

## Počet výjezdů IZS Number of EMS operations

Jaroslav Marek, Jitka Slováková, Jan Hanousek

**Abstract:** The article is devoted to analysis of Emergency medical services operations. With the help of statistical methods a study has been carried out to analyse number of EMS operations in the Olomouc region, Czech Republic during the year 2009. The article is tried to find estimates of density function on different days. It is also well known, that the capacity of EMS powers influence to the arrival time of emergency medical services. This shows the importance of knowing the number of operation distribution. The statistical model is composed of a finite mixture of circular von Mises distributions. Parameters of the model are estimated using the EM algorithm. The results show that the model composed of a finite mixture of von Mises distribution corresponds to the input data with high significance level.

**Abstrakt:** Článek je věnován analýze počtu výjezdů zdravotnické záchranné služby (ZZS). Pomocí statistických metod jsou analyzována data z Olomouckého kraje za rok 2009. V článku se snažíme najít odhad hustoty náhodné veličiny počtu výjezdů ZZS v různých dnech. Je dobře známé, že kapacita ZZS ovlivňuje dobu dojezdu. Proto má znalost distribuce počtu zásahů ZZS velký význam. Statistický model využívá směs von Misesových distribucí. Neznámé parametry jsou odhadovány pomocí EM algoritmu. Výsledky prokážou možnost modelovat data směsí von Misesových distribucí.

**Key words:** EMS in the Czech Republic, number of EMS operations, von Mises distribution.

**Klíčové slová:** ZZS v České republice, počet výjezdů ZZS, von Misesovo rozdělení.

**JEL classification:** I10, C00, C8

### 1. Úvod

V tomto článku budeme hledat odhad hustoty náhodné veličiny popisující počet výjezdů složek IZS v Olomouckém kraji v r. 2009. Odhad hustoty bude založen na výpočtu parametrů směsi von Misesových rozdělení pomocí EM algoritmu.

### 2. Směs von Misesových distribucí

Hustota von Misesovy distribuce (vM-pdf) je dána vztahem

$$vM(\theta|\theta_0, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (1)$$

kde  $\kappa \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  a  $I_0(\kappa)$  je modifikovaná Besselova funkce nultého řádu daná vztahem

$$I_0(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{\kappa \cos(\theta)} d\theta = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i!)^2} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2i}. \quad (2)$$

Derivováním  $I_0(\kappa)$  podle  $\theta$  získáme Besselovu funkci prvního řádu  $I_1(\kappa)$ .

$$I_1(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \cos \theta e^{\kappa \cos \theta} d\theta = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(i+2)\Gamma(i+1)} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2i+1}. \quad (3)$$

Směs  $K$  von Misesových distribucí s váhami  $0 \leq w_k \leq 1$ ,  $\sum_{k=1}^K w_k = 1$  má hustotu

$$p(\theta|\theta_0, \kappa) = \sum_{k=1}^K w_k v(\theta|\theta_{0,k}, \kappa_k). \quad (4)$$

### 3. EM algoritmus

Maximálně věrohodný odhad neznámých parametrů v modelu (4) nevede k analyticky řešitelné soustavě nelineárních rovnic a řešení je třeba hledat numericky. Nejčastěji se používá EM algoritmus:

- 1) Pro náhodnou veličinu  $x$  definovanou na kruhu a náhodný výběr  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$  odhadneme vhodný počet směrů  $K \geq 2$ .
- 2) Rozdělíme data do  $K$  sektorů  $(0, 2\pi/K), (2\pi/K, 3\pi/K), \dots, ((2K-1)\pi/K, 2\pi)$ .
- 3) Vykreslíme histogram pro  $t$  tříd s četnostmi  $X_i, i=1, \dots, t$ .
- 4) Odhadneme počáteční parametry  $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{w})$  v každém z  $K$  sektorů:
  - a) Počáteční váhy odhadneme vztahem

$$\omega_k = 1/n \sum_{i=L_k}^{U_k} X_i, \quad (5)$$

kde  $L_k$  a  $U_k$  představují dolní a horní index  $k$ -tého sektoru,  $K$  je celkový počet sektorů (směrů),  $X_i$  je počet pozorování v dané třídě.

