Univerzita Pardubice
Fakulta chemicko-technologická

Sbírka řešených příkladů z gravitace, elektřiny a magnetismu

RNDr. Petr Janíček, Ph.D.
Mgr. Jana Kašparová, Ph.D.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Pardubice
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pardubice 2014

Univerzita Pardubice
Fakulta chemicko-technologická

Sbírka řešených příkladů z gravitace, elektřiny a magnetismu

RNDr. Petr Janíček, Ph.D.
Mgr. Jana Kašparová, Ph.D.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Pardubice

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento materiál je spolufinancovaný z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/2.2.00/28.0272.

ISBN 978-80-7395-832-9

Rukopis lektorovali: Prof. RNDr. Zdeněk Cimpl, CSc., RNDr. Jan Zajíc, CSc.

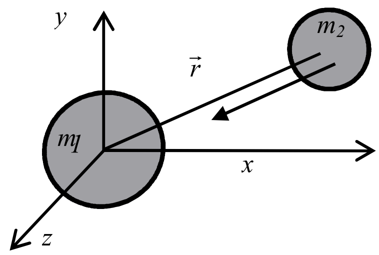
Obsah

I. Gravitační pole

V okolí každého hmotného tělesa existuje gravitační pole, které se projevuje silovým působením na jiná hmotná tělesa. Síla, jejímž prostřednictvím na sebe hmotné body působí, aniž by byly v přímém vzájemném kontaktu, se nazývá gravitační síla.

Gravitační síla je vždy přitažlivá.

Newtonův gravitační zákon charakterizuje gravitační silové působení mezi dvěma hmotnými body. Každé dva hmotné body na sebe působí ve směru jejich spojnice přitažlivými s*ilami* akce a reakce. Velikost tohoto působení je přímo úměrná jejich hmotnostem a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti:



$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0$$

kde m_1, m_2 jsou hmotnosti těles, r jejich vzájemná vzdálenost a κ gravitační konstanta, $\vec{r_0}$ je jednotkový vektor.
V uvedeném tvaru lze Newtonův gravitační zákon použít pouze pro hmotné body nebo tělesa tvaru koule, která mají navíc středově symetricky rozloženou hmotnost, resp. hustotu.

Vydělíme-li gravitační sílu testovací hmotností m_2, získáme *intenzitu* gravitačního pole, která nezávisí na hmotnosti tohoto tělesa, a je tedy jednoznačnou vlastností pole:

$$\vec{E}_g(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_g(\vec{r})}{m_2} = -\kappa \frac{m_1}{r^2} \vec{r}_0$$

Současně gravitační síla uděluje tělesu o hmotnosti m_2, které do pole vložíme, gravitační *zrychlení*:

$$\vec{a}_g = \frac{\vec{F}g(\vec{r})}{m_2} = -\kappa \frac{m}{r^2} \vec{r}_0$$

Práce, kterou musíme vykonat při přemístění tělesa o hmotnosti m z bodu A do bodu B v gravitačním poli jiného tělesa hmotnosti *M:*

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = m \int_A^B \frac{\kappa M}{r^2} dr = -\kappa m M \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = \Delta E_P$$

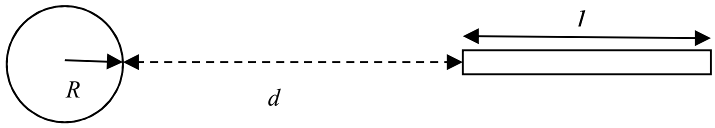
Potenciální *energie* v gravitačním poli: $E_p = -\kappa \frac{m.M}{r}$

- v blízkosti povrchu Země: $E_p = m.g.h$

Konstanty: gravitační konstanta $\kappa = 6{,}67.10^{-11} \mathrm{N.m^2kg^{-2}}$
hmotnost Země $M_Z = 5{,}97.10^{24}$ kg
poloměr Země $R_Z = 6378$ km

1. Jak velkou gravitační silou se přitahuje koule (o hmotnosti 4 kg a poloměru 1 m) a tyč (délka 5 m, hmotnost 5 kg), jsou-li vzdáleny 1000 metrů od sebe (měřeno od krajů těles)? Tyč je umístěna vzhledem ke kouli dle obrázku.

$m_1 = 4$ kg
$R = 1$ m
$m_2 = 5$ kg
$l = 5$ m
$d = 1000$ m
$F_g = ?$



Na výpočet gravitační síly působící mezi tělesy použijeme Newtonův gravitační zákon:

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

kde m_1, m_2 jsou hmotnosti těles, r jejich vzájemná vzdálenost a κ gravitační konstanta.
V tomto tvaru lze Newtonův gravitační zákon použít pouze pro hmotné body nebo tělesa tvaru koule.
Vzhledem k tomu, že vzájemná vzdálenost d je mnohem větší než rozměry těles, lze tato tělesa považovat za hmotné body a na výpočet gravitační síly tento zákon použít.

Jmenovatel v Newtonově gravitačním zákoně představuje vzdálenost od středu jednoho tělesa, resp. hmotného bodu ke středu druhého tělesa, resp. hmotného bodu:

Vzájemná vzdálenost středů těles: $z = R + d + l/2$
Po dosazení: $z = 1 + 1000 + 5/2 = 1003{,}5$ m

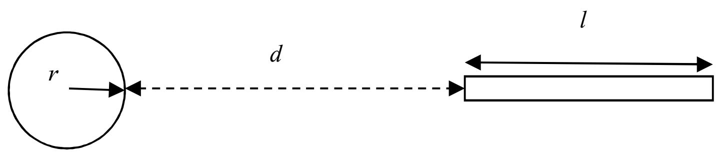
Velikost gravitační síly působící mezi koulí a tyčí:

$$F_g = 6{,}67.\,10^{-11}.\frac{4.5}{1003{,}5^2} = 1{,}32.\,10^{-15}\ \mathrm{N}$$

Odpověď: Koule a tyč, které jsou vzdáleny 1000 metrů od sebe, se přitahují gravitační silou o velikosti 1,32. 10^{-15} N.

2. Jak velkou gravitační silou se bude přitahovat koule (o hmotnosti 4 kg a poloměru 1 m) a tyč (délka 5 m, hmotnost 5 kg) z předešlého příkladu, jsou-li vzdáleny 1 metr od sebe (měřeno od krajů těles)? Tyč je umístěna vzhledem ke kouli dle obrázku.

$m_1 = 4$ kg
$r = 1$ m
$m_2 = 5$ kg
$l = 5$ m
$d = 1$ m
$F_g = ?$

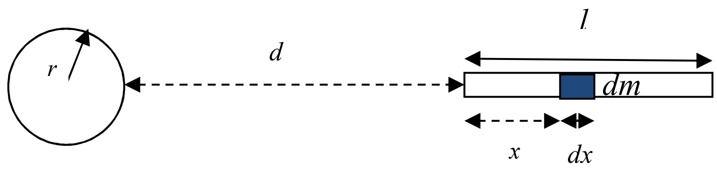


Na výpočet gravitační síly působící mezi tělesy použijeme opět Newtonův gravitační zákon:

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Vzhledem k tomu, že rozměry těles jsou srovnatelné s jejich vzájemnou vzdáleností d, nelze tato tělesa považovat za hmotné body, resp. koule a Newtonův gravitační zákon v tomto tvaru nelze použít.
Možností, jak spočítat gravitační sílu pomocí tohoto zákona, je rozdělit tyč na nekonečně velký počet malých elementů – hmotných bodů a spočítat zvlášť sílu mezi koulí a každým hmotným bodem. Výsledná síla působící mezi koulí a celou tyčí pak bude dána součtem těchto sil.

Rozdělíme tyč na hmotné body: každý element má hmotnost dm, výšku dx a nachází se ve vzdálenosti x od kraje tyče ($x \in$ <0, l>).



Velikost gravitační síly působící mezi koulí o hmotnosti m_1 a elementem tyče o hmotnosti dm bude:

$$dF_g = \kappa \frac{m_1 dm}{z^2}$$

kde z je vzdálenost elementu tyče o hmotnosti dm od středu koule:

$$z = r + d + x$$

Hmotnost elementu tyče vyjádříme pomocí hmotnosti a délky celé tyče (jedná se o homogenní tyč stálého průřezu $\rho = \frac{m}{V}$):

$$\frac{dm}{m_2} = \frac{dx}{l} \Rightarrow dm = \frac{m_2}{l} dx$$

Velikost gravitační síly působící mezi koulí a celou tyčí bude dána součtem těchto elementárních sil:

$$F_g = \int dF_g = \int_0^l \kappa \frac{m_1 dm}{z^2} = \int_0^l \kappa \frac{m_1 . \frac{m_2}{l} dx}{(r+d+x)^2}$$

Gravitační sílu počítáme přes celou délku tyče (od začátku tyče k jejímu konci) ⇒ meze integrace jsou v intervalu <0*, l*>

Po úpravě dostaneme pro gravitační sílu:

$$F_g = \int_0^l \kappa \frac{m_1 . \frac{m_2}{l} dx}{(r+d+x)^2} = \kappa . \frac{m_1 . m_2}{l} \int_0^l \frac{dx}{(r+d+x)^2}$$

Integraci provedeme pomocí substituce: $a = r + d + x$
$da = dx$

Nové integrační meze budou v intervalu: < r+d; r+d+l>

$$F_g = \kappa . \frac{m_1 . m_2}{l} \int_{r+d}^{r+d+l} \frac{da}{(a)^2} = \kappa . \frac{m_1 . m_2}{l} \left[-\frac{1}{a} \right]_{r+d}^{r+d+l}$$

$$F_g = \kappa . \frac{m_1 . m_2}{l} . \left(-\frac{1}{r+d+l} - \left(-\frac{1}{r+d} \right) \right)$$

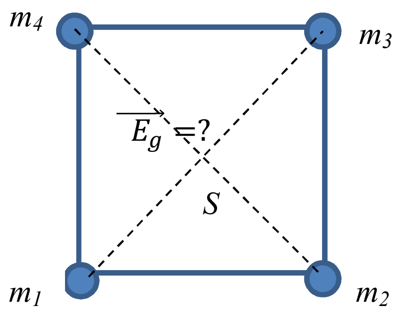
Po dosazení:

$$F_g = 6{,}67 . 10^{-11} . \frac{4.5}{5} . \left(-\frac{1}{1+1+5} + \frac{1}{1+1} \right) = 9{,}53 . 10^{-11} \mathrm{N}$$

Odpověď: Koule a tyč, které jsou vzdáleny 1 metr od sebe, se přitahují gravitační silou o velikosti $9{,}53 . 10^{-11}$N.

3. Ve vrcholech čtverce o délce strany 2 m jsou umístěny čtyři koule postupně o hmotnostech m_1 = 100 kg, m_2 = 40 kg, m_3 = 30 kg a m_4 = 60 kg. Vypočítejte intenzitu gravitačního pole ve středu čtverce.

$m_1 = 100$ kg
$m_2 = 40$ kg
$m_3 = 30$ kg
$m_4 = 60$ kg
$a = 2$ m
$E_g = ?$



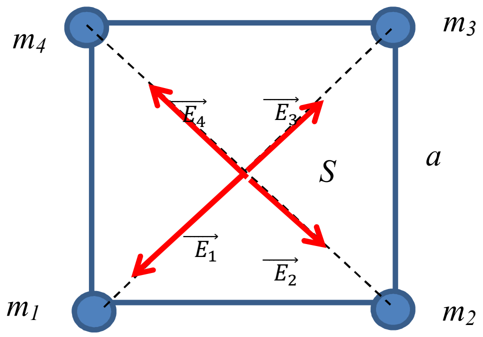
Každé hmotné těleso vytváří ve svém okolí gravitační pole, které lze popsat pomocí intenzity. Intenzita gravitačního pole je veličina vektorová ⇒ musíme určit její velikost i směr.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{12}(\vec{r})}{m^*} = -\kappa \frac{m}{r^2}\vec{r}_0$$

Směr – v každém bodě pole míří vektor intenzity vždy k tělesu, které dané pole vytváří – proto je ve vzorci pro intenzitu znaménko „minus“

Velikost - $E = \kappa \dfrac{m}{r^2}$

Počítáme intenzitu gravitačního pole ve středu čtverce S: výslednou intenzitu gravitačního pole získáme vektorovým součtem intenzit od jednotlivých hmotných bodů – viz obrázek:



Vzhledem k obrázku: spočítáme zvlášť intenzitu $\overrightarrow{E_{13}} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_3}$ na spojnici bodů o hmotnostech m_1 a m_3 a zvlášť intenzitu $\overrightarrow{E_{24}} = \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_4}$ na spojnici bodů o hmotnostech m_2 a m_4

Intenzita $\overrightarrow{E_{13}}$: jedná se o dva opačně orientované vektory, které leží v jedné přímce
Pro velikost platí: $E_{13} = |E_1 - E_3|$

$$E_{13} = \left|\frac{\kappa . m_1}{l^2} - \frac{\kappa . m_3}{l^2}\right|$$

kde l je vzdálenost hmotného bodu o hmotnosti m, které pole vytváří, a bodu S, ve kterém intenzitu počítáme.
Pro tento případ je l stejné pro všechny body (S leží v průsečíku úhlopříček daného čtverce):

$$l = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + a^2)} = \frac{a.\sqrt{2}}{2} = \frac{2.\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\ \text{m}$$

Po dosazení: $E_{13} = \left|\frac{6{,}67.10^{-11}.100}{(\sqrt{2})^2} - \frac{6{,}67.10^{-11}.30}{(\sqrt{2})^2}\right| = 2{,}3.10^{-9}\ \mathrm{N.kg^{-1}}$

Směr – vektor intenzity bude mířit ve směru vektoru $\overrightarrow{E_1}$, k bodu o hmotnosti m_1

Obdobně spočítáme intenzitu $\overrightarrow{E_{24}}$:

Pro velikost platí: $E_{24} = |E_2 - E_4|$

$$E_{24} = \left|\frac{\kappa.m_2}{l} - \frac{\kappa.m_4}{l}\right|$$

Po dosazení: $E_{24} = \left|\frac{6{,}67.10^{-11}.40}{(\sqrt{2})^2} - \frac{6{,}67.10^{-11}.60}{(\sqrt{2})^2}\right| = 6{,}67.10^{-10}\ \mathrm{N.kg^{-1}}$

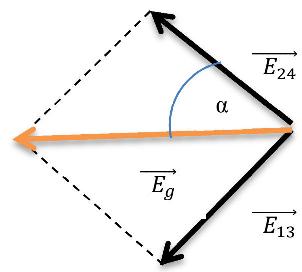
Směr – vektor intenzity bude mířit ve směru vektoru $\overrightarrow{E_4}$, k bodu o hmotnosti m_4

Výsledná intenzita gravitačního pole v bodě S: $\overrightarrow{E_g} = \overrightarrow{E_{13}} + \overrightarrow{E_{42}}$

Intenzity $\overrightarrow{E_{13}}$ a $\overrightarrow{E_{24}}$ spolu svírají pravý úhel $\Rightarrow$ velikost výsledné intenzity určíme pomocí Pythagorovy věty

$E_g = \sqrt{(E_{13}^2 + E_{24}^2)}$

Směr výsledné intenzity určíme z obrázku:



Po dosazení:

$$E_g = \sqrt{((2{,}3.10^{-9})^2} + (6{,}67.10^{-10})^2 = 2{,}39.10^{-9}\ \mathrm{N.kg^{-1}}$$

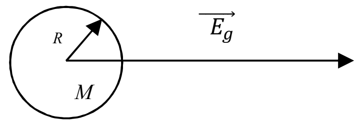
$$tg\alpha = \frac{2{,}3.10^{-9}}{6{,}67.10^{-10}} \Rightarrow \alpha = 74°$$

Odpověď: Výsledná intenzita gravitačního pole ve středu čtverce má velikost $2{,}39.10^{-9}\ \mathrm{N.kg^{-1}}$ a míří pod úhlem 74° měřeno od úhlopříčky spojující body 2 a 4.

4. Nakreslete průběh intenzity gravitačního pole homogenní koule o poloměru *R* a hmotnosti *M* v závislosti na vzdálenosti od středu koule.

---

poloměr koule R
hmotnost M
$E_g = f(r) = ?$



Intenzita gravitačního pole je vektorová veličina, která má stejný směr jako gravitační síla působící v daném bodě na hmotný bod. V daném místě pole je definována jako podíl gravitační síly, která v tomto místě působí na hmotný bod, a hmotnosti tohoto bodu:

$$\vec{E}_g = \frac{\vec{F_g}}{m}$$

Pro hmotné body nebo tělesa tvaru koule lze použít pro gravitační sílu vztah:

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0$$

Pak pro intenzitu pak platí: $\vec{E}_g = \frac{\vec{F_g}}{m} = -\kappa \frac{m}{r^2} \vec{r}_0$

kde *m* je hmotnost tělesa, které pole vytváří*, r* je vzdálenost, ve které počítáme intenzitu, měřeno od středu tělesa.

Úlohu rozdělíme na tři části:

1. Spočítáme intenzitu gravitačního pole na povrchu koule $r = R$
2. Spočítáme intenzitu gravitačního pole ve vzdálenosti $r > R$ – nad povrchem koule
3. Spočítáme intenzitu gravitačního pole ve vzdálenosti $r < R$ – pod povrchem koule

Ad1. Povrch koule

Gravitační pole vytváří celá koule o hmotnosti *M*, na povrchu je vzdálenost od středu rovna poloměru *R*.
Pak pro velikost intenzity gravitačního pole na povrchu koule: $E_{gR} = \kappa \frac{M}{R^2}$
V grafu bude tato hodnota zobrazena jedním bodem o souřadnicích $[R, E_{gR}]$.

Ad2. Nad povrchem koule

Intenzitu počítáme ve vzdálenosti $r > R$. Gravitační pole vytváří celá koule o hmotnosti *M*, vzdálenost od středu koule je *r*.
Pak pro velikost intenzity gravitačního pole ve vzdálenosti *r*: $E_g = \kappa \frac{M}{r^2}$

Intenzita gravitačního pole klesá s druhou mocninou vzdálenosti od středu koule. Z matematického hlediska se jedná o hyperbolickou závislost – grafem bude část hyperboly.

Ad3. Pod povrchem koule

Intenzitu počítáme ve vzdálenosti $r < R$. Gravitační pole vytváří pouze ta část koule, která má poloměr r ($< R$) a hmotnost $m < M$.
Pak pro velikost intenzity gravitačního pole ve vzdálenosti r: $E_g = \kappa \frac{m}{r^2}$

Musíme vypočítat hmotnost m části koule, která pole vytváří. Dle zadání se jedná o homogenní kouli, která má všude stejnou hustotu: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Stejnou hustotu má tím pádem i koule o poloměru $r < R$: $\rho = \frac{m}{V'} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$

Pak platí: $$\rho = \frac{M}{V} = \frac{m}{V'}$$

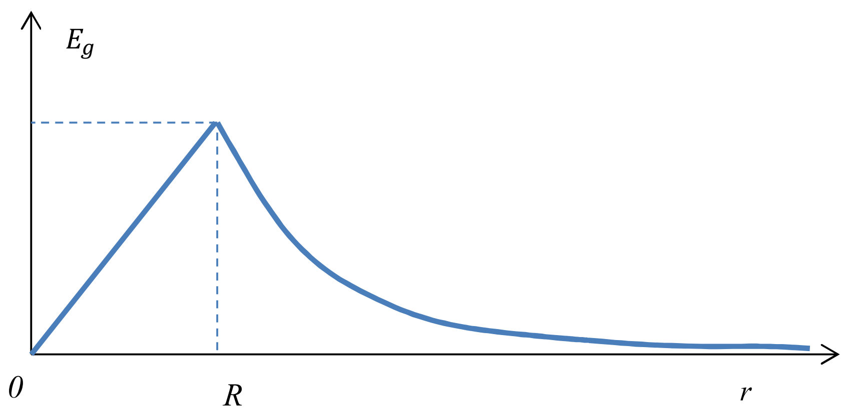
$$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow m = M\frac{r^3}{R^3}$$

Po dosazení tohoto výrazu do vztahu pro intenzitu gravitačního pole dostaneme:

$$E_g = \kappa\frac{m}{r^2} = \kappa\frac{M\frac{r^3}{R^3}}{r^2} = \kappa\frac{M.r}{R^3} = \kappa\frac{M}{R^3}.r$$

Intenzita gravitačního pole roste s první mocninou vzdálenosti od středu koule. Z matematického hlediska se jedná o lineární závislost (přímou úměrnost) – grafem bude přímka.

Spojíme-li všechny tři části, získáme graf závislosti velikosti intenzity gravitačního pole na vzdálenosti od středu koule. :



5. Určete velikost gravitačního zrychlení na povrchu planety Jupiter a porovnejte ho s gravitačním zrychlením na Zemi. Hmotnost planety Jupiter je $1{,}899.10^{27}$ kg, poloměr 71 400 km. Hmotnost planety Země je $5{,}97.10^{24}$ kg, poloměr 6378 km. Planety považujeme za homogenní koule.

$a_{gJ} = ?$
$a_{gZ} = ?$
$m_J = 1{,}899.10^{27}$ kg
$m_Z = 5{,}97.\ 10^{24}$ kg
$R_J = 71\ 400$ km
$R_Z = 6378$ km

Gravitační zrychlení je zrychlení, které tělesu o hmotnosti m_2 udílí gravitační síla $\vec{F}_g(\vec{r})$:

$$\vec{a}_g = \frac{\vec{F}_g(\vec{r})}{m_2} = -\kappa \frac{m}{r^2} \vec{r}_0$$

kde m je hmotnost tělesa, které pole vytváří, r je vzdálenost, ve které počítáme gravitační zrychlení, měřeno od středu tělesa o hmotnosti m
V tomto tvaru platí vztah pro hmotné body nebo tělesa tvaru koule.

