinary Differential Equations: An Elementary Textbook for Students of Mathematics, Engineering, and the Sciences*. Dover Publications, 1985. ISBN 978-0486649405.

## SEZNAM PŘÍLOH

Příloha A **Tabulka reálných hodnot  $Y$ ,  $L$ ,  $K$  a  $A$  včetně pomocných výpočtů poměrů růstu a přirozených logaritmů**

## Příloha A

**Tabulka reálných hodnot  $Y$ ,  $L$ ,  $K$  a  $A$  včetně pomocných výpočtů poměrů růstu a přirozených logaritmů**

Rok	$Y_{\text{real.}}$ [mld. Kč]	poměr růstu $Y_{\text{real.}}$	$\ln Y_{\text{real.}}$	$L_{\text{real.}}$ [tis.]	poměr růstu $L_{\text{real.}}$	$\ln L_{\text{real.}}$	$K_{\text{real.}}$ [mld. Kč]	poměr růstu $K_{\text{real.}}$	$\ln K_{\text{real.}}$	$A_{\text{real.}}$	poměr růstu $A_{\text{real.}}$	$\ln A_{\text{real.}}$
2005	3264,9		7,603	5174,2		8,551	921,84		6,826	3,5417		1,921
2006	3512,8	1,0759	7,604	5199,4	1,0049	8,556	983,05	1,0664	6,891	3,5734	1,0089	1,930
2007	3840,1	1,0932	7,604	5198,3	0,9998	8,556	1132,3	1,1518	7,032	3,3914	0,9491	1,950
2008	4024,1	1,0479	7,605	5232,3	1,0065	8,563	1165,2	1,0291	7,061	3,4536	1,0183	1,955
2009	3930,4	0,9767	7,605	5286,5	1,0104	8,573	1063,29	0,9125	6,969	3,6965	1,0703	1,941
2010	3962,5	1,0082	7,606	5268,9	0,9967	8,570	1066,19	1,0027	6,972	3,7165	1,0054	1,942
2011	4033,8	1,0180	7,606	5223,0	0,9913	8,561	1067,01	1,0008	6,973	3,7805	1,0172	1,942
2012	4059,9	1,0065	7,607	5256,9	1,0065	8,567	1051,94	0,9859	6,958	3,8594	1,0209	1,940
2013	4098,1	1,0094	7,607	5306,0	1,0093	8,577	1027,09	0,9764	6,934	3,9900	1,0338	1,937
2014	4313,8	1,0526	7,608	5297,9	0,9985	8,575	1084,08	1,0555	6,988	3,9792	0,9973	1,944
2015	4595,8	1,0654	7,608	5309,9	1,0023	8,577	1216,31	1,1220	7,104	3,7785	0,9496	1,961
2016	4773,2	1,0386	7,609	5350,0	1,0076	8,585	1191,54	0,9796	7,083	4,0059	1,0602	1,958

Zdroj dat: ČSÚ (<https://www.czso.cz/>)