- b) Směr  $\theta_j$  pro každý sektor odhadneme vztahem

$$\theta_j = \begin{cases} \arctan\left(\frac{s_j}{c_j}\right); & s_j \geq 0, c_j > 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{s_j}{c_j}\right); & s_j < 0, c_j > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{s_j}{c_j}\right); & c_j < 0 \\ \pi; & s_j = 0, c_j = -1 \\ \frac{\pi}{2}; & s_j > 0, c_j = 0 \\ \frac{3\pi}{2}; & s_j < 0, c_j = 0 \end{cases} \quad (6)$$

kde  $s_j$  a  $c_j$  reprezentují průměrnou hodnotu sinu a kosinu všech dat sektoru

$$s_j = \frac{\sum_{i=1}^t n_i \sin(\theta_i)}{\sum_{i=1}^t n_i}, \quad c_j = \frac{\sum_{i=1}^t n_i \cos(\theta_i)}{\sum_{i=1}^t n_i}, \quad (7)$$

$t$  je počet sektorů a  $n_i$  je počet pozorování v dané třídě.

- c) Koncentraci v každém sektoru můžeme určit iteračně vyřešením rovnice

$$\frac{I_1(\kappa_k)}{I_0(\kappa_k)} = [s_j^2 + c_j^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

- 5) Určíme podmíněné pravděpodobnosti, tzv. responsibilities

$$Y_{ik} = w_k v(\theta_i | \theta_{0,k}, \kappa_k) / \sum_{j=1}^K w_j v(\theta_i | \theta_{0,j}, \kappa_j). \quad (9)$$

- 6) Maximalizací logaritmicke věrohodnostní funkce dostáváme

$$w_k = 1/n_j \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ik}, \quad (10)$$

$$\theta_{0,k} = \arctg \left( \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ik} \sin \theta_i / \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ik} \cos \theta_i \right), \quad (11)$$

- 7) Nové odhady koncentrací  $\kappa_k$  získáme z rovnice

$$A(\kappa_k) = \frac{I_1(\kappa_k)}{I_0(\kappa_k)} = [s_j^2 + c_j^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

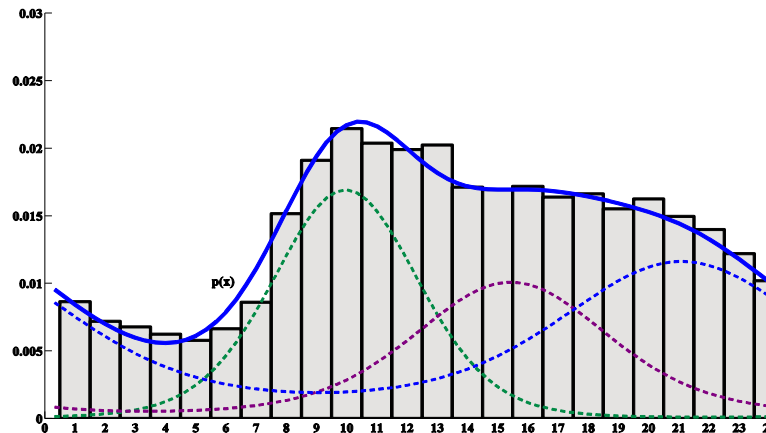
Poznámka: Hypotézu o shodě dat s odhadnutou směsí von Misesových distribucí můžeme testovat pomocí Pearsonovy statistiky

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(x_i - n \times p_i)^2}{n \times p_i} \sim \chi_p^2. \quad (13)$$