Pro velikost gravitačního zrychlení na planetě Jupiter: $a_{gJ} = \kappa \frac{m_J}{R_J^2}$

Po dosazení: $a_{gJ} = \kappa \frac{m_J}{R_J^2} = 6{,}67.10^{-11}.\frac{1{,}899.10^{27}}{71\ 400\ 000^2} = 24{,}85\ \mathrm{m.s^{-2}}$

Pro velikost gravitačního zrychlení na planetě Zemi: $a_{gZ} = \kappa \frac{m_Z}{R_Z^2}$

Po dosazení: $a_{gZ} = \kappa \frac{m_Z}{R_Z^2} = 6{,}67.10^{-11}.\frac{5{,}97.10^{24}}{6\ 378\ 000^2} = 9{,}79\ \mathrm{m.s^{-2}}$

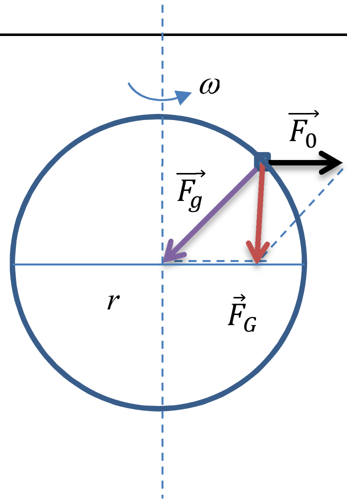
Směr gravitačního zrychlení na planetě Jupiter i planetě Zemi je do středu příslušné planety.

Odpověď: Gravitační zrychlení na planetě Jupiter je 24,85 $\mathrm{m.s^{-2}}$, na planetě Zemi 9,79 $\mathrm{m.s^{-2}}$.

poznámka: Hodnota gravitačního zrychlení na Jupiteru je zhruba 2,5 krát větší než hodnota gravitačního zrychlení na Zemi. Tento rozdíl je způsoben podstatně větší hmotností planety Jupiter ve srovnání s hmotností Země (řádově 1000 krát větší hmotnost).

6. Určete hodnotu gravitačního a tíhového zrychlení na povrchu Země – na pólu, na rovníku a na 50. té rovnoběžce severní šířky.

$a_{gp} = ?$
$a_{gr} = ?$
$a_{g50} = ?$
$g_p = ?$
$g_r = ?$
$g_{50} = ?$
$m_Z = 5{,}97.\ 10^{24}$ kg
$R_Z = 6378$ km
$\varphi = 50°$



Gravitační zrychlení je zrychlení, které tělesu o hmotnosti m_2 udílí gravitační síla $\vec{F_g} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0$:

$$\vec{a}_g = \frac{\vec{F}_g(\vec{r})}{m_2} = -\kappa \frac{m}{r^2} \vec{r}_0$$

Vzhledem k tomu, že Země se otáčí kolem své osy úhlovou rychlostí ω, působí na každé těleso na jejím povrchu také síla odstředivá $\vec{F}_o = \frac{mv^2}{r} \vec{r}_0$ $\Rightarrow$ každé těleso má odstředivé zrychlení:

$$\vec{a}_O = \frac{\vec{F}_O(\vec{r})}{m} = \frac{v^2}{r} \vec{r}_0$$

Výslednice, která je dána vektorovým součtem těchto dvou zrychlení, se nazývá tíhové zrychlení:

$$\vec{g} = \overrightarrow{a_g} + \overrightarrow{a_0}$$

Tíhové zrychlení vyjadřuje intenzitu tíhového pole na povrchu Země. Na různých místech zemského povrchu se velikost tíhového zrychlení mírně liší. To je způsobeno jednak tím, že Země není ideální koule (mění se její poloměr) a dále tím, že se mění také velikost odstředivé síly vznikající rotací Země.

Dle zadání máme určit velikost a směr gravitačního a tíhového zrychlení na třech místech na povrchu Země – na pólu, na rovníku a na 50. té rovnoběžce severní šířky

- **gravitační zrychlení** ve všech bodech na povrchu Země míří vždy do středu Země, pro jeho velikost platí:

$$a_g = \kappa \frac{m_Z}{R_Z{}^2}$$

kde m_Z je hmotnost Země, R_Z její poloměr (Zemi považujeme za ideální kouli s konstantním poloměrem)

po dosazení: $a_g = 6{,}67.10^{-11} \frac{5{,}97.10^{24}}{6378000^2} = 9{,}79\ \text{m.s}^{-2}$

- **odstředivé zrychlení** je ve všech bodech na povrchu Země kolmé na osu otáčení, jeho velikost se mění s polohou tělesa na povrchu planety

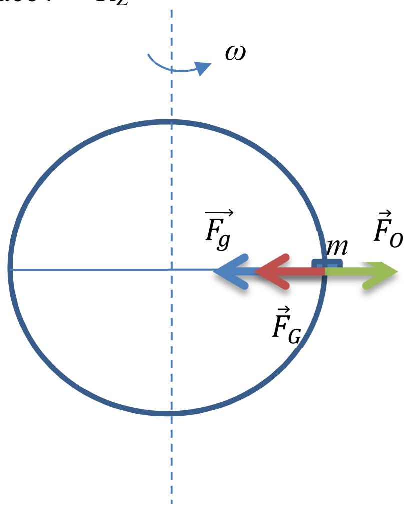
1. *na pólu Země:* na tělesa, která jsou umístěna na ose rotace Země, nepůsobí odstředivá síla $\Rightarrow a_0 = 0 \text{ m.s}^{-2}$

tíhové zrychlení má tedy stejný směr i velikost jako gravitační zrychlení:

$$\vec{g} = \vec{a}_g$$

Po dosazení: $g_p = 9{,}79 \text{ m.s}^{-2}$

2. *na rovníku Země:* na tělesa, která jsou umístěna na rovníku Země, působí největší odstředivá síla – tělesa jsou v největší vzdálenosti od osy rotace $r = R_Z$



pro velikost odstředivého zrychlení pak dostaneme: $a_O = \dfrac{v^2}{R_Z}$

směr je kolmý na osu rotace – viz obrázek:

jedná se o dva nesouhlasně rovnoběžné vektory $\Rightarrow$

pro velikost tíhového zrychlení pak platí:

$$g = a_g - a_O$$

Po dosazení:

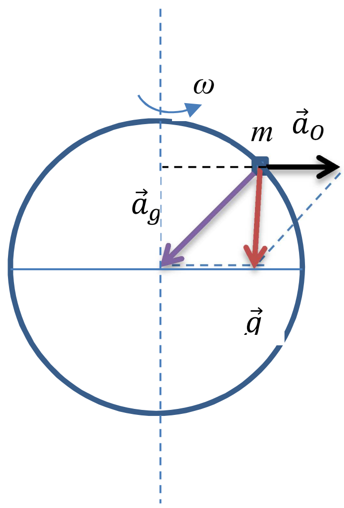
$$g = a_g - a_O = a_g - \frac{v^2}{R_Z}$$

kde v je rychlost, kterou se pohybuje těleso umístěné na rovníku. Uvažujeme, že Země se otáčí kolem osy rovnoměrně, rychlost pak vypočítáme:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2.\pi.R_Z}{T} = \frac{2.\pi.6378000}{24.3600} = 463{,}6 \text{ m.s}^{-1}$$

$$g = a_g - \frac{v^2}{R_Z} = 9{,}79 - \frac{463{,}6^2}{6\,378\,000} = 9{,}79 - 0{,}0337$$

$$g_r = 9{,}76 \text{ m.s}^{-2}$$



3. *na 50. té rovnoběžce severní šířky*: těleso se nachází mezi pólem a rovníkem $\Rightarrow$ odstředivá síla bude menší než na rovníku – kolmá vzdálenost tělesa od osy rotace je $l<R$ (viz obrázek)

pro velikost odstředivého zrychlení pak dostaneme:

$$a_O = \frac{{v_l}^2}{l}$$

kde l vypočítáme pomocí vzniklého pravoúhlého trojúhelníku, kde jedna odvěsna má délku l, přepona je R_Z a úhel je $\varphi = 50°$:

$$cos\varphi = \frac{l}{R_Z} \Rightarrow l = R_Z.cos\varphi$$

v_l je rychlost, kterou se pohybuje těleso umístěné na ve vzdálenosti l od osy otáčení: uvažujeme, že Země se otáčí kolem osy rovnoměrně, rychlost pak vypočítáme:

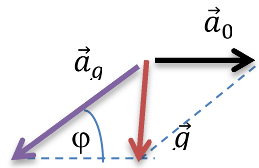
$$v = \frac{s}{t} = \frac{2.\pi.l}{T} = \frac{2.\pi.6378000.\cos 50°}{24.3600} = 297{,}99\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

velikost odstředivého zrychlení: $a_O = \frac{{v_l}^2}{l} = \frac{297{,}99^2}{6378000.\cos 50°} = 0{,}022\ \mathrm{m.s^{-2}}$

směr odstředivého zrychlení je kolmý na osu rotace – viz obrázek:

pro tíhové zrychlení pak platí:

jedná se o dva vektory, které spolu svírají obecný úhel $\varphi \Rightarrow\ \vec{g} = \overrightarrow{a_g} + \overrightarrow{a_0}$



velikost tíhového zrychlení vypočítáme pomocí kosinové věty:

$$g^2 = a_g^2 + a_O^2 - 2.a_g.a_O.\cos\varphi$$

Po dosazení a odmocnění:

$$g^2 = 9{,}79^2 + 0{,}022^2 - 2.9{,}79.0{,}022.\cos 50°$$
$$g = \sqrt{95{,}61}$$

$$g_{50} = 9{,}78\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

Odpověď: Gravitační zrychlení ve všech bodech na povrchu Země míří do jejího středu, jeho velikost je 9,79 m.s^{-2}. Tíhové zrychlení na povrchu Země se mění se zeměpisnou šířkou – na pólu je 9,79 m.s^{-2}, na rovníku 9,76 m.s^{-2} a na 50. té rovnoběžce severní šířky 9,78 m.s^{-2} .

7. Jakou rychlostí se pohybuje družice NOAA po kruhové trajektorii ve výšce zhruba 850 km nad povrchem Země? Jak dlouho jeden oběh trvá?

$v = ?$
$h = 850$ km
$T = ?$
$M = 5{,}97 .\ 10^{24}$ kg
$R_Z = 6378$ km

Jedná se o pohyb družice po kruhové trajektorii kolem Země. Mezi družicí a Zemí působí přitažlivá gravitační síla, která je silou dostředivou a způsobuje pohyb družice právě po zmíněné trajektorii.

Platí tedy vztah: $\vec{F_g} = \vec{F_d}$

Pro gravitační sílu platí: $\vec{F}_g = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0$

Pro dostředivou sílu platí: $\vec{F}_d = \frac{mv^2}{r} \vec{r}_0$

Pro velikost:

$$\kappa \frac{M.m}{r^2} = \frac{m.v^2}{r}$$

kde M je hmotnost Země, m je hmotnost družice, r je jejich vzájemná vzdálenost (od středu Země do středu družice): $r = R_Z + h$

po úpravě a dosazení: $\kappa \frac{M}{r} = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\kappa \frac{M}{r}} = \sqrt{\kappa \frac{M}{R_Z + h}}$

$$v = \sqrt{\kappa \frac{M}{R_Z + h}} = \sqrt{6{,}67.\ 10^{-11}. \frac{5{,}97.10^{24}}{6378000+850000}} = 7422\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Doba oběhu družice:

Družice obíhá Zemi rovnoměrným pohybem.

Pak platí: $v = \frac{s}{t} = \frac{2.\pi.r}{T} = \frac{2.\pi.(R_Z+h)}{T} \Rightarrow T = \frac{2.\pi.(R_Z+h)}{v}$

Po dosazení: $T = \frac{2.\pi.(R_Z+h)}{v} = \frac{2.\pi.(6378\,000+850\,000)}{7422} = 6115{,}6\ \mathrm{s} = 1{,}7\ \mathrm{hod}$

Odpověď: Družice NOAA se pohybuje rychlostí 7422 $\mathrm{m.s^{-1}}$ s dobou oběhu 1,7 hod.

8. Jak velkou práci bylo potřeba vykonat, aby byla družice z příkladu č. 7 vynesena do dané výšky? Hmotnost družice je cca 350 kg.

v = 7422 m.s^{-1}
h = 850 km
T = 1,7 hod
M = 5,97.10^{24} kg
R_Z = 6378 km
W = ?

Pro zjednodušení výpočtu nebudeme uvažovat odpor prostředí. Za této zjednodušující podmínky lze výpočet provést pomocí energií.

Práce, kterou musíme vykonat, abychom družici vynesli do příslušné výšky, je dána změnou energie, kterou má družice na povrchu Země a energie, kterou má ve výšce h nad jejím povrchem.

$$W = \Delta E = E_h - E_R$$

kde E_h je celková energie, kterou má družice ve výšce h, E_R je celková energie, kterou má družice na povrchu Země.

Celková energie je součet energie kinetické a potenciální: $E = E_k + E_p$

$$E = \frac{1}{2} m.v^2 - \kappa \frac{m.M}{r}$$

kde M je hmotnost Země, m je hmotnost družice, r je vzdálenost středu družice od středu Země, v je rychlost družice.

celková energie družice na povrchu Země: družice je v klidu ⇒ $E_k = 0$

potenciální energie $E_p = -\kappa \frac{m.M}{R_Z}$

celková energie družice ve výšce h nad povrchem Země:

družice se pohybuje rychlostí 7422 m.s^{-1} ⇒ $E_k = \frac{1}{2} m.v^2$

potenciální energie $E_p = -\kappa \frac{m.M}{R_Z + h}$

po úpravách a dosazení: $\Delta E = \left(\frac{1}{2} m.v^2 - \kappa \frac{m.M}{R_Z+h} \right) - \left(0 - \kappa \frac{m.M}{R_Z} \right)$

$$\Delta E = \frac{1}{2} m.v^2 + \kappa.m.M.\left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R_Z+h} \right)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} 350.\,7422^2 + 6{,}67.\,10^{-11}.\,350.5{,}97.\,10^{24}.\left(\frac{1}{6\,378\,000} - \frac{1}{6378\,000 + 850\,000} \right)$$

$W = 1{,}22.\,10^{10}$ J = 12,2 GJ

Odpověď: Na vynesení družice je třeba vykonat práci 12,2 GJ.

9. Družice Meteosat 7 je geostacionární družicí používanou k meteorologickým měřením. Určete její výšku nad povrchem Země. Hmotnost družice je cca 320 kg.

m = 320 kg
T = 1 den
h = ?

Geostacionární družice je družice, která jakoby „visí“ nad jedním místem v rovině rovníku nad povrchem Země, tzn. doba oběhu družice kolem Země je stejná jako doba rotace Země kolem osy $\Rightarrow T = 1$ den
Jedná se opět o pohyb družice po kruhové trajektorii kolem Země. Mezi družicí a Zemí působí přitažlivá gravitační síla, která je silou dostředivou a způsobuje pohyb družice právě po zmíněné trajektorii.

Platí tedy vztah: $\overrightarrow{F_g} = \overrightarrow{F_d}$

Pro gravitační sílu platí: $\vec{F_g} = -\kappa \frac{m.M}{r^2} \vec{r}_0$

Pro dostředivou sílu platí: $\vec{F}_d = \frac{mv^2}{r} \vec{r}_0$

Pro velikost:

$$\kappa \frac{M.m}{r^2} = \frac{m.v^2}{r}$$

kde M je hmotnost Země, m je hmotnost družice, r je jejich vzájemná vzdálenost (od středu Země do středu družice): $r = R_Z + h$

$$\kappa \frac{M.m}{(R_Z + h)^2} = \frac{m.v^2}{R_Z + h}$$

$$\kappa \frac{M}{R_Z + h} = v^2$$

kde v je rychlost, kterou se pohybuje těleso umístěné ve výšce h nad rovníkem. Uvažujeme, že Země se otáčí kolem osy rovnoměrně, rychlost pak vypočítáme:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2.\pi.(R_Z + h)}{T}$$

pak: $\kappa \frac{M}{R_Z+h} = (\frac{2.\pi.(R_Z+h)}{T})^2$

$$\kappa \frac{M.T^2}{4.\pi^2} = (R_Z + h)^3 \Rightarrow \quad R_Z + h = \sqrt[3]{\kappa \frac{M.T^2}{4.\pi^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\kappa \frac{M.T^2}{4.\pi^2}} - R_Z$$

po dosazení:

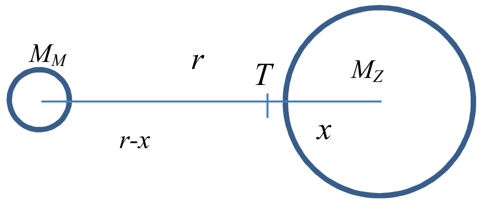
$$h = \sqrt[3]{6{,}67.10^{-11}\,\frac{5{,}97.10^{24}.(24.3600)^2}{4.\pi^2}} - 6378\,000 = 35\,863\,188\ \text{m} = 35\,863\ \text{km}$$

Odpověď: Geostacionární družice se pohybuje ve výšce 35 863 km nad povrchem Země.

pozn.: Družice METEOSAT 7 byla umístěna nad Guinejským zálivem, odkud byla schopna zobrazit celou Evropu a Afriku, západní Asii, část Jižní Ameriky a většinu Atlantského oceánu. Od června 2006 byla ale přesunuta na jinou pozici a nahrazena družicí nové generace MSG (Meteosat Second Generation), vysílající v digitální podobě.

10. Jakou rychlostí obíhá Země a Měsíc kolem společného těžiště?

$M_Z = 5{,}97.\ 10^{24}$ kg
$M_M = 7{,}34.10^{22}$ kg
$R_Z = 6378$ km
$R_M = 1738$ km
$v_M = ?$
$v_Z = ?$
r = 384 403 km



Jedná se opět o pohyb těles po kruhové trajektorii. Mezi Zemí a Měsícem působí přitažlivá gravitační síla, která je silou dostředivou a způsobuje pohyb obou těles po zmíněné trajektorii kolem společného těžiště T. Země obíhá kolem společného těžiště ve vzdálenosti *x*, Měsíc ve vzdálenosti *r*-*x* – viz obrázek.

Platí vztah: $\vec{F_g} = \vec{F_d}$

Pro gravitační sílu platí: $\vec{F}_g = -\kappa \frac{m.M}{r^2}\vec{r}_0$

Pro dostředivou sílu platí: $\vec{F}_d = \frac{mv^2}{r}\vec{r}_0$

Pro velikost:

pro Zemi: $\kappa \frac{M_Z.M_M}{r^2} = \frac{M_Z.v_Z^2}{x}$
pro Měsíc: $\kappa \frac{M_Z.M_M}{r^2} = \frac{M_M.v_M^2}{r-x}$

kde *v* je rychlost, kterou se pohybuje těleso ve vzdálenosti *x*, resp. *r* – *x* od společného těžiště. **Je nutné si uvědomit, že gravitační síla působí mezi Zemí a Měsícem na vzdálenosti *r*, kdežto u dostředivé síly jde o vzdálenost tělesa od bodu otáčení – společného těžiště T v našem případě**.

pak pro rychlost, se kterou se tělesa pohybují:

pro Zemi: $\kappa \frac{M_Z.M_M}{r^2} = \frac{M_Z.v_Z^2}{x} \Rightarrow v_Z = \sqrt{\kappa \frac{M_M}{r^2}.x}$

pro Měsíc: $\kappa \frac{M_Z.M_M}{r^2} = \frac{M_M.v_M^2}{r-x} \Rightarrow v_M = \sqrt{\kappa \frac{M_Z}{r^2}.(r-x)}$

Abychom mohli spočítat obě rychlosti, potřebujeme znát vzdálenost *x* Země od společného těžiště. Tuto vzdálenost určíme pomocí momentů sil, které na soustavu působí (viz. kapitola Dynamika tuhého tělesa v 1. díle Sbírky řešených příkladů).

Předpokládáme, že pohyb Země i Měsíce je rovnoměrný. Pak je výsledný moment sil, které na soustavu působí, nulový.
Tuto podmínku zapíšeme následovně: $\overrightarrow{M_Z} + \overrightarrow{M_M} = \vec{0}$

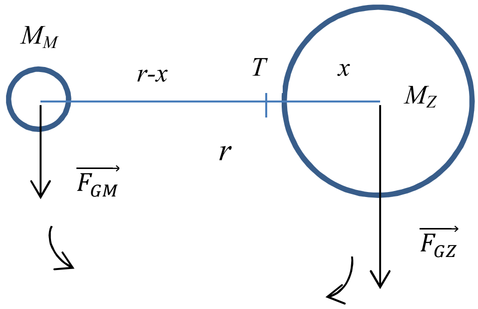
pozor: M_M, M_Z označuje jak hmotnost, tak moment sil daného tělesa – význam je zřejmý z daných rovnic

Situaci si představíme tak, že se jedná o dvě tělesa o hmotnostech M_Z a M_M ve vzájemné vzdálenosti *r*.