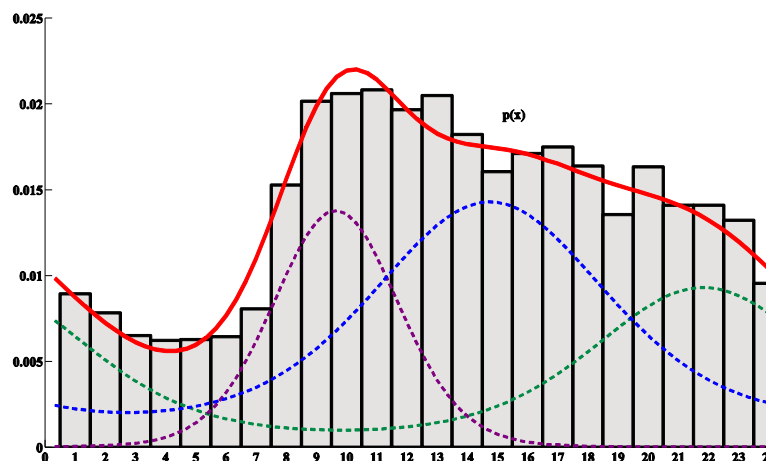
#### 4. Výsledky

Následující obrázky prezentující odhady hustoty počtu výjezdů pro různé dny v týdnu určené pomocí EM algoritmu pro Olomoucký kraj a rok 2009. Zpracovávaný datový soubor obsahoval celkem 45037 výjezdů. V sedmi kalendářních dnech (pondělí až neděle) bylo uskutečněno 6003, 5769, 5962, 5885, 7322, 7504 a 6592 výjezdů. Na vodorovné ose jsou třídy dané časy výjezdů (v hodinách) a na svislé ose je znázorněna četnost výjezdů v těchto třídách. Spojité křivky znázorňují odhad hustoty, resp. její tři složky.

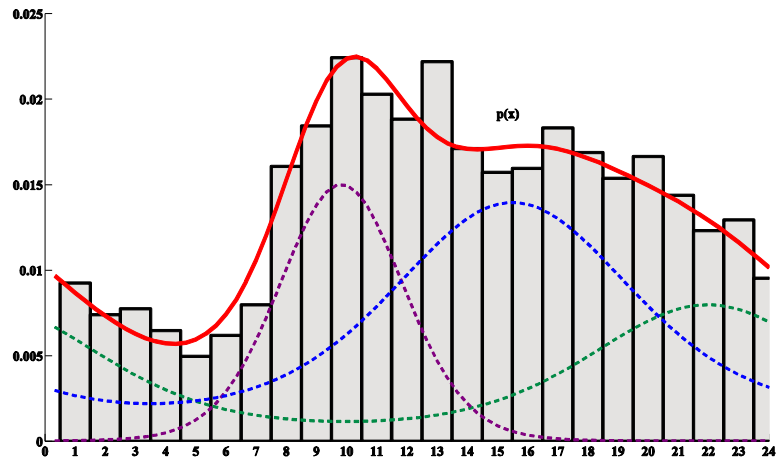
Odhadnuté parametry směsi tří von Misesových distribucí jsou uvedeny v tabulce 1.



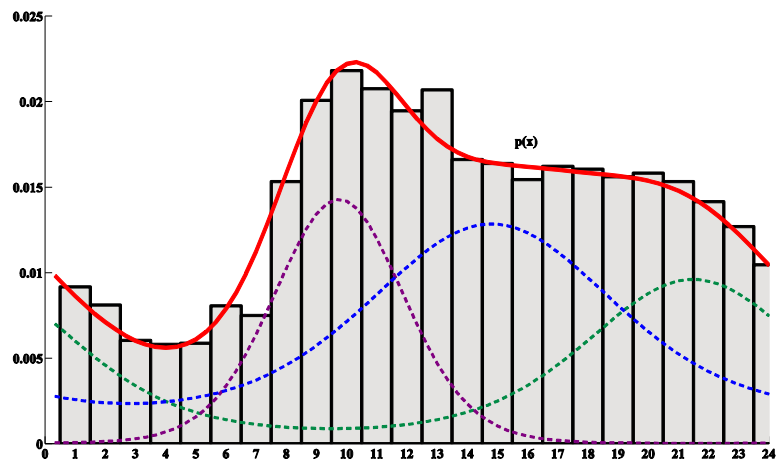
*Obr. 1: Aproximace hustoty počtu výjezdů v r. 2009: všechny dny*