Moment síly je definován: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Směry jednotlivých momentů sil určíme pomocí pravidla pravé ruky nebo podle směru otáčení hodinových ručiček vzhledem k bodu T:

$$M_Z - M_M = 0$$



velikost momentu síly je dána součinem síly a vzdálenosti od osy otáčení – v našem případě působí síly kolmo na rameno ⇒ $M = F.d$

pak platí:

$$F_{GZ}.x - F_{GM}.(r-x) = 0$$
$$M_Z.g.x - M_M.g.(r-x) = 0$$

$$x = \frac{M_M.r}{M_M + M_Z}$$

po dosazení: $x = \frac{M_M.r}{M_M+M_Z} = \frac{7{,}34.10^{22}.384\,403000}{7{,}34.10^{22}+5{,}97.10^{24}} = 4669\,000\text{ m} = 4669\text{ km}$

poznámka: společné těžiště se nachází pod povrchem Země - vzdálenost *x* je menší než poloměr Země (6378 km)

Dosadíme vypočítanou hodnotu *x* do rovnic pro rychlosti:

pro Zemi: $v_Z = \sqrt{\kappa \frac{M_M}{r^2}.x} = \sqrt{6{,}67.10^{-11}\frac{7{,}34.10^{22}}{384\,403\,000^2}.4669000} = 12{,}43\text{ m.s}^{-1}$

pro Měsíc:

$$v_M = \sqrt{\kappa \frac{M_Z}{r^2}.(r-x)} = \sqrt{6{,}67.10^{-11}\frac{5{,}97.10^{24}}{384\,403000^2}.(384\,403000 - 4669000)}$$
$$= 1011\text{ m.s}^{-1}$$

Odpověď: Země obíhá kolem společného těžiště rychlostí $12{,}43\text{ m.s}^{-1}$, Měsíc rychlostí 1011 m.s^{-1}.

11. Jakou střední tíhu bude mít těleso o hmotnosti 100 kg na povrchu Měsíce, Země a Slunce?

m = 100 kg
M_Z = 5,97. 10^{24} kg
M_M = 7,34.10^{22} kg
M_S = 1,99.10^{30} kg
R_Z = 6378 km
R_M = 1738 km
R_S = 696010 km
F_{GZ} = ?
F_{GM} = ?
F_{GS} = ?

Měsíc, Zemi a Slunce považujeme za ideální koule s daným poloměrem.

Jednodušší verze tohoto příkladu spočívá v zanedbání rotace Měsíce, Země a Slunce kolem vlastní osy – zanedbáváme odstředivou sílu, která by působila na těleso o hmotnosti 100 kg.

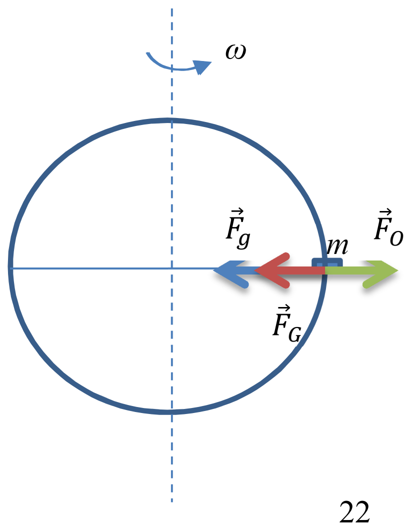
Pak pro výpočet použijeme vztah: $\overrightarrow{F_G} = \overrightarrow{F_g} = -\kappa\frac{m.M}{r^2}\vec{r}_0$

pro velikost: $F_G = \kappa\frac{m.M}{r^2}$

tíhová síla na Zemi: $F_G = \kappa\frac{m.M}{r^2} = 6{,}67.10^{-11}\frac{100.5{,}97.10^{24}}{6378000^2} = 979$ N
tíhová síla na Měsíci: $F_G = \kappa\frac{m.M}{r^2} = 6{,}67.10^{-11}\frac{100.7{,}34.10^{22}}{1738000^2} = 162{,}08$ N
tíhová síla na Slunci: $F_G = \kappa\frac{m.M}{r^2} = 6{,}67.10^{-11}\frac{100.1{,}99.10^{30}}{696010000^2} = 27399{,}8$ N

Přesnější výpočet: budeme uvažovat rotaci Měsíce, Země a Slunce kolem vlastní osy.
Tíhová síla je dána vektorovým součtem gravitační a odstředivé síly: $\overrightarrow{F_G} = \overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_O}$
Abychom mohli určit velikost a směr odstředivé síly, musíme znát polohu tělesa na povrchu Měsíce, Země a Slunce. Budeme uvažovat, že těleso se nachází na rovníku.

pro odstředivou sílu platí: $\overrightarrow{F_O} = \frac{m.v^2}{r}.\overrightarrow{r_0}$



na tělesa, která jsou umístěna na rovníku, působí největší odstředivá síla – tělesa jsou v největší vzdálenosti od osy rotace

směr je kolmý na osu rotace

jedná se o dva nesouhlasně rovnoběžné vektory ⇒

pro velikost tíhové síly pak platí:

$$F_G = F_g - F_O$$

Po dosazení:

$$F_G = F_g - F_O = \kappa \frac{m.M}{r^2} - \frac{m.v^2}{r}$$

kde *v* je rychlost, kterou se pohybuje těleso umístěné na rovníku. Uvažujeme rovnoměrný pohyb kolem osy, rychlost pak vypočítáme:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2.\pi.r}{T}$$

$$F_G = F_g - F_O = \kappa \frac{m.M}{r^2} - \frac{m.\left(\frac{2.\pi.r}{T}\right)^2}{r} = \kappa \frac{m.M}{r^2} - \frac{m.4.\pi^2.r}{T^2}$$

kde *T* je doba rotace kolem osy.

tíhová síla na Zemi: doba rotace *T* = 1 den

$$F_G = \kappa \frac{m.M}{r^2} - \frac{m.4.\pi^2.r}{T^2} = 6{,}67.10^{-11} \frac{100.5{,}97.10^{24}}{6378000^2} - \frac{100.4.\pi^2.6378000}{(24.3600)^2} = 976 \text{ N}$$

tíhová síla na Měsíci: doba rotace *T* = 27,3 dne

$$F_G = \kappa \frac{m.M}{r^2} - \frac{m.4.\pi^2.r}{T^2} = 6{,}67.10^{-11} \frac{100.7{,}34.10^{22}}{1738000^2} - \frac{100.4.\pi^2.1738000}{(27{,}3.24.3600)^2} = 162{,}078 \text{ N}$$

tíhová síla na Slunci: doba rotace *T* = 25,38 dní

$$F_G = \kappa \frac{m.M}{r^2} - \frac{m.4.\pi^2.r}{T^2} = 6{,}67.10^{-11} \frac{100.1{,}99.10^{30}}{696010000^2} - \frac{100.4.\pi^2.696010000}{(25{,}38.24.3600)^2}$$
$$= 27398{,}4 \text{ N}$$

Odpověď: Hodnoty tíhových sil se při zanedbání rotace kolem osy prakticky neliší od hodnot spočítaných přesně, největší odchylka je u tělesa na Zemi. Tíhová síla působící na těleso o hmotnosti 100 kg je na Zemi 979 N, resp. 976 N; na Měsíci je 162,08 N, resp. 162,078 N; na Slunci 27 399,8 N, resp. 27 398,4 N.

12. Planeta Venuše obíhá kolem Slunce ve vzdálenosti 0,723 AU. Určete její oběžnou dobu.

T = ?
r = 0,723 AU (1AU = 149,5.10^6 km = 1 astronomická jednotka)

Výpočet tohoto příkladu lze provést dvěma způsoby:

1. způsob – pomocí sil

Jedná se o pohyb Venuše po kruhové trajektorii kolem Slunce. Mezi Sluncem a Venuší působí přitažlivá gravitační síla, která je silou dostředivou a způsobuje pohyb družice právě po zmíněné trajektorii.

Platí vztah: $\overrightarrow{F_g} = \overrightarrow{F_d}$

Pro gravitační sílu platí: $\vec{F_g} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0$

Pro dostředivou sílu platí: $\vec{F}_d = \frac{mv^2}{r} \vec{r}_0$

Pro velikost platí:

$$\kappa \frac{M.m}{r^2} = \frac{m.v^2}{r}$$

Uvažujeme opět rovnoměrný pohyb Venuše po kružnici kolem Slunce.

Pak platí: $v = \frac{s}{t} = \frac{2.\pi.r}{T}$

Pak:

$$\kappa \frac{M.m}{r^2} = \frac{m.(\frac{2.\pi.r}{T})^2}{r}$$

$$\kappa \frac{M}{r^2} = \frac{4.\pi^2.r}{T^2} \Rightarrow T = \sqrt[2]{\frac{4.\pi^2.r^3}{\kappa.M}}$$

kde M je hmotnost Slunce, která není v tomto příkladu zadaná. Z tabulek nebo výše počítaných příkladů víme, že hmotnost Slunce je M_S = 1,99.10^{30} kg.

Po dosazení hodnot pak doba rotace:

$$T = \sqrt[2]{\frac{4.\pi^2.r^3}{\kappa.M}} = \sqrt[2]{\frac{4.\pi^2.(0{,}723.149\,500\,000)^3}{6{,}67.10^{-11}.1{,}99.10^{30}}} = 19321950 \text{ s} = 224 \text{ dne}$$

2. způsob – pomocí 3.Keplerova zákona

Třetí Keplerův zákon zní:
Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je stejný jako poměr třetích mocnin jejich hlavních poloos (středních vzdáleností těchto planet od Slunce).

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Tento zákon platí v tomto tvaru jen tehdy, jsou-li hmotnosti planet zanedbatelně malé ve srovnání s hmotností Slunce, což je u planet sluneční soustavy splněno.

pozor: Tento zákon lze použít pouze, pokud obě tělesa obíhají kolem stejného centrálního tělesa.

Jednou z planet, jejichž parametry dosadíme do daného zákona, je Venuše, druhou Země (známe dobu oběhu Země kolem Slunce T = 1 rok, střední vzdálenost Země – Slunce je 1 AU = a_Z).

$$\frac{T_V^2}{T_Z^2} = \frac{a_V^3}{a_Z^3} \Rightarrow T_V = T_Z \sqrt[2]{\frac{a_V^3}{a_Z^3}}$$

po dosazení: $T_V = T_Z \sqrt[2]{\frac{a_V^3}{a_Z^3}} = 1 \sqrt[2]{\frac{(0{,}723.1AU)^3}{1AU^3}} = 0{,}61 \text{ roku} = 224 \text{ dne}$

Odpověď: Venuše oběhne Slunce za 224 dní.

poznámka: řešení pomocí Keplerova zákona je podstatně rychlejší a jednodušší, navíc není nutné znát hmotnost Slunce

13. a) Jak vysoko vystoupá těleso o hmotnosti 2 kg vystřelené rychlostí 5 m.s^{-1} kolmo z povrchu Země?
  b) Jak vysoko vystoupá totéž těleso vystřelené rychlostí 5 km.s^{-1} kolmo z povrchu Země?
  V obou případech zanedbejte odpor prostředí.

---

m = 2 kg
a) v_0 = 5 m.s^{-1}
b) v_0 = 5 km.s^{-1}
h = ?

V obou případech se jedná se o vrh svislý vzhůru – pohyb zpomalený s počáteční rychlostí v_0 a koncovou rychlostí v = 0 m.s^{-1}.

V prvním případě, kdy je rychlost 5 m.s^{-1}, jde o pohyb **rovnoměrně** zpomalený - počáteční rychlost v_0= 5 m.s^{-1}, koncová rychlost v = 0 m.s^{-1}, tíhové zrychlení je konstantní g = 10 m.s^{-2}. Ve druhém případě je počáteční rychlost v_0 = 5 km.s^{-1} velká, musíme uvažovat nehomogenní radiální pole a měnící se zrychlení - jde o pohyb **nerovnoměrně** zpomalený.

Maximální výšku h_{max}, do které se těleso může dostat, určíme v obou případech pomocí zákona zachování mechanické energie (tento zákon lze vzhledem k zadání použít):

Zákon zachování mechanické energie (ZZME) říká, že jestliže nedochází ke konání práce (ΔW = 0 J), pak součet kinetické a potenciální energie částic, z nichž se daná soustava skládá, zůstává stálý.

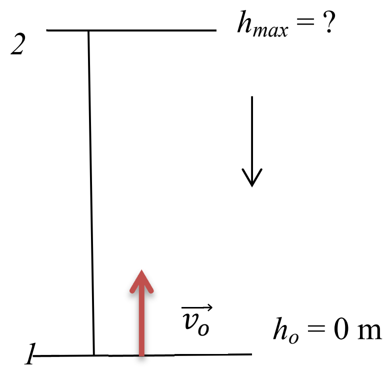
Celková energie je součet energie kinetické a potenciální: $E = E_k + E_p$

určíme dvě místa, u nichž známe celkovou energii, a použijeme zákon zachování mechanické energie

jedno místo je v místě výstřelu – na povrchu Země - 1
druhé místo je v maximální výšce - 2

ZZME: $$E_1 = E_2$$

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$



Nyní řešení rozdělíme.

ad a): počáteční rychlost v_0 = 5 m.s^{-1}

při pohybu touto rychlostí se těleso příliš nevzdálí od povrchu Země a gravitační pole, ve kterém se těleso pohybuje, můžeme považovat za homogenní

kinetická energie: $E_k = \frac{1}{2} m . v^2$

potenciální energie: $E_p = m.g.h$

v případě potenciální energie musíme určit základní hladinu, vůči které potenciální energii počítáme. V případě homogenního pole je nejjednodušší zvolit nulovou hladinu v místě odhodu.

pro místo 1: těleso má rychlost $v_0 \Rightarrow$ má kinetickou energii $E_{k1} = \frac{1}{2}m.v_0^2$
potenciální energie na povrchu Země je vzhledem k dané volbě nulová
$E_{p1} = 0\text{ J}$

pro místo 2: těleso je v maximální poloze, kde se zastaví a padá zpět - rychlost v v nejvyšším bodě je nulová $\Rightarrow$ kinetická energie je nulová $E_{k2} = 0\text{ J}$
potenciální energie je v tomto místě maximální $E_{p2} = m.g.h_{max}$

$$E_{k1} + 0 = 0 + E_{p2}$$

$$\frac{1}{2}m.v_0^2 + 0 = 0 + m.g.h_{max}$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2.g}$$

po dosazení: $h_{max} = \frac{v_0^2}{2.g} = \frac{5^2}{2.10} = 1{,}25\text{ m}$

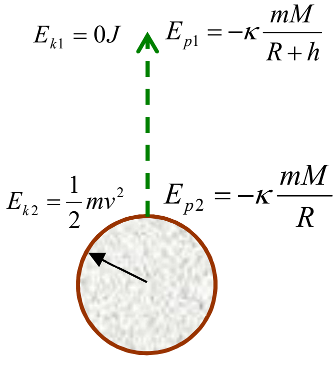
ad b): počáteční rychlost $v_0 = 5\text{ km.s}^{-1}$

při pohybu touto rychlostí se těleso značně vzdálí od povrchu Země a gravitační pole, ve kterém se těleso pohybuje, nelze považovat za homogenní –
těleso se pohybuje v radiálním gravitačním poli Země

kinetická energie: $E_k = \frac{1}{2}m.v^2$

potenciální energie: $E_p = -\kappa\frac{m.M}{r}$

kde M je hmotnost Země, m je hmotnost vystřeleného tělesa, r je vzdálenost od středu Země do středu tělesa



musíme opět určit vztažnou hladinu potenciální energie; v případě radiálního pole se nulová hladina volí v nekonečnu.

pro místo 2: těleso má rychlost $v_0 \Rightarrow$ má kinetickou energii $E_{k2} = \frac{1}{2}m.v^2$
potenciální energie na povrchu Země: $E_{p2} = -\kappa\frac{m.M}{R_Z}$

pro místo 1: těleso je v maximální poloze, kde se zastaví a padá zpět - rychlost v v nejvyšším bodě je nulová $\Rightarrow$ kinetická energie je nulová $E_{k1} = 0\text{ J}$

potenciální energie je v tomto místě maximální $E_{p1} = -\kappa\frac{m.M}{r} = -\kappa\frac{m.M}{R_Z+h}$

$$E_{k2} + E_{p2} = 0 + E_{p1}$$

$$\frac{1}{2}m.v^2 - \kappa\frac{m.M}{R_Z} = 0 - \kappa\frac{m.M}{R_Z+h}$$

po úpravách a dosazení:

$$\frac{1}{R_Z + h} = \frac{1}{R_Z} - \frac{v^2}{2.\kappa.M}$$

$$h = \frac{1}{\frac{1}{R_Z} - \frac{v^2}{2.\kappa.M}} - R_Z$$

$$h = \frac{1}{\frac{1}{6378000} - \frac{5000^2}{2.6{,}67.10^{-11}.5{,}97.10^{24}}} - 6378000 = 1596633\text{ m} = 1597\text{ km}$$

Odpověď: Vystřelíme-li těleso rychlostí v_0 = 5 m.s^{-1}, vystoupá do výšky 1,25 metrů. Vystřelíme-li těleso rychlostí v_0 = 5 km.s^{-1}, vystoupá do výšky 1597 km.

Autotest

1. Ve středech stran čtverce o délce strany 2 m jsou umístěny čtyři koule postupně o hmotnostech $m_1 = 100$ kg, $m_2 = 40$ kg, $m_3 = 30$ kg a $m_4 = 60$ kg. Vypočítejte intenzitu gravitačního pole ve středu čtverce.
   ($E = 4,9.10^{-9}$ kg.m.s^{-2}, $\alpha = 16°$)
2. Hmotnost planety Jupiter je $1,899.10^{27}$ kg, její poloměr 71 400 km a doba rotace 9 h 50 min 30 s. Určete velikost gravitačního a tíhového zrychlení na rovníku této planety. Při výpočtu považujte planetu za homogenní kouli.
   ($a_g = 24,85$ m.s^{-2} ; $g = 22,60$ m.s^{-2})
3. Jak velkou práci musíme vykonat, abychom družici o hmotnosti 400 kg vynesli na její trajektorii ve výšce 900 km nad povrchem Země? Jakou rychlostí se v této výšce pohybuje?
   ($v = 7\,415$ m.s^{-1}, $W = 14$ GJ)
4. Planeta Mars oběhne kolem Slunce za 686,96 dne. Určete jeho vzdálenost od Slunce.
   ($a_M = 1,52$ AU = 227 940 km)

II. Elektrostatické pole

V okolí každého elektricky nabitého tělesa existuje elektrostatické pole, které se projevuje silovým působením na jiná elektricky nabitá tělesa. Síla, jejímž prostřednictvím na sebe tělesa s elektrickým nábojem působí, aniž by byla v přímém vzájemném kontaktu, se nazývá *elektrostatická síla*.

Coulombův zákon popisující elektrostatickou sílu působící mezi dvěma elektricky nabitými tělesy říká, že každá dvě elektricky nabitá tělesa na sebe působí silou, která působí ve směru jejich spojnice, je přímo úměrná součinu jejich nábojů a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti:

$$\vec{F}_e(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}.\frac{Q.q}{r^2}\vec{r}_0$$

kde Q,q jsou náboje, r jejich vzájemná vzdálenost a $\varepsilon = \varepsilon_0.\varepsilon_r$ je permitivita prostředí

Elektrostatická síla může být přitažlivá i odpudivá.

V tomto tvaru lze Coulombův zákon použít pouze pro rovnoměrně nabitá tělesa tvaru koule nebo hmotné body.

Pokud elektrostatickou sílu vydělíme testovacím nábojem q, získáme i*ntenzitu* elektrostatického pole, která nezávisí na náboji testovacího tělesa, a je tedy jednoznačnou vlastností pole:

$$\vec{E}_e(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_e(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}.\frac{Q}{r^2}\vec{r}_0$$

kde Q je náboj, který pole vytváří, r vzdálenost od náboje Q a $\varepsilon = \varepsilon_0.\varepsilon_r$ je permitivita prostředí.

Vztah platí opět pouze pro nabitá tělesa tvaru koule nebo hmotné body.

Práce, kterou musíme dodat, abychom přemístili těleso s nábojem q z bodu A do bodu B v elektrostatickém poli jiného tělesa s nábojem Q:

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Qq}{r^2}dr = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = \Delta E_P$$

Potenciální *energie* náboje q v elektrostatickém poli jiného náboje Q: $E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q.Q}{r}$

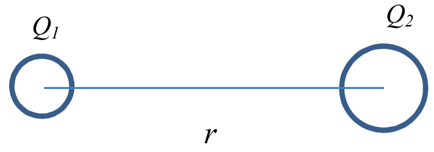
Potenciál elektrostatického pole je potenciální energie vztažená na jednotkový náboj:

$$\varphi = \frac{E_p}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}$$

Konstanty: permitivita vakua $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}
relativní permitivita vzduchu $\varepsilon_r = 1$
elementární náboj $e = 1{,}602.10^{-19}$ C

1. Určete velikost elektrostatické síly, kterou na sebe působí ve vakuu dva kladné náboje o velikostech Q_1 a Q_2, jsou-li od sebe vzdáleny a, $2a$ a $a/2$.

$F = ?$
Q_1
Q_2
$r = a\ (2a;\ a/2)$



Na výpočet elektrostatické síly působící mezi náboji použijeme Coulombův zákon:

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon} . \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_0$$

kde Q_1, Q_2 jsou náboje, r jejich vzájemná vzdálenost a ε je permitivita prostředí.

Náboje jsou umístěny ve vakuu: $\varepsilon_r = 1 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0$

Směr: jedná se o působení mezi dvěma kladnými náboji $\Rightarrow$ ve všech případech jde o sílu odpudivou

Velikost: určíme pro jednotlivé vzdálenosti

Síla působící ve vzdálenosti $r = a$: $F_e(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} . \frac{Q_1 Q_2}{a^2}$

Síla působící ve vzdálenosti $r = 2a$: $F_e(2a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} . \frac{Q_1 Q_2}{(2a)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} . \frac{Q_1 Q_2}{4a^2} = \frac{F_e(a)}{4}$

ve **dvakrát větší** vzdálenosti bude působící síla **čtyřikrát menší**

Síla působící ve vzdálenosti $r = a/2$: $F_e(\frac{a}{2}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} . \frac{Q_1 Q_2}{(\frac{a}{2})^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} . 4 . \frac{Q_1 Q_2}{a^2} = 4 . F_e(a)$

v **poloviční** vzdálenosti bude působící síla **čtyřikrát větší**

Odpověď: Síla působící mezi náboji je $F_e(a)$, $F_e(a)/4$ a $4 . F_e(a)$.

Poznámka: z řešení je vidět, jak se mění velikost síly se vzdáleností.

2. Jak velká síla by teoreticky působila mezi kladným a záporným nábojem obsaženým v jednom molu atomů železa, kdyby se je podařilo oddálit do vzdálenosti jednoho metru?

$n = 1$ mol
$r = 1$ m
$F = ?$

Na výpočet elektrostatické síly působící mezi náboji použijeme Coulombův zákon:

$$\vec{F_e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} . \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r_0}$$

kde Q_1, Q_2 jsou náboje, r jejich vzájemná vzdálenost a ε je permitivita prostředí.

Jmenovatel v Coulombově zákoně představuje vzdálenost od středu jednoho tělesa, resp. hmotného bodu ke středu druhého tělesa, resp. hmotného bodu:

Musíme nyní určit **velikost kladného a záporného náboje** v 1 molu atomů železa:

- náboj Q je dán součinem počtu částic N a velikosti elementárního náboje e: $Q = N. e$

- počet částic N je dán součinem látkového množství n a Avogadrovy konstanty N_A, kde $N_A = 6{,}023.10^{23}$ je počet částic na jeden mol

$$N = n.N_A$$

pak náboj Q: $Q = N.e = n.N_A.e$

atom železa obsahuje stejný počet protonů v jádře jako elektronů v atomovém obalu

celkový kladný náboj Q^+:

$$Q^+ = N.e = n.N_A.e = 1.6{,}023.10^{23}.1{,}602.10^{-19} = 96\,489 \text{ C}$$

celkový záporný náboj Q^-:

$$Q^- = N.(-e) = n.N_A.(-e) = 1.6{,}023.10^{23}.(-1{,}602.10^{-19}) = -96\,489 \text{ C}$$

Vzhledem k opačným znaménkům nábojů se jedná o sílu přitažlivou.

Velikost síly působící mezi těmito náboji:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon} . \frac{Q^+Q^-}{r^2} = \frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}} \frac{96\,489.(96\,489)}{1^2} = 8{,}4.10^{19} \text{ N}$$

Odpověď: Mezi kladným a záporným nábojem obsaženým v jednom molu atomů železa by působila přitažlivá síla o velikosti $8{,}4.10^{19}$ N.

Poznámka 1:

1 mol železa má hmotnost $m = n.A_r$, kde *n* je látkové množství, A_r je relativní atomová hmotnost – pro železo: A_r = 55,85 g.mol^{-1}

$$m = n.A_r = 1.55{,}85 = 55{,}85 \text{ g}$$

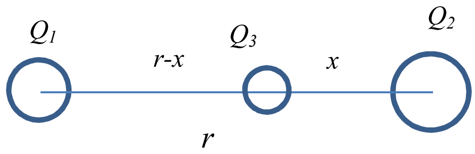
kulička ze železa o hmotnosti 55,85 g a hustotě ρ = 7830 kg.m^{-3} by měla průměr 2,4 cm

Poznámka 2.:

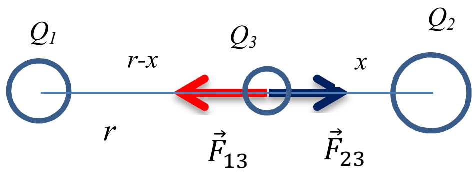
pro představu, jak velká je to síla - na povrchu Země by to byla tíhová síla působící na těleso o hmotnosti $8{,}4.10^{18}$ kg $= 8400000000000000$ tun

3. Dva bodové náboje o velikostech 20 μC a 25 μC se nachází ve vzdálenosti 5 cm ve vakuu. Kam na spojnici těchto nábojů musíme umístit náboj o velikosti -15 μC, aby výsledná síla na něj působící byla nulová?

$x = ?$
$Q_1 = 20\ \mu C$
$Q_2 = 25\ \mu C$
$Q_3 = -15\ \mu C$
$r = 5\ cm$



Mezi náboji Q_1 a Q_2 stejného znaménka působí odpudivá síla. Pokud mezi ně vložíme náboj Q_3 opačného znaménka, pak síla $\vec{F}_{13}$ působící mezi náboji Q_1 a Q_3 opačného znaménka, resp. síla $\vec{F}_{23}$ působící mezi náboji Q_2 a Q_3 je síla přitažlivá, její směr je patrný z obrázku:



Síla působící na náboj Q_3 bude nulová, pokud bude platit podmínka:

$$\overrightarrow{F_{13}} + \overrightarrow{F_{23}} = \vec{0}$$

Vzhledem k obrázku se jedná o dva nesouhlasně rovnoběžné vektory,
pro jejich velikost musí platit: $F_{13} - F_{23} = 0$

Na výpočet velikosti elektrostatické síly působící mezi náboji použijeme Coulombův zákon:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

kde Q_1, Q_2 jsou náboje, r jejich vzájemná vzdálenost a ε je permitivita prostředí.

Jmenovatel v Coulombově zákoně představuje vzdálenost od středu jednoho náboje ke středu druhého náboje.

Velikost síly působící mezi náboji Q_1, Q_3 : $F_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_3}{(r-x)^2}$
Velikost síly působící mezi náboji Q_2, Q_3 : $F_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2 Q_3}{(x)^2}$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_3}{(r-x)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2 Q_3}{x^2} = 0$$

$$\frac{Q_1 Q_3}{(r-x)^2} - \frac{Q_2 Q_3}{x^2} = 0$$

$$Q_1\, x^2 - Q_2(r-x)^2 = 0$$

po úpravě získáme kvadratickou rovnici pro vzdálenost *x*:

$$(Q_1 - Q_2\,)x^2 + 2.\,Q_2 r x - Q_2 r^2 = 0$$

Řešení bychom nalezli pomocí diskriminantu: $x_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2}-4ac}{2a}$

➡ Další výpočet ponechán na čtenáři

Jiné – matematicky jednodušší řešení:

$$\frac{Q_1}{(r-x)^2} = \frac{Q_2}{x^2}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{(r-x)^2}{x^2}$$

$$\pm\sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}} = \frac{r-x}{x}$$

$$\pm\sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}} = \frac{r}{x} - 1$$

$$x = \frac{r}{1 \pm \sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}}}$$

Po dosazení: $x = \frac{r}{1\pm\sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}}} = \frac{5}{1\pm\sqrt{\frac{20.10^{-6}}{25.10^{-6}}}}$

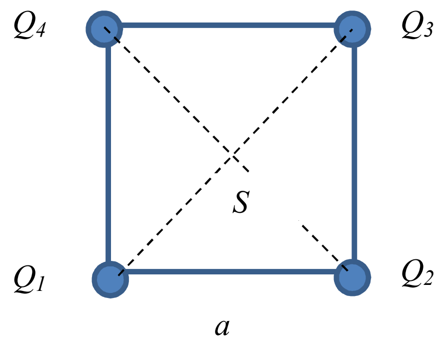
$$x_1 = 2{,}64 \text{ cm}$$
$$x_2 = 47{,}36 \text{ cm}$$

Odpověď: Náboj musíme umístit do vzdálenosti 2,64 cm od náboje Q_2.

Poznámka: Vzdálenost x_2 je sice také řešením dané rovnice, ale není řešením daného zadání. Ve vzdálenosti 47, 36 cm od náboje Q_2 bude mít jak síla působící mezi náboji Q_1, Q_3 , tak síla působící mezi náboji Q_2, Q_3 stejný směr. Tudíž výsledná síla bude daná jejich součtem a nebude se rovnat nule.

4. V rozích čtverce o straně 9 cm se nacházejí bodové náboje o velikosti 100 nC, -100 nC, 200 nC a -200 nC. Určete velikost a směr intenzity elektrostatického pole ve středu čtverce. Jaká je velikost potenciálu v tomto bodě?

Q_1 = 100 nC
Q_2 =- 100 nC
Q_3 = 200 nC
Q_4 = - 200 nC
a = 9 cm
E = ?
φ = ?



Výpočet intenzity:

Každé elektricky nabité těleso vytváří ve svém okolí elektrostatické pole, které lze popsat pomocí intenzity. Intenzita elektrostatického pole je veličina vektorová ⇒ musíme určit její velikost i směr.

$$\vec{E}\ (\vec{r}) = \frac{\vec{F}_e(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{r}_0$$

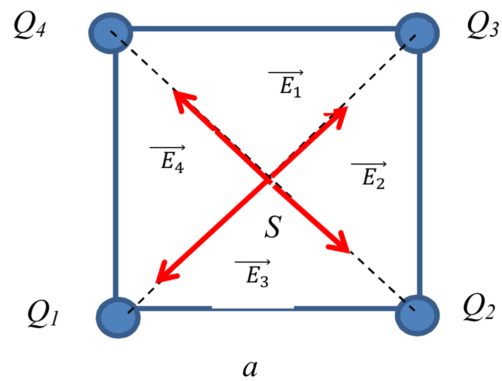
Směr – pokud pole vytváří kladný náboj, pak v každém bodě pole míří vektor intenzity vždy od něj; v případě záporného náboje je směr opačný – míří k náboji, který pole vytváří

Velikost – v případě bodového náboje

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Prostředí, ve kterém je čtverec umístěn, není definováno, předpokládáme, že se jedná o vzduch: $\varepsilon_r = 1 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0$

Počítáme intenzitu elektrostatického pole ve středu čtverce S: výslednou intenzitu elektrostatického pole získáme vektorovým součtem intenzit od jednotlivých nábojů – viz obrázek:



Výsledná intenzita v bodě S:

$$\vec{E_e} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3} + \vec{E_4}$$

Vzhledem k obrázku: spočítáme zvlášť intenzitu $\overrightarrow{E_{13}}$ jako výslednici ve směru Q_1 a Q_3 a zvlášť intenzitu $\overrightarrow{E_{24}}$ jako výslednici ve směru Q_2 a Q_4

Intenzita $\overrightarrow{E_{13}}$: jedná se o dva opačně orientované vektory, které leží v jedné přímce
Pro velikost platí: $E_{13} = |E_1 - E_3|$

$$E_{13} = \left|\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{l^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{l^2}\right|$$

kde *l* je vzdálenost náboje *Q*, které pole vytváří, a bodu S, ve kterém intenzitu počítáme.
Pro tento příklad je *l* stejné pro všechny body (S leží v průsečíku úhlopříček daného čtverce):

$$l = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + a^2)} = \frac{a.\sqrt{2}}{2} = \frac{0{,}09.\sqrt{2}}{2} = 0{,}064 \text{ m}$$

Po dosazení: $E_{13} = \left|\frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{100.10^{-9}}{0{,}064^2} - \frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{200.10^{-9}}{0{,}064^2}\right| = 219\,727 \text{ V.m}^{-1}$

Směr – vektor intenzity bude mířit ve směru vektoru $\overrightarrow{E_{13}}$, k náboji Q_1

Obdobně spočítáme *intenzitu* $\overrightarrow{E_{24}}$:

Pro velikost platí: $E_{24} = |E_2 - E_4|$

$$E_{24} = \left|\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{l^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_4}{l^2}\right|$$

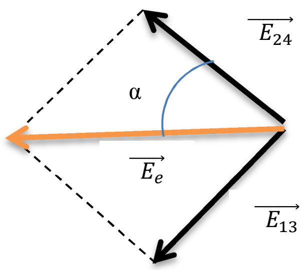
Po dosazení: $E_{24} = \left|\frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{100.10^{-9}}{0{,}064^2} - \frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{200.10^{-9}}{0{,}064^2}\right| = 219\,727 \text{ V.m}^{-1}$

Směr – vektor intenzity bude mířit ve směru vektoru $\overrightarrow{E_{24}}$, k bodu s nábojem Q_4

Výsledná intenzita elektrostatického pole v bodě S: $\overrightarrow{E_e} = \overrightarrow{E_{13}} + \overrightarrow{E_{42}}$
Intenzity $\overrightarrow{E_{13}}$ a $\overrightarrow{E_{24}}$ spolu svírají pravý úhel – viz obrázek ⇒ velikost výsledné intenzity určíme pomocí Pythagorovy věty:

$$E_e = \sqrt{E_{13}^2 + E_{24}^2}$$

Směr výsledné intenzity určíme z obrázku:



$$tg\alpha = \frac{E_{13}}{E_{24}}$$

Po dosazení: $E_e = \sqrt{((219\,727)^2 + (219\,727)^2)} = 310\,740 \text{ V.m}^{-1}$

$$tg\alpha = \frac{219\,727}{219\,727} \Rightarrow \alpha = 45°$$

Výpočet potenciálu:

Každé elektricky nabité těleso vytváří ve svém okolí elektrostatické pole, které lze popsat jednak pomocí intenzity, jednak pomocí potenciálu. Potenciál elektrostatického pole je veličina skalární ⇒ musíme určit pouze velikost.

Pro potenciál elektrostatického pole: $\varphi = \frac{E_p}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}$

Výsledný potenciál ve středu čtverce je dán prostým součtem potenciálů vytvořených v bodě S od jednotlivých nábojů:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1}{l} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_2}{l} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_3}{l} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_4}{l}$$

kde *l* je vzdálenost náboje *Q*, které pole vytváří, a bodu S, ve kterém potenciál počítáme.
Pro tento případ je *l* stejné pro všechny body (S leží v průsečíku úhlopříček daného čtverce):

$$l = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + a^2)} = \frac{a.\sqrt{2}}{2} = \frac{0{,}09.\sqrt{2}}{2} = 0{,}064\ \text{m}$$

po dosazení:

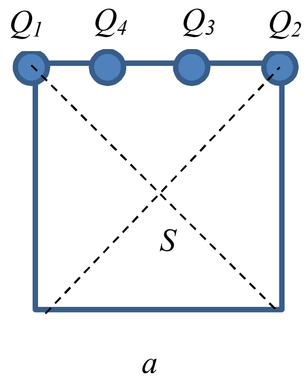
$$\varphi = \frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{100.10^{-9}}{0{,}064} + \frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{-100.10^{-9}}{0{,}064} + \frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{200.10^{-9}}{0{,}064} + \frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{-200.10^{-9}}{0{,}064}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{1}{0{,}064}.(100 - 100 + 200 - 200).10^{-9} = 0\ \text{V}$$

Odpověď: Výsledná intenzita elektrostatického pole ve středu čtverce má velikost 900 V. m^{-1} a míří pod úhlem 45° měřeno od úhlopříčky spojující body 2 a 4.
Výsledný potenciál elektrostatického pole ve středu čtverce má velikost 0 V.

5. Jak se změní hodnoty intenzity a potenciálu z předchozího příkladu, umístíme-li všechny náboje na jednu stranu čtverce? Vzdálenosti mezi náboji jsou 3 cm.

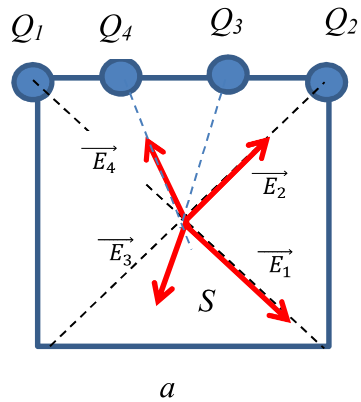
Q_1 = 100 nC
Q_2 =- 100 nC
Q_3 = 200 nC
Q_4 = - 200 nC
a = 9 cm
a_1 = 3 cm
E = ?
φ = ?



Výpočet intenzity:

Vzhledem k předchozímu příkladu se změnilo rozložení nábojů $\Rightarrow$ změní se směr vektorů intenzity od jednotlivých nábojů; velikost zůstává stejná u nábojů Q_1 *a* Q_2 – stále počítáme intenzitu ve středu čtverce, u nábojů Q_3 *a* Q_4 se změnila vzdálenost od bodu, kde chceme intenzitu vypočítat

Výslednou intenzitu elektrostatického pole získáme opět vektorovým součtem intenzit od jednotlivých nábojů – viz obrázek.



Výsledná intenzita v bodě S:

$$\overrightarrow{E_e} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_3} + \overrightarrow{E_4}$$

Směry jsou patrné z obrázku

Velikost -

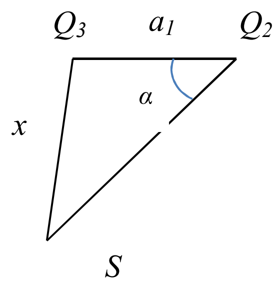
pro náboje Q_1 *a* Q_2 : $\quad E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{l^2}$

kde l je vzdálenost náboje Q_1, resp. Q_2, které pole vytváří, a bodu S, ve kterém intenzitu počítáme. S leží v průsečíku úhlopříček daného čtverce $\Rightarrow$

$$l = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + a^2)} = \frac{a.\sqrt{2}}{2} = \frac{0{,}09.\sqrt{2}}{2} = 0{,}064 \text{ m}$$

pro náboje Q_3 *a* Q_4 : $\quad E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{x^2}$

kde x je vzdálenost náboje Q_3, resp. Q_4, který pole vytváří, a bodu S, ve kterém intenzitu počítáme. Vzdálenost x spočítáme ze vzniklého trojúhelníku pomocí kosinové věty.



Kosinová věta: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.cos\alpha$

Výpočet vzdálenosti *x*: $x^2 = {a_1}^2 + l^2 - 2a_1.l.cos\alpha$

$$x^2 = 0{,}03^2 + 0{,}064^2 - 2.0{,}03.0{,}064.cos45°$$
$$x = 0{,}048 \text{ m}$$

Vzhledem k obrázku: spočítáme zvlášť intenzitu $\overrightarrow{E_{12}}$ a zvlášť intenzitu $\overrightarrow{E_{34}}$

Intenzita $\overrightarrow{E_{12}} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$:

velikost E_1: $E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{l^2} = \left|\frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{100.10^{-9}}{0{,}064^2}\right| = 219\,727 \text{ V.m}^{-1}$

velikost E_2: $E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{l^2} = \left|\frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{100.10^{-9}}{0{,}064^2}\right| = 219\,727 \text{ V.m}^{-1}$

Intenzita $\overrightarrow{E_{12}} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$:

vektory intenzity elektrostatického pole spolu svírají úhel 90°$\Rightarrow$ zde na výpočet stačí Pythagorova věta:

$$E_{12} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

po dosazení: $E_{12} = \sqrt{(219\,727)^2 + (219\,727)^2} = 310\,740 \text{ V.m}^{-1}$

směr: vzhledem k symetrické situaci bude vektor $\overrightarrow{E_{12}}$ mířit pod úhlem 45° doprava měřeno od úhlopříčky čtverce

Intenzita $\overrightarrow{E_{34}} = \overrightarrow{E_3} + \overrightarrow{E_4}$:

velikost E_3: $E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{x^2} = \left|\frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{200.10^{-9}}{0{,}048^2}\right| = 781\,250 \text{ V.m}^{-1}$

velikost E_4: $E_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_4}{x^2} = \left|\frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{200.10^{-9}}{0{,}048^2}\right| = 781\,250 \text{ V.m}^{-1}$

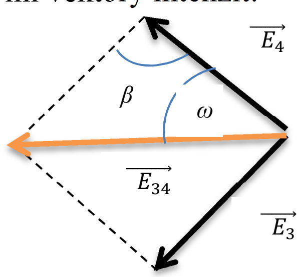
Vzhledem k tomu, že mezi vektory intenzit od nábojů Q_3 a Q_4 jsou tentokrát různé úhly, použijeme na výpočet kosinovou větu:

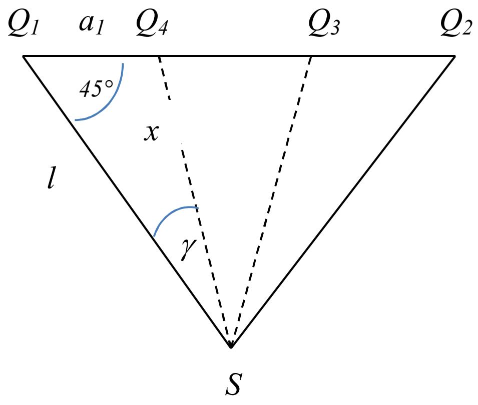
úhel, který svírají vektory $\overrightarrow{E_3}$ *a* $\overrightarrow{E_4}$, je – viz druhý obrázek s vyznačenými vektory intenzit:

$\beta = \gamma + 90° + \gamma$

kde γ je úhel mezi úseky Q_1S a Q_4S, resp. Q_3S a Q_4S

výpočet úhlu γ:





Úhel γ spočítáme pomocí sinové věty: $\frac{\sin\gamma}{a_1} = \frac{\sin 45°}{x}$

$$\sin\gamma = a_1 \frac{\sin 45°}{x}$$

$$\gamma = \arcsin(a_1 \frac{\sin 45°}{x})$$

Po dosazení: $\gamma = \arcsin(a_1 \frac{\sin 45°}{x}) = \arcsin(0{,}03 \frac{\sin 45°}{0{,}048})$

$\gamma = 26{,}23°$

Úhel $\beta = \gamma + 90° + \gamma = 26{,}23° + 90° + 26{,}23°$

$\beta = 142{,}46°$

Pak velikost intenzity E_{34} pomocí kosinové věty: $E_{34}^2 = E_3^2 + E_4^2 - 2E_3.E_4.cos\beta$

po dosazení:

$$E_{34}^2 = 781\,250^{\,2} + 781\,250^{\,2} - 2.781\,250\,.781\,250.\cos 142{,}46°$$

$$E_{34} = 1\,479\,403\ \mathrm{V.m^{-1}}$$

Směr: vzhledem k symetrické situaci bude vektor $\overrightarrow{E_{34}}$ mířit směrem doleva pod úhlem 45° měřeno od úhlopříčky čtverce

Získali jsme dva opačně orientované vektory, které leží v jedné přímce.
Pro velikost výsledné intenzity platí: $E = |E_{12} - E_{34}|$

$$E = |310\,740 - 1\,479\,403\,| = 1\,168\,663\ \mathrm{V.m^{-1}}$$

Směr – vektor intenzity bude mířit ve směru vektoru $\overrightarrow{E_{34}}$ doleva

Výpočet potenciálu:

Výsledný potenciál ve středu čtverce je dán opět prostým součtem potenciálů vytvořených v bodě S od jednotlivých nábojů:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1}{l} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_2}{l} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_3}{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_4}{x}$$

vzdálenosti daných nábojů od středu čtverce, kde potenciál chceme spočítat, jsou l v případě nábojů Q_1 ,Q_2 a x v případě nábojů Q_3 ,Q_4

⇒ potenciál elektrostatického pole:

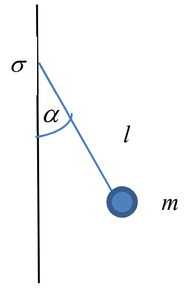
$$\varphi = \frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{1.10^{-9}}{0{,}064}.(100-100) + \frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{1.10^{-9}}{0{,}048}(200-200) = 0\ \mathrm{V}$$

Odpověď: Výsledná intenzita elektrostatického pole ve středu čtverce má velikost $1\,168\,663\ \mathrm{V.m^{-1}}$ a míří doleva pod úhlem 45° měřeno od úhlopříčky. Výsledný potenciál elektrostatického pole ve středu čtverce má velikost 0 V.