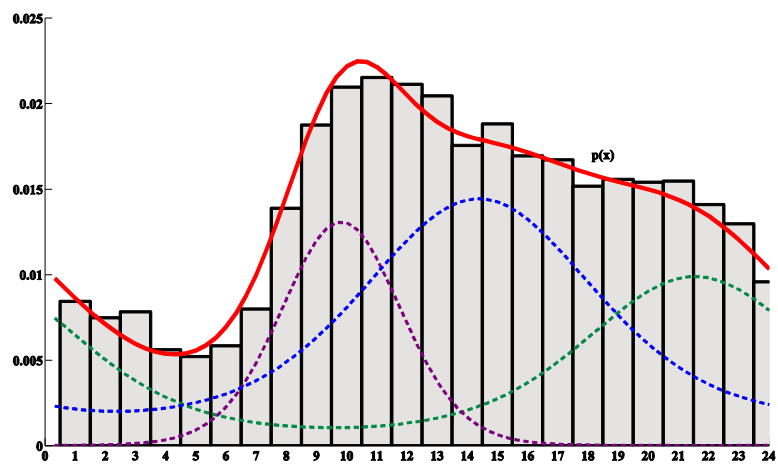
*Obr. 2: Aproximace hustoty počtu výjezdů v r. 2009: pondělí*



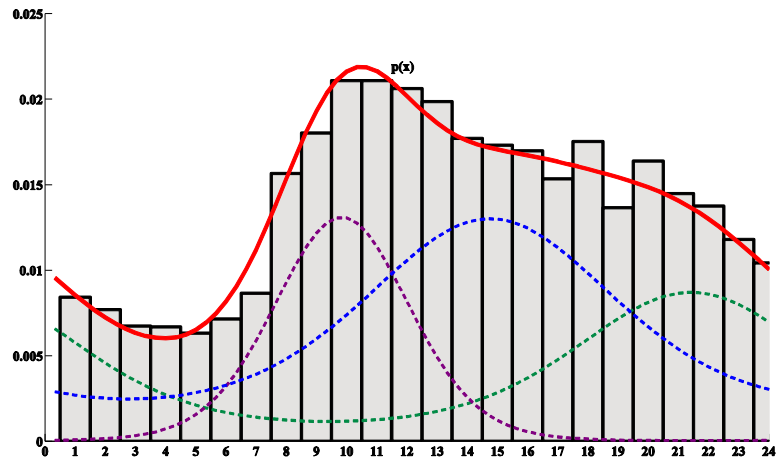
*Obr. 3: Aproximace hustoty počtu výjezdů v r. 2009: úterý*



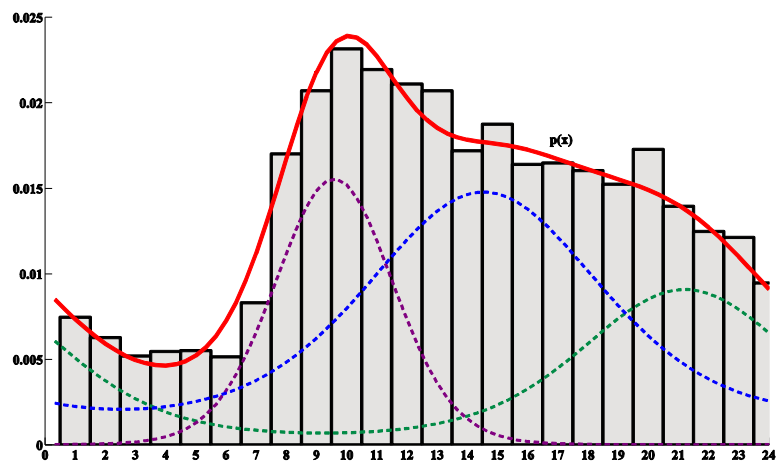
*Obr. 4: Aproximace hustoty počtu výjezdů v r. 2009: středa*