Poznámka: pokud by náboje nebyly umístěny symetricky, bylo by nutné také na výpočet intenzity $\overrightarrow{E_{12}}$ použít kosinovou větu – jednou pro zjištění velikosti, podruhé pro zjištění směru. Výslednou intenzitu elektrostatického pole bychom dopočítali také pomocí kosinové věty. Potenciál ve středu čtverce by byl různý od nuly.

6. Kulička o hmotnosti 20 g na provázku délky 20 cm je připevněna jedním koncem k nabité desce s plošnou hustotou náboje 5.10^{-4} C.m^{-2}. Určete úhel, o který se vychýlí od svislého směru, je-li na kuličce náboj 20 nC; deska je postavena svisle a je umístěna ve vzduchu.

$m = 20$ g
$l = 20$ cm
$\sigma = 5.10^{-4}$ C.m^{-2}
$Q = 20$ nC
$\alpha = ?$



Kulička se od svislého směru vychýlí v důsledku odpudivé elektrostatické síly, která působí mezi kladně nabitou deskou a kuličkou s kladným nábojem Q.

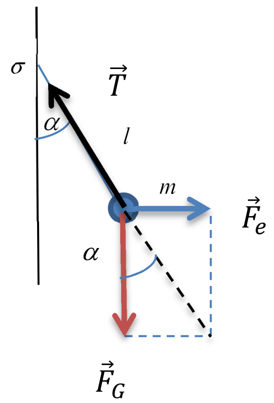
Kulička se vychýlí pod takovým úhlem, že výslednice všech sil, které na ni působí, bude nulová – kulička bude v rovnováze.

Na kuličku působí tyto síly:

odpudivá elektrostatická síla: $\vec{F_e} = \vec{E}.Q$
kde Q je náboj na kuličce, $\vec{E}$ je intenzita elektrostatického pole vytvářená nabitou deskou - pro její velikost: $E = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}$

tíhová síla: $\vec{F_G} = m.\vec{g}$

tahová síla provázku: $\vec{T}$



při rovnováze pak platí: $\vec{F_e} + \vec{F_G} + \vec{T} = \vec{0}$

směry určíme z obrázku: získali jsme vektorový trojúhelník, úhel mezi silou $\vec{F_G}$ a silou $-\vec{T}$ je stejný jako úhel mezi deskou a provázkem

vzhledem k obrázku lze psát: $tg\alpha = \frac{F_e}{F_G}$

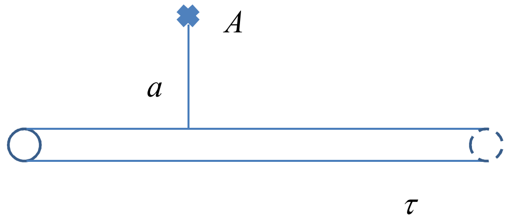
po dosazení: $tg\alpha = \frac{E.Q}{m.g} = \frac{\frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}.Q}{m.g} = \frac{\frac{5.10^{-4}}{2.8,85.10^{-12}}.20.10^{-9}}{0,020.10} = 2,825$

$$\varphi = arctg\ 2,825 = 70,5°$$

Odpověď: Kulička se vychýlí od svislého směru o úhel 70,5° .

7. Určete intenzitu elektrostatického pole v bodě A ve vzdálenosti a od nekonečně dlouhého drátu s délkovou hustotou τ. Výpočet proveďte pomocí vztahu pro intenzitu bodového náboje i pomocí Gaussovy věty.

Vzdálenost a
Délková hustota náboje τ
$\vec{E} = ?$

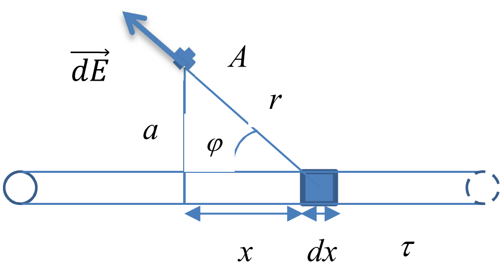


a) *Výpočet pomocí vztahu pro intenzitu bodového náboje*

Intenzita bodového náboje je dána vztahem: $\vec{E}_e(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_e(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{Q}{r^2}\vec{r}_0$

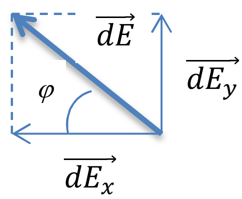
Drát je umístěn ve vzduchu: $\varepsilon_r = 1 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0$

Nekonečně dlouhý drát nelze za hmotný bod považovat, ale lze ho rozdělit na takové elementy, pro které lze používat vztahy definované pro hmotný bod. Rozdělíme tedy drát na velký počet malých úseků o náboji dQ a délce dx. Každý úsek drátu dx je ve vzdálenosti r od bodu A, resp. ve vzdálenosti x od paty kolmice spuštěné z bodu A na drát, - viz obrázek:



Náboj dQ vyvolá v místě bodu A elektrické pole o intenzitě $\overrightarrow{dE}$: $\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{r^2}\vec{r}_0$

Pro zjednodušení dalšího výpočtu rozložíme tuto intenzitu na dvě složky, viz obrázek:
složka $\overrightarrow{dE_x}$, která je rovnoběžná s drátem
složka $\overrightarrow{dE_y}$, která je kolmá na drát



Vzhledem k symetrii se výpočet zjednoduší:
Složky $\overrightarrow{dE_x}$ se vzájemně vyruší, protože ke každému úseku dx v pravé polovině drátu lze nalézt souměrně zvolený úsek drátu v levé polovině. Příslušné složky intenzity mají stejnou velikost, ale opačný směr $\Rightarrow$ výsledná intenzita ve směru rovnoběžném s drátem je tedy nulová: $\overrightarrow{E_x} = 0$.

Výpočet složky $\overrightarrow{E_y}$:

Složky $\overrightarrow{dE_y}$ od úseků v levé i v pravé polovině drátu mají v bodě A stejný směr: jsou kolmé k ose drátu, a tedy souhlasně rovnoběžné, jejich výslednici dostaneme součtem jednotlivých složek:

$$E_y = \int dE_y = \int dE.sin\varphi = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{dQ}{r^2}.sin\varphi$$

Náboj dQ vypočítáme pomocí délkové hustoty náboje: $dQ = \tau.dx$

Pro vzdálenost r platí: $sin\varphi = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{sin\varphi}$

Úhel φ, viz obrázek: $cotg\ \varphi = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a.cotg\ \varphi$

$$dx = a.\left(-\frac{1}{(sin\varphi)^2}\right)d\varphi$$

Úhel φ pro nekonečně dlouhý drát se mění v mezích od π (pokud je element drátu v „nekonečnu“ na levém konci drátu) do 0 (pokud je element drátu v „nekonečnu“ na pravém konci drátu).

Dosadíme do vztahu pro intenzitu:

$$E_y = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{dQ}{r^2}.sin\varphi = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\tau\, dx}{r^2}.sin\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}.\int_\pi^0 \frac{dx.sin\varphi}{r^2}$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}.\int_\pi^0 \frac{a.\left(-\frac{1}{(sin\varphi)^2}\right)d\varphi.sin\varphi}{(\frac{a}{sin\varphi})^2} = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}.\int_\pi^0 \frac{d\varphi.sin\varphi}{a}$$

$$E_y = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0.a}.\int_\pi^0 d\varphi.sin\varphi = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0.a}.[-cos\varphi]_\pi^0$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0.a}.(\cos 0 - \cos\pi)$$

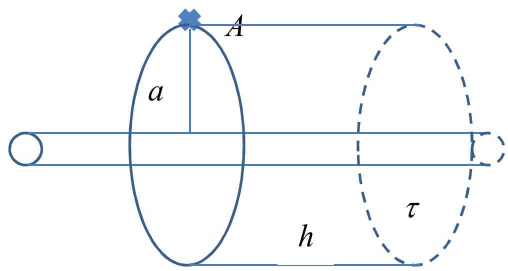
$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0.a}.2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0.a}$$

b) výpočet pomocí Gaussovy věty

Gaussova věta říká: Je-li kolem náboje Q v elektrickém poli sestrojena uzavřená plocha libovolného tvaru, pak celkový počet siločar procházejících touto plochou je roven součinu náboje Q obsaženého uvnitř plochy a hodnoty $\frac{1}{\varepsilon_0}$:

$$\int_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \int_S E.dS.cos\alpha = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

kde α je úhel mezi vektorem intenzity a vektorem normály plochy.

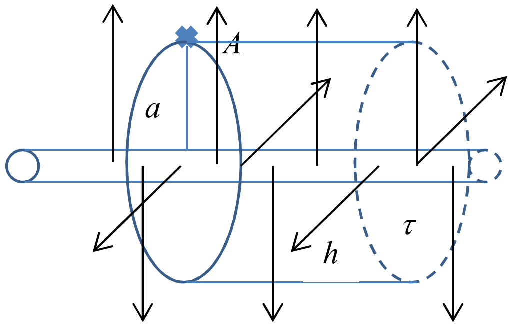


Kolem drátu zvolíme uzavřenou plochu tvaru válce, jehož osa je totožná s osou drátu, poloměr válce je a a výška válce h.

Nekonečně dlouhý nabitý drát kolem sebe vytváří elektrostatické pole, jehož siločarami jsou přímky kolmé k drátu.

Určíme směr vektoru intenzity elektrostatického pole (černé šipky) a plochy válce, viz obrázek:

Podstava válce:
směr vektoru intenzity je rovnoběžný s plochou podstavy, resp. vektor intenzity a vektor normály plochy jsou k sobě kolmé (α = 90°), tok intenzity elektrického pole touto plochou je nulový.



Plášť válce:
směr vektoru intenzity je kolmý k ploše pláště, resp. vektor intenzity a vektor normály plochy jsou rovnoběžné, tok intenzity elektrického pole touto plochou je:

$$E.2.\pi.a.h = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

kde $2.\pi.a.h = S$ je plocha pláště válce, kterou procházejí siločáry elektrostatického pole.

Náboj Q vypočítáme pomocí délkové hustoty náboje τ: $Q = \tau.h$

Pak intenzita pole v bodě A:

$$E = \frac{Q}{2.\pi.a.h.\varepsilon_0} = \frac{\tau.h}{2.\pi.a.h.\varepsilon_0} = \frac{\tau}{2.\pi.a.\varepsilon_0}$$

Odpověď: Velikost intenzity elektrostatického pole v bodě A ve vzdálenosti a od přímého vodiče je $\frac{\tau}{2.\pi.a.\varepsilon_0}$, směr je kolmý k ose drátu.

8. Částice s nábojem $2e^-$ a hmotností 2.10^{-30} kg je vložena do homogenního elektrostatického pole. Po uražení dráhy 25 cm se pohybuje rychlostí 4.10^6 m.s^{-1}. Určete velikost intenzity elektrostatického pole. Pohyb se děje ve vakuu.

$Q = 2e^-$
$m = 2.10^{-30}$ kg
$l = 25$ cm
$v_0 = 0$ m.s^{-1}
$v = 4.10^6$ m.s^{-1}
$E = ?$

Částice s nábojem Q se pohybuje v homogenním elektrostatickém poli vlivem elektrostatické síly $\vec{F_e} = \vec{E}.Q$ – koná rovnoměrně zrychlený pohyb (žádné jiné síly na částici nepůsobí).

Intenzitu, která vystupuje v rovnici pro sílu, máme spočítat $\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F_e}}{Q}$

Úkolem je tedy zjistit velikost elektrostatické síly F_e.
Elektrostatickou sílu určíme pomocí 2. Newtonova zákona: $\vec{F} = m.\vec{a}$
kde $\vec{F}$ je výslednice sil působících na těleso, resp. hmotný bod, $\vec{a}$ je zrychlení, se kterým se těleso pohybuje.

Pro náš příklad: jedinou silou, která na částici působí, je tedy elektrostatická síla $\vec{F_e} = \vec{E}.Q$ $\Rightarrow$

$$\vec{F_e} = m.\vec{a}$$

Pro velikost platí:
$$E.Q = m.a \Rightarrow E = \frac{m.a}{Q}$$

Zrychlení určíme pomocí vztahů popisujících rovnoměrně zrychlený pohyb:

$$s = v_0.t + \frac{1}{2}.a.t^2 + s_0$$
$$v = v_0 + a.t$$

kde $s_0 = 0$ m.

Z druhé rovnice vyloučíme čas t, dosadíme do první rovnice a upravíme:

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$s = v_0.\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}.a.\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

Dosadíme tento vztah do výrazu pro intenzitu E:

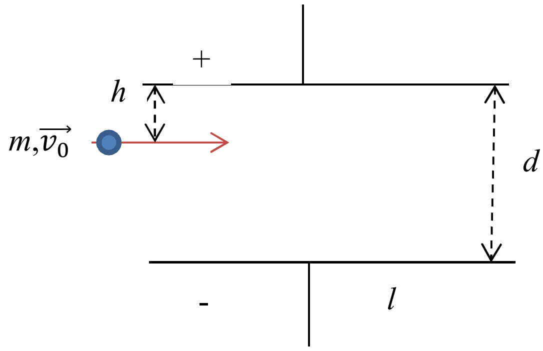
$$E = \frac{m.a}{Q} = \frac{\frac{v^2 - v_0^2}{2s}.m}{Q} = \frac{(v^2 - v_0^2).m}{2.s.Q}$$

po dosazení: $E = \frac{(v^2 - v_0^2).m}{2.s.Q} = \frac{(4.10^6)^2 - 0^2).2.10^{-30}}{2.0,25.2.1,602.10^{-19}} = 200\ \mathrm{V.m^{-1}}$

Odpověď: Velikost intenzity elektrostatického pole je $200\ \mathrm{V.m^{-1}}$.

9. Částice s nábojem *2e*$^-$ a hmotností 2.10^{-30} kg vlétne rychlostí 8.10^6 m.s^{-1} mezi desky kondenzátoru rovnoběžně s nimi v jedné třetině vzdálenosti od kladně nabité desky. Jaké minimální napětí musíme vložit na desky kondenzátoru, aby z něj částice už nevyletěla, je-li délka kondenzátoru 6 cm a vzdálenost desek 1,5 cm? Kondenzátor je umístěn ve vakuu.

$Q = 2e^-$
$m = 2.10^{-30}$ kg
$v_0 = 8.10^6$ m.s^{-1}
$d = 1{,}5$ cm
$h = 1/3\ .1{,}5$ cm $= 0{,}5$ cm
$l = 6$ cm
$U = ?$

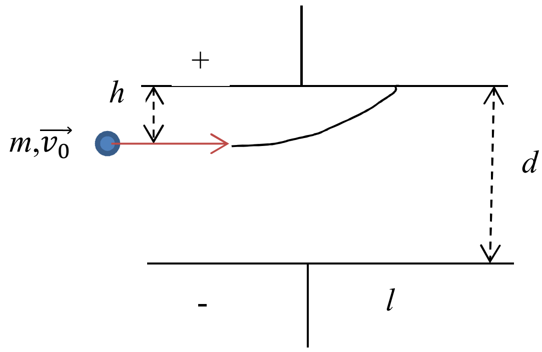


Mezi deskami kondenzátoru je elektrostatické pole o intenzitě *E*, jedná se o homogenní pole (neuvažujeme rozptyl siločar na koncích kondenzátoru).

Napětí, které musíme vložit na desky kondenzátoru, je definováno vztahem: $U = E.d$, kde *E* je intenzita mezi deskami kondenzátoru, *d* je vzdálenost desek

Částice s nábojem *2e*$^-$, která vlétne mezi desky kondenzátoru rovnoběžně s nimi (= kolmo k siločárám elektrostatického pole) bude přitahována kladnou deskou ⇒ pohyb se bude dít po části paraboly.
Jedná se o analogii vrhu vodorovného v homogenním tíhovém poli Země (viz 1. část Sbírky řešených příkladů – kinematika hmotného bodu).

Vrh vodorovný je pohyb složený:



vodorovný směr – pohyb rovnoměrný přímočarý rychlostí v_0: $x = v_0.t$

svislý směr - pohyb rovnoměrně zrychlený z počáteční výšky *h* s konstantním zrychlením *a*: $y = h - \frac{1}{2}.a.t^2$

Aby částice nevyletěla z kondenzátoru, je potřeba, aby dopadla nejdále na konci desky kondenzátoru, tj. ve vzdálenosti *l* od začátku.

máme tedy podmínku: $x \leq l$

$v_0.t \leq l$

Čas určíme pomocí druhé rovnice pro vrh vodorovný: $y = h - \frac{1}{2}.a.t^2$

$$0 = h - \frac{1}{2}.a.t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2.h}{a}}$$

(pozn.: v okamžiku dopadu částice na desku kondenzátoru je $y = 0$)

Zrychlení, které v této rovnici vystupuje, určíme pomocí 2. Newtonova zákona: $\vec{F} = m.\vec{a}$

kde $\vec{F}$ je výslednice sil působících na těleso, resp. hmotný bod, $\vec{a}$ je zrychlení, se kterým se těleso pohybuje

pro náš příklad: jedinou silou, která na částici působí, je elektrostatická síla $\vec{F_e} = \vec{E}.Q \Rightarrow$

pro velikost platí:

$$\vec{F_e} = m.\vec{a}$$

$$F_e = m.a$$

$$E.Q = m.a \Rightarrow a = \frac{E.Q}{m}$$

dosadíme zrychlení i čas do podmínky pro vzdálenost *x*:

$$v_0.\sqrt{\frac{2.h}{a}} \leq l$$

$$v_0.\sqrt{\frac{2.h}{\frac{E.Q}{m}}} = v_0.\sqrt{\frac{2.h.m}{E.Q}} \leq l$$

z této nerovnice vyjádříme velikost intenzity elektrostatického pole mezi deskami kondenzátoru:

$$E \geq \frac{2.h.m}{Q.(\frac{l}{v_0})^2}$$

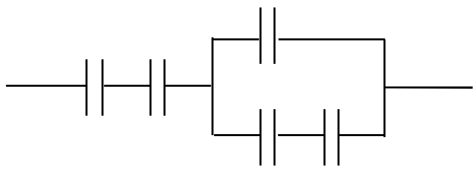
dosadíme do vztahu pro napětí

$$U = E.d \geq \frac{2.h.m}{Q.(\frac{l}{v_0})^2}.d = \frac{2.h.m.v_0^2}{Q.l^2}.d$$

Po dosazení: $U = \frac{2.h.m.v_0^2}{Q.l^2}.d = \frac{2.0{,}005.2.10^{-30}.(8.10^6)^2}{2.1{,}602.10^{-19}.0{,}06^2}.0{,}015 = 16{,}6\ \mathrm{V}$

Odpověď: Na desky kondenzátoru musíme vložit minimální napětí 16,6 V.

10. Určete výslednou kapacitu sestavy kondenzátorů, viz obrázek, mají-li všechny kondenzátory stejnou kapacitu C = 200 pF. Jaký je náboj na celé kombinaci, jestliže na prvním kondenzátoru zleva bude náboj 100 μC?

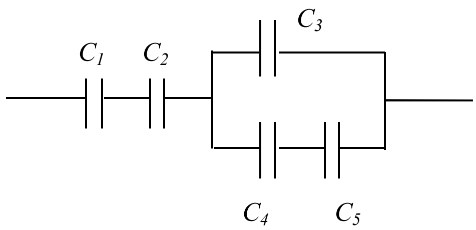


$C_V = ?$
$C = 200$ pF
$Q_V = ?$
$Q_1 = 100$ μC

k určení výsledné kapacity musíme zjistit, jak jsou jednotlivé kondenzátory zapojeny – zda sériově nebo paralelně

výsledná kapacita při sériovém zapojení kondenzátorů - platí: $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

výsledná kapacita při paralelním zapojení kondenzátorů - platí: $C = \sum_i C_i$



jednotlivé kondenzátory označíme po řadě C_1 - C_5

kondenzátory C_4 a C_5 jsou spojeny sériově, kondenzátor C_3 je k těmto dvěma kondenzátorům připojen paralelně a celá tato kombinace C_{345} je spojena sériově s kondenzátory C_1 a C_2

spočítáme postupně kapacity jednotlivých částí:

kapacita C_{45}: sériové zapojení $\frac{1}{C_{45}} = \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5}$

protože velikosti kapacit jsou stejné ⇒ $\frac{1}{C_{45}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C}$

$$C_{45} = \frac{C}{2}$$

kapacita C_{345}: paralelní zapojení $C_{345} = C_3 + C_{45}$

$$C_{345} = C + \frac{C}{2}$$

$$C_{345} = \frac{3C}{2}$$

výsledná kapacita C: sériové zapojení $\frac{1}{C_V} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{345}}$

$$\frac{1}{C_V} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{\frac{3C}{2}}$$

$$\frac{1}{C_V} = \frac{2}{C} + \frac{2}{3C}$$

$$\frac{1}{C_V} = \frac{8}{3C}$$

$$C_V = \frac{3C}{8}$$

po dosazení: $C_V = \frac{3C}{8} = \frac{3.200.10^{-12}}{8} = 75.\,10^{-12}\ \mathrm{F} = 75\ \mathrm{pF}$

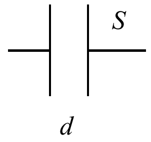
náboj na celé kombinaci:

jedná se o sériové zapojení kondenzátorů C_1, C_2 a C_{345}; při sériovém zapojení je na všech kondenzátorech stejný náboj
vložíme-li tedy na kondenzátor C_1 náboj 100 μC, pak stejný náboj bude na kondenzátoru C_2 i na kombinaci C_{345}
⇒ náboj na celé kombinaci je 100 μC

Odpověď: Výsledná kapacita sestavy kondenzátorů je 75 pF, náboj na celé kombinaci je 100 μC.

11. Určete výslednou kapacitu deskového kondenzátoru, je-li plocha desek 100 cm^2 a jejich vzdálenost 5 mm. Jak se změní kapacita kondenzátoru, vložíme-li rovnoběžně mezi desky kondenzátoru dielektrikum tloušťky 1 mm s relativní permitivitou 5 do vzdálenosti 1 mm od jedné desky.

S = 100 cm^2
d = 5 mm
C_0 = ?
t = 1 mm
ε_r = 5
x = 1 mm
C = ?

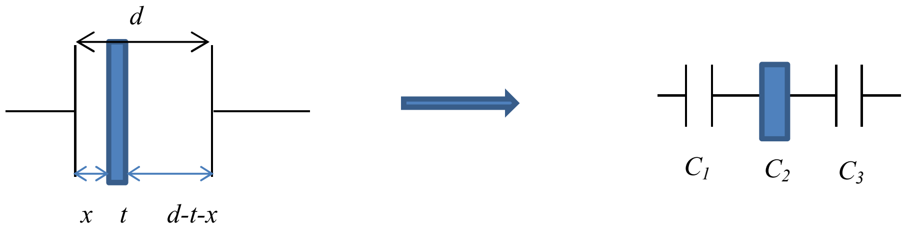


Elektrická kapacita vyjadřuje schopnost vodiče uchovat elektrický náboj. Čím je kapacita větší, tím větší množství náboje může být na vodiči. Elektrická kapacita je závislá na tvaru a velikosti tělesa a na prostředí, v němž se nachází.

Pro kapacitu deskového kondenzátoru bez dielektrika je definován vztah: $C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$, resp. pro kapacitu deskového kondenzátoru s dielektrikem je definován vztah: $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$,
kde S je plocha desek, d jejich vzdálenost, ε_r relativní permitivita.

pro náš příklad – po dosazení: $C_0 = 8{,}85.10^{-12} \frac{100.10^{-4}}{0{,}005} = 17{,}7.10^{-12}$ F $= 17{,}7$ pF

Vložíme-li mezi desky kondenzátoru dielektrikum, viz obrázek, vznikne sériové zapojení tří kondenzátorů: první kondenzátor je bez dielektrika a má vzdálenost desek x, druhý kondenzátor je s dielektrikem - vzdálenost desek je t a třetí kondenzátor je opět bez dielektrika a má vzdálenost desek d-t-x; situaci můžeme překreslit následovně



pro výpočet výsledné kapacity při tomto zapojení použijeme vztah pro sériové zapojení kondenzátorů:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

vyjádříme kapacity jednotlivých kondenzátorů: jde stále o deskové kondenzátory - bez dielektrika v případě C_1 a C_3 a deskový kondenzátor s dielektrikem v případě C_2

kapacita C_1: $C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{x}$

kapacita C_2: $C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{t}$

kapacita C_3: $C_3 = \varepsilon_0 \frac{S}{d-t-x}$

dosadíme do vztahu pro výslednou kapacitu a upravíme:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_0 \frac{S}{x}} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{t}} + \frac{1}{\varepsilon_0 \frac{S}{d-t-x}}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_0 . S}\left(x + \frac{t}{\varepsilon_r} + d - t - x\right)$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 . S}{d + t.\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)}$$

po dosazení: $C = \frac{8{,}85.10^{-12}.100.10^{-4}}{0{,}005 + 0{,}001.(\frac{1}{5} - 1)} = 21{,}1.10^{-12}\ \mathrm{F} = 21{,}1\ \mathrm{pF}$

Odpověď: Kapacita deskového kondenzátoru bez dielektrika je 17,7 pF, po vložení dielektrika je 21,1 pF.

Poznámka: ve výsledném vztahu pro kapacitu s vloženým dielektrikem se nevyskytuje vzdálenost *x,* do které jsme dielektrikum vložili ⇒ pokud plocha desek vloženého dielektrika je shodná s plochou desek kondenzátoru a dielektrikum je vloženo rovnoběžně s deskami kondenzátoru, pak nezávisí na poloze, do které dielektrikum vložíme – situaci si pak lze představit jako dva sériově zapojené kondenzátory: jeden s dielektrikem a druhý bez dielektrika

12. Určete práci potřebnou na přemístění tří nábojů o velikostech $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 10$ nC z nekonečna do vrcholů rovnostranného trojúhelníku o straně 10 cm.

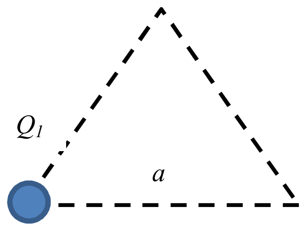
$W = ?$
$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 10$ nC
$a = 10$ cm

Předpokládáme, že náboje jsou jak v nekonečnu, tak ve vzniklém uspořádání v klidu. Pak práce, kterou musí vykonat vnější síla proti silám pole při přemístění nábojů z nekonečna do vrcholů rovnostranného trojúhelníku, je rovna potenciální energii soustavy: $W = E_p$

pro potenciální energii dvojice nábojů platí: $E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{r}$
kde Q_1, Q_2 jsou náboje, r jejich vzájemná vzdálenost a ε je permitivita prostředí

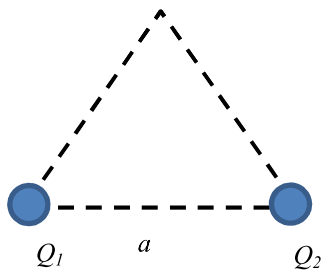
náboje budeme do vrcholů rovnostranného trojúhelníku přesunovat postupně:

přemístění prvního náboje $\Rightarrow$ není potřeba vykonat proti silám pole žádnou práci

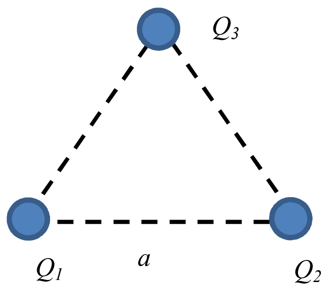


přemístění druhého náboje $\Rightarrow$ první náboj vytváří ve svém okolí elektrostatické pole; při přemístění druhého náboje z nekonečna do vrcholu rovnostranného trojúhelníku musí vykonat vnější síla práci, která je rovna potenciální energii soustavy dvou nábojů:

$$E_{p12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{a}$$



přemístění třetího náboje $\Rightarrow$ první i druhý náboj vytváří ve svém okolí elektrostatické pole; při přemístění třetího náboje z nekonečna do vrcholu rovnostranného trojúhelníku musí vykonat vnější síla práci, která je rovna součtu dvou prací: práce na přiblížení náboje Q_3 z nekonečna k náboji Q_1 a práce na přiblížení náboje Q_3 z nekonečna k náboji Q_2



$$E_{p123} = E_{p13} + E_{p23}$$

$$E_{p123} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_3}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_2 Q_3}{a}$$

Celková potenciální energie soustavy tří nábojů, resp. práce, kterou musí vykonat vnější síla na přemístění tří nábojů z nekonečna do dané konfigurace, je dána součtem potenciálních energií $E_{p12}\ a\ E_{p123}$:

$$E_p = W = E_{p12} + E_{p123}$$

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1Q_2}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1Q_3}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_2Q_3}{a}$$

po dosazení:

$$E_p = \frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{10.10^{-9}.10.10^{-9}}{0{,}1} + \frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{10.10^{-9}.10.10^{-9}}{0{,}1} + \frac{1}{4\pi.8{,}85.10^{-12}}\frac{10.10^{-9}.10.10^{-9}}{0{,}1}$$

$$E_p = 2{,}7.10^{-5}\ \mathrm{J}$$

Odpověď: Práci potřebná na přemístění nábojů je $2{,}7.10^{-5}$ J.

Poznámka: Celková potenciální energie soustavy tří nábojů je rovna součtu potenciálních energií tří dvojic nábojů, které lze z daných nábojů vytvořit. Tento součet je nezávislý na pořadí nábojů ve dvojicích, resp. na pořadí, ve kterém náboje přesouváme.

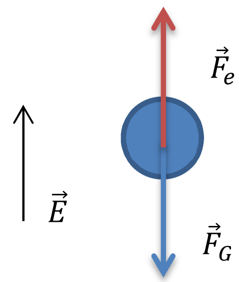
13. Vodivá koule o poloměru 10 cm je nabita na potenciál 1000 V a umístěna do elektrického pole o intenzitě 500 V.m^{-1}. Určete hmotnost koule tak, aby se v daném poli (ve vakuu) volně vznášela.

---

r = 10 cm
φ = 1000 V
E = 500 V.m^{-1}
m = ?

Aby se koule volně vznášela, nesmí na ni působit žádná síla, resp. výslednice všech sil, které na kouli působí, se musí rovnat nule

na kouli působí tyto síly:



tíhová síla: $\overrightarrow{F_G} = m.\vec{g}$, pro její velikost: $F_G = m.g$

elektrostatická síla: $\overrightarrow{F_e} = Q.\vec{E}$, pro její velikost: $F_e = Q.E$

kde Q je náboj koule, E je intenzita elektrostatického pole

podmínka rovnováhy: $\overrightarrow{F_e} + \overrightarrow{F_G} = \vec{0}$

směr je patrný z obrázku: jedná se o dva nesouhlasně rovnoběžné vektory ⇒

$$F_G - F_e = 0$$
$$m.g - Q.E = 0$$

pro hmotnost koule pak dostaneme $m = \frac{Q.E}{g}$:

náboj na povrchu koule, který v této rovnici neznáme, vypočítáme pomocí potenciálu koule φ:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

$$Q = 4\pi\varepsilon_0.r.\varphi$$

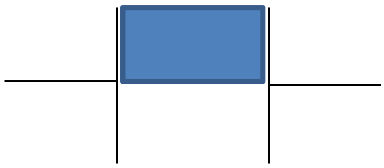
hmotnost koule: $m = \frac{Q.E}{g} = \frac{4\pi\varepsilon_0.r.\varphi.E}{g}$

po dosazení: $m = \frac{4\pi\varepsilon_0.r.\varphi.E}{g} = \frac{4\pi.8{,}85.10^{-12}.0{,}1.1000.500}{10} = 5{,}56.10^{-7}\ \text{kg} = 0{,}56\ \text{mg}$

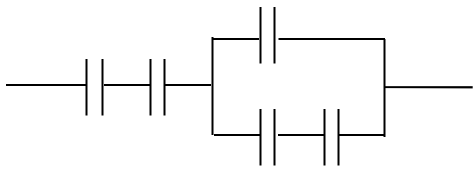
Odpověď: Hmotnost koule by byla 0,56 mg.

Autotest:

1. Náboj Q je rozdělen na dvě části, které jsou od sebe vzdáleny do jisté vzdálenosti. V jakém poměru musí být náboje rozděleny, aby elektrostatické odpuzování mezi nimi bylo maximální?
2. Nakreslete graf závislosti intenzity elektrostatického pole osamocené vodivé koule o poloměru R s plošnou hustotou náboje 5.10^{-4} C.m^{-2} na vzdálenosti r od středu koule.
3. Jak se změní kapacita kondenzátoru, viz příklad 11, vložíme-li mezi desky kondenzátoru dielektrikum s relativní permitivitou 5 a tloušťkou 5 mm, viz obrázek.



4. Bodové náboje o velikosti 100 nC, -100 nC, 200 nC a -200 nC se nacházejí ve středech stran čtverce o straně 9 cm. Určete velikost a směr intenzity elektrostatického pole ve středu čtverce. Jaká je velikost potenciálu v tomto bodě?
5. Jaký je náboj na kondenzátoru C_3, vložíme-li na první kondenzátor zleva náboj 100 μC? Další hodnoty, viz př. č. 10.



Výsledky autotestu:

1. obě části budou mít náboj $q = Q/2$
2. řešení je obdobné příkladu č.4 z kapitoly Gravitační pole
3. C = 0,53 pF
4. E = 28 284 V.m^{-1}, φ = 0 V)
5. Q= 66,7 μC

III. Elektrický proud

Teorie:

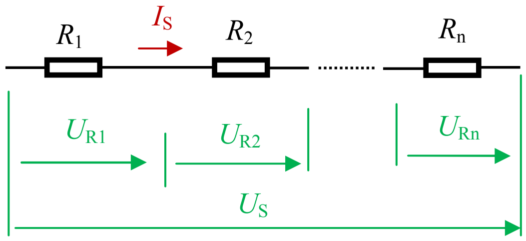
Elektrický proud je definován velikostí náboje dQ, který projde jistou plochou S za dobu dt: $I = \frac{dQ}{dt}$. Pokud je elektrický proud I konstantní v čase, je: $I = \frac{Q}{t}$, kde Q je celkový náboj částic, které projdou plochou S za čas t.

Elektrický odpor vypočteme pomocí tzv. Ohmova zákona jako podíl elektrického napětí U a elektrického proudu I: $R = \frac{U}{I}$.

Elektrický odpor vodiče o délce l a plošném průřezu S lze vypočítat jako $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$, kde ρ je rezistivita (měrný elektrický odpor) vodiče.

Závislost elektrického odporu vodiče R na teplotě t můžeme pro malé intervavaly teplot považovat za lineární, tj.: $R = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t)$, kde R_0 je elektrický odpor vodiče při teplotě 0 °C, t je teplota ve °C a α teplotní součinitel odporu.

Sériové zapojení rezistorů (viz. obr. 3.1):



Obrázek 3.1

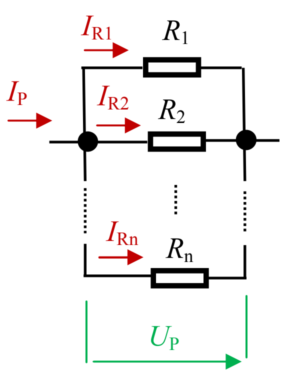
Elektrický proud tekoucí všemi prvky obvodu je stejný: $I_S = I_{R_1} = I_{R_2} = \cdots = I_{R_n}$

Elektrická napětí na jednotlivých rezistorech se sčítají, tj.: $U_S = U_{R_1} + U_{R_2} + \cdots + U_{R_n}$

Elektrický odpor sériového zapojení je roven součtu elektrických odporů jednotlivých prvků: $R_S = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$

Paralelní zapojení rezistorů (viz. obr. 3.2):

Obrázek 3.2



Elektrické napětí je na všech prvcích obvodu stejné:

$U_P = U_{R_1} = U_{R_2} = \cdots = U_{R_n}$

Elektrické proudy se sčítají: $I_P = I_{R_1} + I_{R_2} + \cdots + I_{R_n}$

Elektrický odpor paralelního zapojení rezistorů vypočteme pomocí rovnice:

$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$

Výkon P stejnosměrného elektrického proudu *I* při elektrickém napětí *U* a elektrickém odporu *R* je:

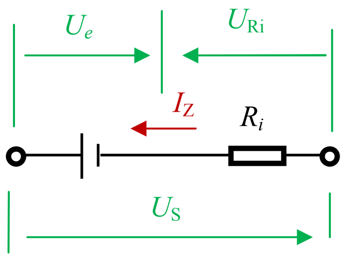
$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = R \cdot I^2.$

Energie elektrického proudu za čas *t* je: $E_{el} = U \cdot I \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t = R \cdot I^2 \cdot t$

Jouleovo teplo, tj. teplo, které vzniká ve vodiči při průchodu elektrického proudu, je:

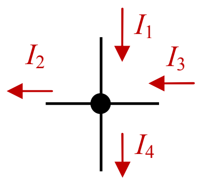
$$Q_J = U \cdot I \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t = R \cdot I^2 \cdot t$$

Náhradní schéma skutečného zdroje elekrického napětí, který dodává proud I_Z, je sériové zapojení ideálního zdroje s elektromotorickým napětím U_e a vnitřního odporu R_i. Napětí na svorkách skutečného zdroje nazýváme svorkové a vypočteme jej jako elektromotorické napětí snížené o úbytek napětí na vnitřním odporu zdroje, tj.: $U_S = U_e - R_i \cdot I_Z$ (viz. obr. 3.3).

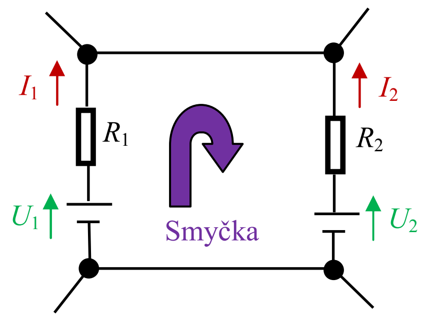


Obrázek 3.3

Kirchhoffovy zákony:



Obrázek 3.4



Obrázek 3.5

První Kirchhoffův zákon: součet proudů do uzlu vtékajících je roven součtu proudů z uzlu vytékajících. Pro obrázek 3.4 je tedy: $I_1 + I_3 = I_2 + I_4$

Druhý Kirchhoffův zákon říká, že součet úbytků napětí na rezistorech v uzavřené smyčce je roven součtu elektromotorických napětí zdrojů, přičemž je potřeba dávat pozor na znaménka. Pokud je zvolený směr postupu ve smyčce stejný jako je elektromotorické napětí, resp. jako je směr proudu, pak je bereme kladně. V opačném případě se znaménkem mínus. Pro obrázek 3.5 je tedy:

$$U_1 - U_2 = R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2$$

1. Jaký elektrický náboj projde vodičem za čas 30 s, jestliže
   a) vodičem prochází stálý proud 2 A.
   b) proud procházející vodičem rovnoměrně klesá z (maximální) hodnoty I_{max} = 2 A na 0 A.

Řešení:

Pro obě situace je základem uvědomit si, jak ze známé závislosti elektrického proudu na čase vypočítat prošlý elektrický náboj. Elektrický proud I je definován jako časová změna elektrického náboje Q. V diferenciálním tvaru:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Neznámou v této rovnici je elektrický náboj. Rovnici nejprve upravíme do tvaru:

$$dQ = Idt$$

Celkový náboj prošlý za určitý čas pak vypočteme integrací:

$$Q = \int Idt = \int_0^T Idt$$

Meze integrace jsou v obou případech od nuly do T = 30 s.

a) I_K = 2 A (konstanta)
   $T = t$ = 30 s
   Q = ?

V případě, že vodičem prochází konstantní proud, je $I = I_K$ = 2 A konstanta, kterou lze vytknout před integrál, tj.:

$$Q = \int_0^T I_K dt = I_K \cdot \int_0^T dt = I_K \cdot [t]_0^T = I_K \cdot T$$

Tento vztah dostaneme i použitím zjednodušené definice elektrického proudu, která platí pro konstantní elektrický proud, tj. využitím rovnice

$$I = \frac{Q}{t} \rightarrow Q = I \cdot t = I_K \cdot T$$

Po dosazení $Q = 2 \cdot 30 = 60$ C

Odpověď: V případě konstantního proudu 2 A projde vodičem za čas 30 s elektrický náboj 60 C.

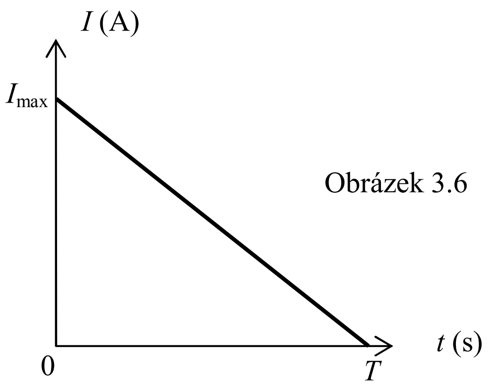
b) $I_{max} = 2$ A
$I_{min} = 0$ A
$T = 30$ s
$Q = ?$

Protože proud procházející vodičem není konstantní, je nutné použít pro výpočet elektrického náboje integrální tvar

$$Q = \int I(t)dt,$$

ve kterém musíme určit závislost elektrického proudu na čase $I(t)$. Meze integrace jsou stejně jako v předchozím případě od nuly do $T = 30$ s.

Závislost elektrického proudu na čase je lineární a jejím grafem je přímka, která prochází body o souřadnicích [0; I_{max}] (v čase $t = 0$ s je hodnota proudu rovna $I_{max} = 2$ A) a [T; 0] (v čase $T = 30$ s je hodnota proudu rovna $I = 0$ A) – viz. obr. 3.6.



Obrázek 3.6

Použijeme – li například směrnicový tvar přímky, tj. rovnici $y = k \cdot x + q$, resp. $I = k \cdot t + q$ ve které nezávisle proměnnou je čas t a závisle proměnnou je elektrický proud I, můžeme do této rovnice dosadit dva body, kterými přímka prochází a získat neznámé k a q.