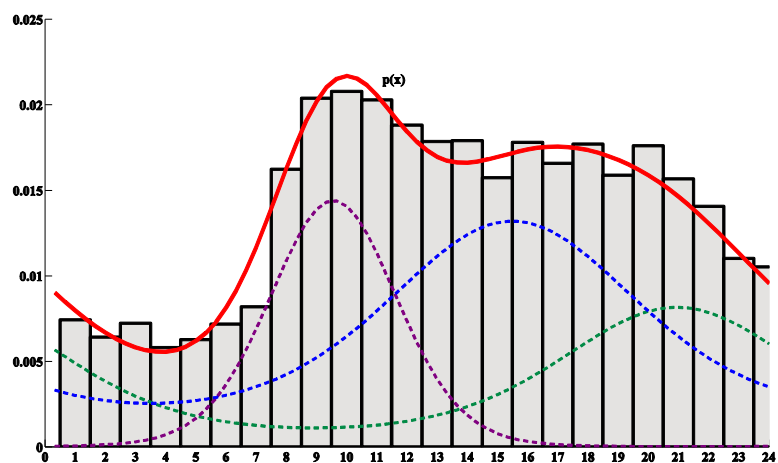
*Obr. 5: Aproximace hustoty počtu výjezdů v r. 2009: čtvrtek*



*Obr. 6: Aproximace hustoty počtu výjezdů v r. 2009: pátek*



*Obr. 7: Aproximace hustoty počtu výjezdů v r. 2009: sobota*



*Obr. 8: Aproximace hustoty počtu výjezdů v r. 2009: neděle*

**Tab. 1: Odhadnuté parametry**

$\theta$	1	2	3
všechny dny	9 h 33 min	14 h 39 min	21 h 15 min
pondělí	9 h 29 min	14 h 35 min	21 h 39 min
úterý	9 h 33 min	14 h 40 min	21 h 20 min
středa	9 h 36 min	14 h 32 min	21 h 43 min
čtvrtek	9 h 41 min	14 h 24 min	21 h 30 min
pátek	9 h 41 min	14 h 33 min	21 h 39 min
sobota	9 h 24 min	14 h 09 min	21 h 53 min
neděle	9 h 22 min	14 h 22 min	21 h 58 min

$\kappa$	1	2	3
všechny dny	3,515	0,89	1,087
pondělí	3,488	0,978	1,12
úterý	3,57	0,924	0,968
středa	3,298	0,825	1,174
čtvrtek	3,693	0,989	1,145
pátek	3,05	0,819	1,002
sobota	4,101	0,962	1,272
neděle	3,37	0,866	1,018

$w$	1	2	3
všechny dny	0,225	0,489	0,286
pondělí	0,222	0,485	0,293
úterý	0,238	0,489	0,273
středa	0,234	0,471	0,295
čtvrtek	0,21	0,488	0,302
pátek	0,226	0,482	0,292
sobota	0,221	0,507	0,272
neděle	0,24	0,488	0,272

## 5. Závěr

Získané odhady hustot potvrzují odlišnosti v počtu výjezdů v různých kalendářních dnech, které souvisí s pracovní dobou všech obyvatel a praktických lékařů. Největší odchylky od průměrného dne můžeme při prozkoumávání odhadnutých parametrů vidět v pátek, v sobotu a v neděli.

## Literatúra

FISHER, N. I. 1993. *Statistical Analysis of Circular Data*. Cambridge: Cambridge University Press.

JAMMALAMADAKA, S.R. – SENGUPTA, A. 2001. *Topics in Circular Statistics*. Singapore – New Jersey – London – Hong Kong: World Scientific.

CALDERARA, S. – PRATI, A. – CUCCHIARA, R. 2011. Mixtures of von mises distributions for people trajectory shape analysis. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, roč. 21, č. 4, s. 457–471.

Adresa autora (-ov):

Jaroslav Marek, Mgr. Ph.D.  
Univerzita Pardubice  
Studentská 95, 538 10 Pardubice  
jaroslav.marek@upce.cz

Jitka Slováková, Ing. Ph.D.  
Univerzita Obrany  
Kounicova 65, 662 10 Brno  
jitka.slovakova@centrum.cz

Jan Hanousek, Ing.  
Univerzita Pardubice  
Studentská 95, 538 10 Pardubice  
st28518@student.upce.cz