Dosadíme-li bod [0; I_{max}] do rovnice přímky $y = k \cdot x + q$ dostaneme rovnici $I_{max} = k \cdot 0 + q$,
tj. $q = I_{max} = 2$ A.

Dosadíme-li do stejné rovnice bod [T; 0] dostaneme $0 = k \cdot T + I_{max}$, tj.
$k = -\frac{I_{max}}{T} = -\frac{2}{30} = -\frac{1}{15}$.

Závislost elektrického proudu na čase lze v našem případě tedy popsat rovnicí:

$$I(t) = -\frac{I_{max}}{T} \cdot t + I_{max}$$

Dosadíme-li čísla, je tato rovnice:

$$I(t) = -\frac{1}{15} \cdot t + 2$$

Pro výpočet prošlého elektrického náboje dosadíme tuto rovnici do integrálu uvedeného v úvodu příkladu:

$$Q = \int I(t)dt = \int_0^T \left(-\frac{I_{max}}{T} \cdot t + I_{max}\right) dt$$

Integrál upravíme:

$$Q = \int_0^T \left(-\frac{I_{max}}{T} \cdot t\right) dt + \int_0^T I_{max}\, dt = -\frac{I_{max}}{T} \cdot \int_0^T t dt + I_{max} \cdot \int_0^T dt$$

Integrací dostaneme:

$$Q = -\frac{I_{max}}{T} \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T + I_{max} \cdot [t]_0^T = -\frac{I_{max}}{T} \cdot \frac{T^2}{2} + I_{max} \cdot T = -\frac{I_{max} \cdot T}{2} + I_{max} \cdot T$$
$$= \frac{I_{max} \cdot T}{2}$$

Po dosazení:

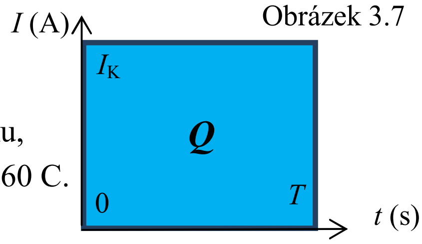
$$Q = \frac{I_{max} \cdot T}{2} = \frac{2 \cdot 30}{2} = 30 \text{ C}$$

Odpověď: Pokud proud rovnoměrně klesá z maximální hodnoty 2 A na 0 A za 30 s, projde vodičem za tento čas elektrický náboj 30 C.

Poznámka: Obě zmíněné situace lze vyřešit také tím, že si uvědomíme geometrický význam (určitého) integrálu. Tím je plocha pod křivkou grafu.

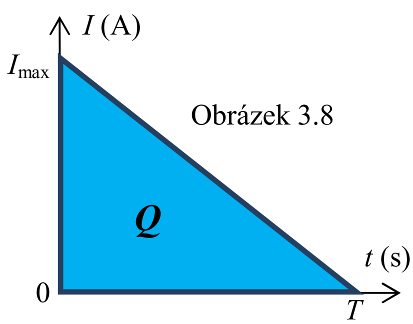
Nakreslíme si závislost elektrického proudu na čase v prvním a v druhém případě.

a) V prvním případě je touto křivkou konstantní přímka a plochou pod křivkou (vyznačena barevně – viz. obr. 3.7) je obdélník se stranami I_K = 2 A a T = 30 s. Plocha obdélníku, která má fyzikální význam hledaného náboje, je Q = 2·30 = 60 C.



Obrázek 3.7

b) V druhém případě je touto křivkou klesající přímka a plochou pod křivkou (vyznačena barevně – viz. obr. 3.8) je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami I_{max} = 2 A a T = 30 s. Plocha tohoto trojúhelníku, která má fyzikální význam hledaného náboje, je Q = ½·2·30 = 30 C.



Obrázek 3.8

2. Na kladnou elektrodu elektronky (anodu) dopadají elektrony určitou rychlostí. Prochází-li obvodem proud 50 mA, tak se za dobu 30 min uvolní na anodě teplo 10 J. Vypočtěte, jakou rychlostí dopadají elektrony na anodu za předpokladu, že rychlost všech elektronů dopadajících na anodu je stejná.

$I = 0{,}05$ A
$t = 1800$ s
$Q_J = 10$ J
$v = ?$

Řešení:
Elektron jako elementární nositel náboje má hmotnost $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg a náboj $-e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

Elektrický proud procházející elektronkou je tvořen velkým počtem volných nositelů částic (elektronů), které projdou určitou plochou obvodu za určitý čas. Je-li elektrický proud procházející obvodem konstantní, lze jej vyjádřit jako podíl elektrického náboje Q za čas t. Tedy:

$$I = \frac{Q}{t}$$

Za čas t = 30 min projde obvodem N elektronů (N je velké číslo, řádově 10^{18} i více), každý elektron je nositelem elementárního náboje e. Celkový náboj prošlý obvodem můžeme tedy vyjádřit jako:

$$Q = N \cdot e$$

a dosadit do rovnice pro elektrický proud:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{N \cdot e}{t}$$

Z této rovnice můžeme vypočítat počet elektronů, který projde obvodem (elektronkou) za čas t:

$$N = \frac{I \cdot t}{e} = \frac{0{,}05 \cdot 1800}{1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 5{,}62 \cdot 10^{20}$$

Teplo Q_J uvolňující se na anodě elektronky je dle zadání vytvářeno dopadajícími elektrony. Každý z elektronů, který na anodu dopadne, má hmotnost m_e a rychlost v a předá dopadem anodě svoji kinetickou energii $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$, díky které se anoda ohřívá. Protože za daný čas dopadne na anodu N elektronů, můžeme pro vzniklé teplo psát:

$$Q_J = N \cdot \Delta E_k = N \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - 0\right)$$

Kinetická energie každého z N dopadlých elektronů před jeho dopadem je $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ a po jeho dopadu je 0 J.

Dosadíme-li z předchozího vyjádřený počet dopadlých elektronů N, bude teplo:

$$Q_J = \frac{I \cdot t}{e} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit neznámou rychlost elektronů (v) uvnitř elektronky:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot Q_J}{I \cdot t \cdot m_e}}$$

Číselně:

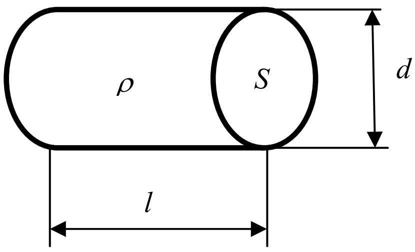
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 10}{0{,}05 \cdot 1800 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}}} = 1{,}98 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Odpověď: Elektrony dopadají na anodu elektronky rychlostí $2 \cdot 10^5$ m·s^{-1}.

Poznámka: Driftová rychlost, tj. rychlost, kterou se elektrony pohybují při průchodu elektrického proudu uvnitř kovového vodiče, je řádově 10^{-2} m·s^{-1}, tedy o 7 řádů menší než rychlost elektronů dopadajících na anodu elektronky v našem příkladu. Důvodem tohoto výrazného rozdílu je to, že elektrony uvnitř kovu jsou zpomalovány nárazy s kmitajícími atomy mřížky kovu, zatímco uvnitř elektronky je téměř vakuum a srážky, které elektrony zpomalují, jsou podstatně méně časté.

3. Drát s kruhovým průřezem, který má délku 20 m a průměr 1,5 mm, má odpor 0,3 Ω. Jaký průměr musí mít drát s kruhovým průřezem ze stejného materiálu o dvojnásobné délce, aby měl stejný elektrický odpor? Vypočtěte rezistivitu (tj. měrný elektrický odpor) obou vodičů.

Obrázek 3.9



$l_1 = 20$ m
$d_1 = 1{,}5$ mm
$R_1 = 0{,}3\ \Omega$
$l_2 = 2 \cdot l_1 = 40$ m
$R_2 = R_1 = 0{,}3\ \Omega$
$d_2 = ?$
$\rho_1 = \rho_2 = \rho = ?$

Řešení:

Elektrický odpor drátu z materiálu s rezistivitou ρ o délce l a plošném průřezu S (viz. obr. 3.9) lze vypočítat jako

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

Pro původní rozměry drátu je tedy:

$$R_1 = \rho \cdot \frac{l_1}{S_1}$$

Průřezem drátu je kruh o ploše $S = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$

Pro elektrický odpor tedy můžeme psát:

$$R_1 = \rho \cdot \frac{4 \cdot l_1}{\pi \cdot d_1^2}$$

Při změně rozměrů (beze změny použitého vodiče) můžeme tuto rovnici použít a vypočítat elektrický odpor vodiče se změněnými rozměry jako:

$$R_2 = \rho \cdot \frac{4 \cdot l_2}{\pi \cdot d_2^2}$$

Ze zadání chceme, aby se elektrický odpor vodiče nezměnil, tj. aby platilo $R_1 = R_2$.

S využitím upravených rovnic pro výpočet elektrického odporu vodiče kruhového průřezu musí tedy platit rovnost:

$$\rho \cdot \frac{4 \cdot l_1}{\pi \cdot d_1^2} = \rho \cdot \frac{4 \cdot l_2}{\pi \cdot d_2^2}$$

ze které vyjádříme neznámou d_2:

$$d_2 = d_1 \cdot \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$$

Délka $l_2 = 2 \cdot l_1$:

$$d_2 = d_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l_1}{l_1}} = \sqrt{2} \cdot d_1 = \sqrt{2} \cdot 1{,}5\ \mathrm{mm} = 2{,}12\ \mathrm{mm}$$

Rezistivitu použitého vodiče ρ můžeme vyjádřit z rovnice pro elektrický odpor vodiče:

$$R_1 = \rho \cdot \frac{4 \cdot l_1}{\pi \cdot d_1^2} \rightarrow \rho = \frac{\pi \cdot d_1^2 \cdot R_1}{4 \cdot l_1}$$

Dosadíme

$$\rho = \frac{3{,}14 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0{,}3}{4 \cdot 20} = 2{,}65 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$$

Odpověď: Aby se elektrický odpor vodiče při prodloužení jeho délky na dvojnásobek nezměnil, musí se jeho průměr zvětšit $\sqrt{2}$ krát, tj. z 1,5 mm na 2,12 mm. Rezistivita použitých vodičů je rovna $2{,}65 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$.

Poznámka: Materiálem v příkladu zmíněných vodičů by mohl být hliník, jehož rezistivita je $2{,}67 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$.

4. Na kolik stejných částí je třeba rozřezat drát délky l a průřezu S, jehož odpor je R_A = 216 Ω, abychom při následném paralelním zapojení všech těchto částí dostali výsledný odpor R_B = 6 Ω?

R_A = 216 Ω
R_B = 6 Ω
n = ?

Řešení:

Rezistivita materiálu, ze kterého je vyroben drát, je ρ.

Původní situace:

Délka drátu l, drát (například kruhového) průřezu S (viz. obr. 3.10).

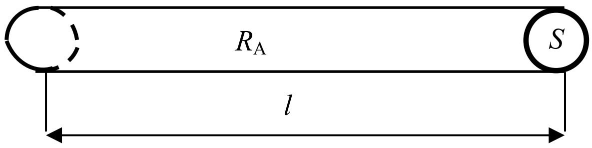
Elektrický odpor takovéhoto drátu vypočteme dle vzorce:

$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$

Tedy

$R_A = 216\ \Omega = \rho \cdot \frac{l}{S}$

Obrázek 3.10

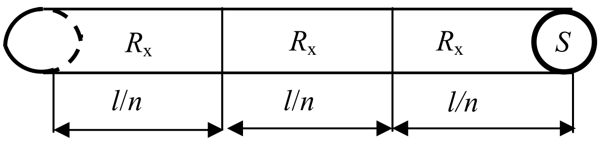


Tento drát rozřežeme na n dílů. Délka každé části je l/n, průřez drátu S zůstal nezměněn (viz. obr. 3.11, ve kterém je pro představu zvoleno n = 3).

Elektrický odpor každé části drátu (označíme R_x) je:

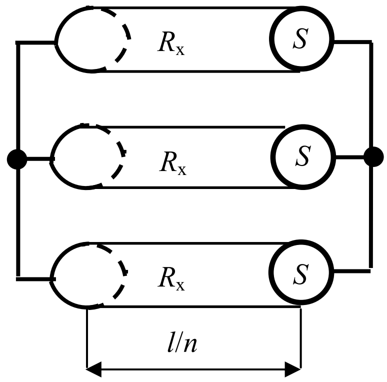
$$R_x = \rho \cdot \frac{l/n}{S} = \rho \cdot \frac{l}{S} \cdot \frac{1}{n} = \frac{R_A}{n} = \frac{216}{n}$$

Obrázek 3.11



Pokud n těchto nařezaných částí původního drátu, každá s odporem R_x, zapojíme paralelně (viz. obr. 3.12, ve kterém stále bereme n = 3), můžeme pro výpočet výsledného odporu použít vzorec pro výpočet odporu paralelně zapojených rezistorů:

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$



Obrázek 3.12

V našem případě je $R_1 = R_2 = \ldots = R_n = R_x$ a výsledný elektrický odpor $R_p = R_B = 6\ \Omega$ a tedy

$$\frac{1}{R_B} = \underbrace{\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_x} + \cdots + \frac{1}{R_x}}_{n \text{ krát}} = \frac{n}{R_x}$$

Vyjádříme R_B:

$$R_B = \frac{R_x}{n}$$

Dosadíme za $R_x = \frac{R_A}{n}$ a dostaneme

$$R_B = \frac{R_A}{n^2}$$

Hledaný počet dílů je tedy:

$$n = \sqrt{\frac{R_A}{R_B}}$$

Číselně:

$$n = \sqrt{\frac{216}{6}} = \sqrt{36} = 6$$

Odpověď: Drát s elektrickým odporem 216 Ω musíme nařezat na 6 stejně dlouhých dílů, abychom po jejich paralelním zapojení získali vodič s elektrickým odporem 6 Ω.

5. Elektrické napětí zdroje použitého při zahřívání elektrické pece z původní teploty 0 °C na konečnou teplotu 1000 °C je konstantní. Jak se změní elektrický proud tekoucí obvodem (topným vodičem), je-li teplotní koeficient odporu topného drátu $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$?

$t_0 = 0$ °C
$t_1 = 1000$ °C
$\alpha = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$
U = konst.
$I_1/I_0 = ?$

Řešení: Odpor kovového vodiče s rostoucí teplotou roste. Použijeme nejjednodušší (tj. lineární) závislost elektrického odporu na teplotě, pro kterou platí rovnice:

$$R = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t)$$

ve které R_0 je elektrický odpor při teplotě $t_0 = 0$ °C a teplotu t dosazujeme ve °C.

Odpor topného drátu R_1 při teplotě $t_1 = 1000$ °C vypočteme jako:

$$R_1 = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t_1)$$

Elektrický odpor můžeme vyjádřit pomocí Ohmova zákona jako podíl elektrického napětí U a elektrického proudu I. Dosadíme za elektrické odpory do předchozí rovnice:

$$\frac{U}{I_1} = \frac{U}{I_0} \cdot (1 + \alpha \cdot t_1)$$

kde jsme využili toho, že elektrické napětí zdroje U se nemění. Z rovnice lze vyjádřit podíl I_1/I_0:

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{1 + \alpha \cdot t_1}$$

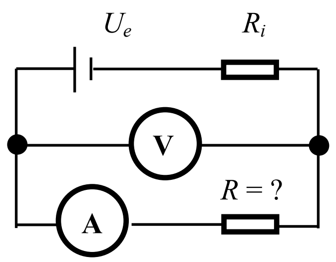
Číselně

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{1 + 4 \cdot 10^{-3} \cdot 1000} = \frac{1}{5}$$

Odpověď: Při zahřátí elektrické pece na 1000 °C se zmenší elektrický proud, který pecí teče, 5 krát.

Poznámka: Rozdíl teplot $\Delta t = t_1 - t_0 = 1000$ K je již výrazný. Lineární závislost elektrického odporu na teplotě tedy již nebude úplně správně popisovat změnu elektrického odporu topného vodiče a bylo by lepší zvětšit stupeň polynomu v této závislosti. Přesnější by bylo použití závislosti kvadratické $R = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t + \beta \cdot t^2)$ nebo kubické $R = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t + \beta \cdot t^2 + \gamma \cdot t^3)$.

6. Jaký je odpor rezistoru R v zapojení dle obr. 3.13, je-li elektromotorické napětí zdroje U_e = 36 V, vnitřní odpor zdroje R_i = 1 Ω, odpor voltmetru R_V = 1000 Ω a odpor ampérmetru R_A = 5 Ω? Voltmetr ukazuje údaj 35 V.

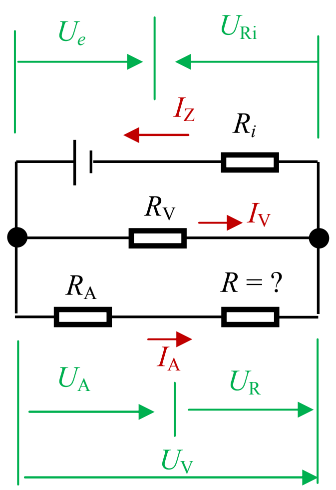


Obrázek 3.13

U_e = 36 V
R_i = 1 Ω
R_V = 1000 Ω
R_A = 5 Ω
U_V = 35 V
R = ?

Řešení: Voltmetr si můžeme pro výpočet představit jako rezistor s elektrický odporem R_V = 1000 Ω, ampérmetr jako rezistor s elektrický odporem R_A = 5 Ω.

Elektrický proud procházející větví se zdrojem (tj. zdrojem a vnitřním odporem R_i) označíme jako I_Z, elektrický proud tekoucí voltmetrem jako I_V a elektrický proud procházející ampérmetrem a neznámým rezistorem jako $I_A = I_R$ (viz. obr. 3. 14).



Obrázek 3.14

Napětí, které ukazuje voltmetr, je z pohledu zdroje napětí svorkové (tj. napětí elektromotorické zmenšené o úbytek napětí na vnitřním odporu zdroje) – viz. obr. 3.14. Pro svorkové napětí platí rovnice:

$$U_S = U_V = U_e - U_{R_i} = U_e - I_Z \cdot R_i$$

kde jsme pro výpočet úbytku napětí na vnitřním odporu zdroje využili Ohmův zákon.

V této rovnici je neznámou elektrický proud I_Z, který vyjádříme:

$$I_Z = \frac{U_e - U_V}{R_i} = \frac{36 - 35}{1} = 1\ \text{A}$$

Voltmetrem, jehož elektrický odpor je R_V = 1000 Ω a na kterém je napětí U_V = 35 V, teče podle Ohmova zákona elektrický proud

$$I_V = \frac{U_V}{R_V} = \frac{35}{1000} = 35\ \text{mA}$$

Protože při paralelním zapojení rezistorů se elektrické proudy sčítají, teče větví s ampérmetrem a neznámým rezistorem R, která je k předchozím dvěma zapojena paralelně, elektrický proud:

$$I_A = I_Z - I_V$$

$$I_A = \frac{U_e - U_V}{R_i} - \frac{U_V}{R_V}$$

Číselně

$$I_A = 1 - 0{,}035 = 965\ \text{mA}$$

Neznámý rezistor R je sériově zapojen s ampérmetrem. Elektrické napětí na neznámém rezistoru je tedy to, které ukazuje voltmetr snížené o úbytek napětí na ampérmetru. Označíme-li toto napětí jako U_R, platí:

$$U_R = U_V - U_A = U_V - I_A \cdot R_A$$

Číselně:

$$U_R = 35 - 0{,}965 \cdot 5 = 30{,}175\ \text{V}$$

Elektrický odpor neznámého rezistoru R můžeme nyní vypočítat s využitím Ohmova zákona:

$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U_V - I_A \cdot R_A}{I_A} = \frac{U_V}{I_A} - R_A = \frac{U_V}{\left(\frac{U_e - U_V}{R_i} - \frac{U_V}{R_V}\right)} - R_A$$

Dosadíme

$$R = \frac{30{,}175}{0{,}965} = 31{,}3\ \Omega$$

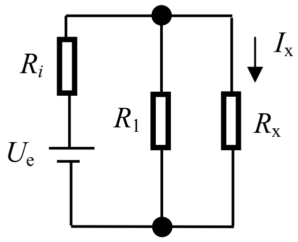
Odpověď: Elektrický odpor neznámého rezistoru je 31,3 Ω.

Poznámka: Pokud bychom kromě napětí, které ukazuje voltmetr U_V = 35 V, znali ještě proud, který ukazuje ampérmetr I_A = 965 mA, mohlo by se zdát, že elektrický odpor neznámého rezistoru lze pomocí Ohmova zákona vypočítat jako $R = \frac{U_V}{I_A} = \frac{35}{0,965} = 36,3\ \Omega$.

Z výsledku $R = \frac{U_V}{I_A} - R_A$ však vyplývá, že tento postup by byl v pořádku pouze pokud by elektrický odpor ampérmetru byl nulový.

V příkladu použitá metoda měření odporu rezistorů se také nazývá AMONT. Hodí se k měření rezistorů většího odporu (elektrický odpor ampérmetru je malý) v případě, že měřící přístroje nejsou ideální (je nutné uvažovat jejich elektrický odpor).

7. Jaký musí mít odpor rezistor R_x, aby proud I_x v obvodu dle obrázku 3.15 byl 1 A? Hodnoty zbývajících rezistorů jsou $R_1 = 30\ \Omega$, $R_i = 3\ \Omega$, elektromotorické napětí zdroje je $U_e = 36$ V.

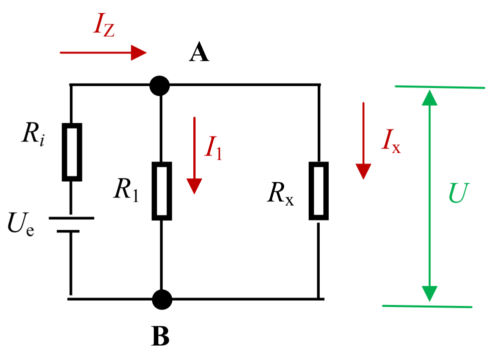


Obrázek 3.15

$I_x = 1$ A
$R_1 = 30\ \Omega$
$R_i = 3\ \Omega$
$U_e = 36$ V
$R_x = ?$

Řešení: Označíme proud, který dodává zdroj (teče větví se zdrojem a vnitřním odporem R_i) jako I_Z a proud tekoucí rezistorem R_1 jako I_1 (viz. obr. 3.16).

Jde o paralelní zapojení 3 větví: první z nich je sériové zapojení zdroje a jeho vnitřního odporu, druhou větví je rezistor R_1 a třetí větví je rezistor R_x (viz. obr. 3.16).



Obrázek 3.16

Základní rovnice, které lze pro paralelní zapojení sestavit, jsou:

a) 1. Kirchhoffův zákon: Součet proudů do uzlu **A** vtékajících se rovná součtu proudů z uzlu **A** vytékajících: $I_Z = I_1 + I_x$.
b) Napětí mezi body **A** (horní vodič) a **B** (dolní vodič) je stejné (viz. obr. 3.16). Toto napětí lze vyjádřit jako (zleva) svorkové napětí zdroje, tj. elektromotorické napětí snížené o úbytek napětí na vnitřním odporu R_i, kterým teče proud I_Z nebo jako napětí na rezistoru R_1 nebo jako napětí na rezistoru R_x (viz. obr. 3.16). Dostáváme celkově 3 rovnice:

$$U = U_S = U_{R_1} = U_{R_x}$$

Za svorkové napětí dosadíme základní vztah

$$U_S = U_e - I \cdot R_i$$

kde $I = I_Z$ je proud tekoucí rezistorem R_i a úbytek napětí na rezistorech R_1 a R_x vyjádříme z Ohmova zákona. Platí tedy, že:

$$U_e - I_Z \cdot R_i = I_1 \cdot R_1 = I_x \cdot R_x$$

Dosadíme za $I_Z = I_1 + I_x$ do rovnice $U_e - I_Z \cdot R_i = I_1 \cdot R_1$ a dostaneme:

$$U_e - (I_1 + I_x) \cdot R_i = I_1 \cdot R_1 \rightarrow U_e - I_1 \cdot R_i - I_x \cdot R_i = I_1 \cdot R_1$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit neznámou I_1:

$$I_1 = \frac{U_e - I_x \cdot R_i}{R_1 + R_i}$$

Číselně

$$I_1 = \frac{36 - 1 \cdot 3}{30 + 3} = 1 \text{ A}$$

Proud, který dodává do obvodu zdroj I_Z, je tedy:

$$I_Z = I_1 + I_X = 1 + 1 = 2 \text{ A}$$

Elektrický odpor neznámého rezistoru R_x můžeme vypočítat například z rovnice

$$I_1 \cdot R_1 = I_x \cdot R_x$$

A tedy

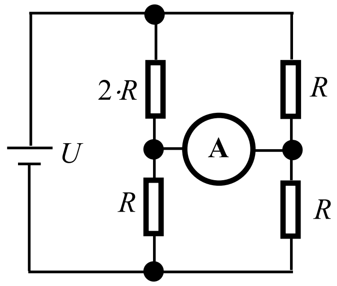
$$R_x = R_1 \cdot \frac{I_1}{I_x} = \left(\frac{U_e - I_x \cdot R_i}{R_1 + R_i}\right) \cdot \left(\frac{R_1}{I_x}\right)$$

Číselně:

$$R_x = 30 \cdot \frac{1}{1} = 30\ \Omega$$

Odpověď: Aby větví s rezistorem R_x v zapojení dle zadání protékal proud 1 A musí být jeho elektrický odpor roven 30 Ω.

8. Jaký proud naměří ampérmetr v obvodu dle obrázku 3.17? Předpokládejte, že odpor ampérmetru je nulový a baterie je ideální. $R = 3\ \Omega$, $U = 21\ \text{V}$.



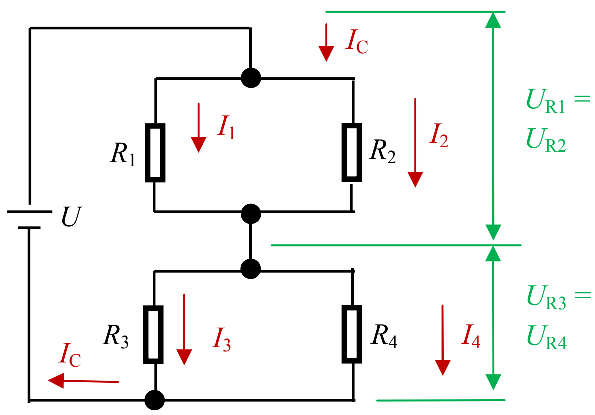
Obrázek 3.17

$R = 3\ \Omega$
$U = 21\ \text{V}$
$I_x = ?$

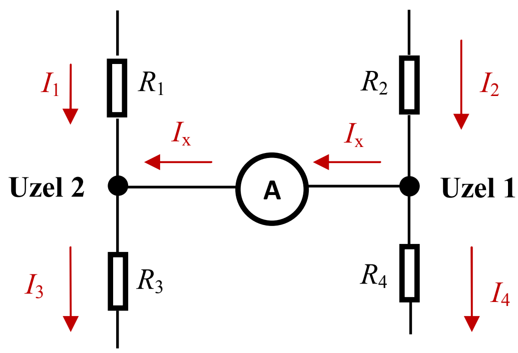
Řešení:

Je-li odpor ampérmetru nulový, lze si místo ampérmetru v obvodu představit vodivé spojení (zkrat) a obrázek 3.17 si překreslit na obrázek 3.18.

Obrázek 3.18



Obrázek 3.19



Vypočtěme nejprve celkový odpor zapojení R_C a celkový proud dodávaný zdrojem I_C. Označme rezistory $R_1 = 2 \cdot R$, $R_2 = R$, $R_3 = R$ a $R_4 = R$ (viz. obr. 3.18).

Rezistory R_1 a R_2 jsou zapojeny paralelně, elektrický odpor jejich zapojení vypočteme jako:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2 \cdot R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{2 \cdot R} \rightarrow R_{12} = \frac{2 \cdot R}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2\ \Omega$$

Rezistory R_3 a R_4 jsou zapojeny také paralelně, elektrický odpor jejich zapojení vypočteme jako:

$$\frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R} \rightarrow R_{34} = \frac{R}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5\ \Omega$$

Rezistory R_{12} a R_{34} jsou zapojeny sériově. Celkový odpor zapojení dle schématu je potom:

$$R_C = R_{12} + R_{34} = \frac{2 \cdot R}{3} + \frac{R}{2} = \frac{7}{6} \cdot R = \frac{7}{6} \cdot 3 = 3{,}5\ \Omega$$

Celkový proud I_C, který dodává zdroj do obvodu, je dle Ohmova zákona:

$$I_C = \frac{U}{R_C} = \frac{21}{3{,}5} = 6\ \text{A}$$

Nyní vypočteme proudy tekoucí jednotlivými rezistory v zapojení dle schématu.

Rezistory R_1 a R_2 jsou zapojeny paralelně a musí na nich tedy být stejné napětí $U_{R_1} = U_{R_2}$.

Celkový proud tekoucí od zdroje I_C se rozdělí mezi rezistory R_1 a R_2: $I_C = I_1 + I_2$.

Využijeme opět Ohmův zákon a z rovnosti napětí dostaneme:

$$I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2$$

Dosadíme za $I_1 = I_C - I_2$ a dostaneme:

$$(I_C - I_2) \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2 \rightarrow I_C \cdot R_1 - I_2 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2$$

Můžeme postupně vypočítat proud tekoucí rezistorem R_2:

$$I_2 = I_C \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = I_C \cdot \frac{2 \cdot R}{2 \cdot R + R} = \frac{2}{3} \cdot I_C = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4\ \text{A}$$

a proud tekoucí rezistorem R_1:

$$I_1 = I_C - I_2 = I_C - \frac{2}{3} \cdot I_C = \frac{I_C}{3} = \frac{6}{3} = 2\ \text{A}$$

Rezistory R_3 a R_4 jsou zapojeny paralelně a musí na nich tedy být stejné napětí

$$U_{R_3} = U_{R_4} \rightarrow I_3 \cdot R_3 = I_4 \cdot R_4$$

Protože $R_3 = R_4 = R$, musí být $I_3 = I_4$.

Sečtením proudů I_3 a I_4 musíme opět dostat celkový proud I_C: $I_C = I_3 + I_4$.

Proud tekoucí rezistorem R_3 a R_4 je tedy:

$$I_3 = I_4 = \frac{I_C}{2} = \frac{6}{2} = 3\ \text{A}$$

Nyní můžeme vypočítat proud tekoucí ampérmetrem, který označíme jako I_x. Použijeme první Kirchoffův zákon pro uzel 1 (viz. obr. 3. 19) a dostaneme:

$$I_2 = I_x + I_4$$

Resp. pro uzel 2 (viz. obr. 3.19):

$$I_x + I_1 = I_3$$

Hledaný proud tekoucí ampérmetrem můžeme vypočítat z těchto rovnic jako:

$$I_x = I_2 - I_4 = I_3 - I_1$$

Dosadíme:

$$I_x = 4 - 3 = 3 - 2 = 1 \text{ A}$$

Odpověď: V zapojení dle schématu teče ampérmetrem proud 1 A.

9. Elektrický vařič má dvě topné spirály. Zapneme-li jednu, uvede se určité množství vody do varu za $\tau_1 = 15$ min; zapneme-li jen druhou, pak se totéž množství vody uvede do varu za $\tau_2 = 30$ min. Za jak dlouho by se dané množství vody přivedlo do varu, kdybychom obě topné spirály zapojili
   a) sériově
   b) paralelně.

   Poznámka: Při výpočtu nepřihlížejte k teplotní závislosti elektrického odporu topných spirál, tj. uvažujte konstantní elektrický odpor topných spirál.

$\tau_1 = 15$ min

$\tau_2 = 30$ min

$\tau_a = ?$

$\tau_b = ?$

Řešení:

Pro jednoduchost předpokládáme, že v elektrické síti je **stejnosměrné** napětí o stálé velikosti $U = 230$ V.

Označme hmotnost vody, kterou uvádíme do varu jako m (nemění se), měrnou tepelnou kapacitu vody jako c a rozdíl teplot, o který se voda ohřívá jako Δt. Teplo, které musíme dodat na uvedení vody do varu je tedy:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t$$

Toto teplo můžeme dodat buď jednou spirálou nebo druhou spirálou nebo oběma spirálami, ale dodané teplo bude vždy stejné.

V případě zapnutí pouze jedné spirály (označme 1) zapojujeme tuto spirálu (vařič) do elektrické sítě s **daným** elektrickým napětím $U = 230$ V. Pokud elektrický odpor spirály č. 1 označíme jako R_1 lze Jouleovo teplo, tj. teplo vytvářené průchodem elektrického proudu za čas τ_1, vypočítat jako:

$$Q_J = \frac{U^2}{R_1} \cdot \tau_1$$

V případě zapnutí pouze druhé spirály (označme 2) je elektrické napětí opět $U = 230$ V. Rozdílná doba vaření musí tedy znamenat rozdílný elektrický odpor spirály č. 2, který označíme jako R_2. Jouleovo teplo vytvořené spirálou č. 2 za čas τ_2 vypočítáme jako:

$$Q_J = \frac{U^2}{R_2} \cdot \tau_2$$

Protože obě tepla jsou stejná (ohříváme stejné množství vody za stejných podmínek) musí platit, že

$$\frac{U^2}{R_1} \cdot \tau_1 = \frac{U^2}{R_2} \cdot \tau_2$$

a pro elektrické odpory obou spirál tedy platí:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{30 \cdot 60}{15 \cdot 60} = 2$$

Elektrický odpor spirály č. 2 je dvakrát větší než elektrický odpor spirály č. 1. Elektrický odpor spirály č. 2 můžeme vyjádřit pomocí elektrického odporu spirály č. 1 jako:

$$R_2 = \frac{\tau_2}{\tau_1} \cdot R_1$$

a) Obě spirály zapojíme sériově

Elektrický odpor sériového zapojení obou spirál je: $R_a = R_1 + R_2$

Dosadíme za $R_2 = \frac{\tau_2}{\tau_1} \cdot R_1$ a dostaneme

$$R_a = R_1 \cdot \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) = R_1 \cdot \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1}$$

Sériové zapojení obou spirál (chová se jako rezistor s odporem R_a) je opět zapojeno do elektrické sítě s napětím $U = 230$ V.

Obě spirály zapojené sériově budou vodu ohřívat určitou neznámou dobu τ_a. Pro Jouleovo teplo vytvořené oběma spirálami zapojenými sériově můžeme psát:

$$Q_J = \frac{U^2}{R_a} \cdot \tau_a$$

Toto Jouleovo teplo musí být stejné, jako bylo to vytvořené spirálou č. 1, když byla zapojená samostatně, tj. musí platit, že

$$\frac{U^2}{R_1} \cdot \tau_1 = \frac{U^2}{R_a} \cdot \tau_a$$

Neznámá doba, po kterou musí být vařič zapnut v tomto případě τ_a, je tedy:

$$\tau_a = \frac{R_a}{R_1} \cdot \tau_1 = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} \cdot \tau_1 = \tau_1 + \tau_2$$

Číselně: $\tau_a = 15 + 30 = 45$ min

Odpověď: Dané množství vody se při sériovém zapojení obou topných spirál přivede do varu za 45 min.

Poznámka: V případě, kdy se spirály zapojují sériově a jejich elektrické odpory se sčítají, se výsledný čas vaření vypočítá jako součet dílčích časů vaření.

b) Obě spirály zapojíme paralelně

Elektrický odpor paralelního zapojení obou spirál je:

$$\frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Dosadíme za $R_2 = \frac{\tau_2}{\tau_1} \cdot R_1$ a dostaneme

$$\frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_1} \cdot \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\tau_2 + \tau_1}{\tau_2}$$

Paralelní zapojení obou spirál (chová se jako rezistor s odporem R_b) je opět zapojeno do elektrické sítě s napětím $U = 230$ V.

Obě spirály zapojené paralelně budou vodu ohřívat určitou neznámou dobu τ_b. Pro Jouleovo teplo můžeme psát:

$$Q_J = \frac{U^2}{R_b} \cdot \tau_b$$

Toto Jouleovo teplo musí být stejné, jako bylo to vytvořené spirálou č. 1, když byla zapojená samostatně, tj. musí platit, že

$$\frac{U^2}{R_1} \cdot \tau_1 = \frac{U^2}{R_b} \cdot \tau_b$$

Neznámá doba, po kterou musí být vařič zapnut v tomto případě τ_b, je tedy:

$$\tau_b = \frac{R_b}{R_1} \cdot \tau_1 = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \cdot \tau_1$$

Číselně:

$$\tau_b = \frac{30}{15 + 30} \cdot 15 = 10 \text{ min}$$

Odpověď: Dané množství vody se při paralelním zapojení obou topných spirál přivede do varu za 10 min.

Poznámka: V případě, kdy se spirály zapojují paralelně a převrácenou hodnotu jejich výsledného elektrického odporu dostaneme součtem převrácených hodnot jejich elektrických odporů $\left(\frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, se převrácená hodnota výsledného času vaření vypočítá jako součet převrácených hodnot dílčích časů vaření:

$$\tau_b = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \cdot \tau_1 \rightarrow \frac{1}{\tau_b} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \cdot \tau_2} = \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_1}$$

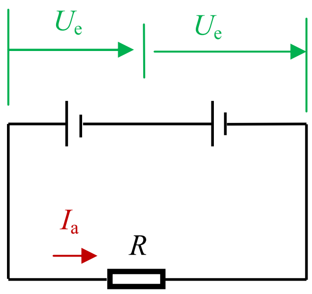
10. Dvě tužkové dobíjecí baterie, každá s napětím 1,3 V, zapojené sériově, napájí přehrávač MP3 proudem 130 mA. Po výměně baterií je u jedné z nich vnitřní odpor zanedbatelný, zatímco druhá je vadná a má vnitřní odpor 10 Ω.
 a) Jak se změní proud a výkon na přehrávači?
 b) Jaký výkon se ztrácí na vnitřním odporu vadného článku?

$U_e = 1{,}3$ V
$I_a = 0{,}13$ A
$R_i = 10\ \Omega$
$I_b = ?$
$P_a = ?$
$P_b = ?$
$P_{Ri} = ?$

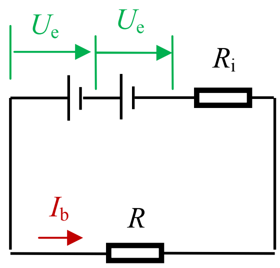
Řešení:

a) Před výměnou baterií

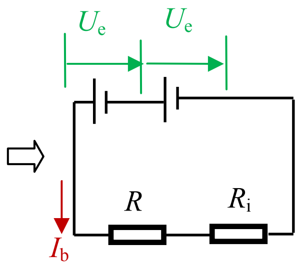
b) Po výměně baterií



Obrázek 3.20



Obrázek 3.21



Obrázek 3.22

a) Situace před výměnou baterií (viz. obr. 3.20)

Celkové napětí, které dodávají přehrávači dvě sériově zapojené baterie, je:

$$U_a = U_e + U_e = 2 \cdot U_e = 2{,}6\ \mathrm{V}$$

Elektrický odpor MP3 přehrávače, který označíme jako R, je:

$$R = \frac{U_a}{I_a} = \frac{2 \cdot U_e}{I_a} = \frac{2 \cdot 1{,}3}{0{,}13} = 20\ \Omega$$

Výkon na přehrávači je:

$$P_a = U_a \cdot I_a = R \cdot I_a^2 = 20 \cdot 0{,}13^2 = 338\ \mathrm{mW}$$

b) Situace po výměně baterií (viz. obr. 3.21)

Jde o sériové zapojení dvou baterií a dvou rezistorů. To je zřejmější pokud si zapojení po výměně překreslíme (obr. 3.22)

Elektrický odpor zapojení po výměně baterií je:

$$R_b = R + R_i = 20 + 10 = 30\ \Omega$$

Celkové napětí, které dodávají sériově dvě zapojené baterie je stejně jako v předchozím případě:

$$U_b = U_e + U_e = 2 \cdot U_e = 2{,}6\ \mathrm{V}$$

Elektrický proud tekoucí MP3 přehrávačem po výměně baterií je:

$$I_b = \frac{U_b}{R_b} = \frac{2 \cdot U_e}{R + R_i} = \frac{2 \cdot 1{,}3}{20 + 10} = 86{,}7\ \mathrm{mA}$$

Výkon na přehrávači po výměně baterií je:

$$P_b = R \cdot I_b^2 = 20 \cdot 0{,}087^2 = 150\ \mathrm{mW}$$

Na vnitřním odporu vadného článku se ztrácí výkon:

$$P_{R_i} = R_i \cdot I_b^2 = 10 \cdot 0{,}087^2 = 75\ \mathrm{mW}$$

Odpověď: Před výměnou baterií MP3 přehrávačem protékal elektrický proud 130 mA a na přehrávači byl výkon 338 mW. Po výměně baterií, přičemž jedna z baterií je vadná, se protékající elektrický proud zmenší na 87 mA a výkon na přehrávači bude 150 mW (tj. méně než poloviční proti původnímu stavu). Výkon ztracený na vnitřním odporu vadné baterie je 75 mW.

11. Na spotřebiči je nápis 12 V/40 W. Jak velký musí mít odpor rezistor R připojený sériově k tomuto spotřebiči, aby při jeho připojení na ideální zdroj 10 V byl výkon tohoto spotřebiče 20 W?
Poznámka: Uvažujte, že spotřebič se chová jako ideální rezistor.

$U_S = 12$ V
$P_S = 40$ W
$U_e = 10$ V
$P_o = 20$ W
$R = ?$

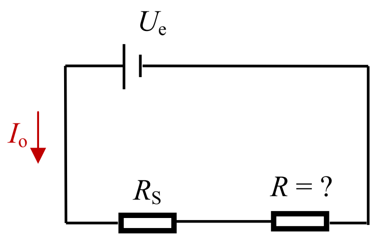
Řešení:

Z údajů uvedených na spotřebiči vypočítáme jeho elektrický odpor:

$$P_S = \frac{U_S^2}{R_S} \rightarrow R_S = \frac{U_S^2}{P_S} = \frac{12^2}{40} = 3{,}6\ \Omega$$

který se (pro ideální rezistor) **nemění** při zapojení spotřebiče do jakéhokoli elektrického obvodu.

Zapojení spotřebiče k ideálnímu zdroji dle zadání lze nakreslit jako elektrický obvod (viz. obr. 3.23). Spotřebič pro nás představuje rezistor s elektrickým odporem R_S = 3,6 Ω zapojený sériově s neznámým rezistorem R ke zdoji s elektrickým napětím U_e = 10 V.



Obrázek 3.23

Elektrický odpor R_o zapojení dle obr. 3.23 je:

$$R_o = R + R_S$$

Elektrický proud procházející obvodem (spotřebičem i rezistorem R) je dle Ohmova zákona:

$$I_o = \frac{U_e}{R_o} = \frac{U_e}{R + R_S}$$

Výkon, který je na spotřebiči v tomto obvodu, je tedy:

$$P_o = R_S \cdot I_o^2 = \frac{U_S^2}{P_S} \cdot \frac{U_e^2}{(R + R_S)^2} = \frac{(U_S \cdot U_e)^2}{P_S \cdot \left(R + \frac{U_S^2}{P_S}\right)^2}$$

Rovnici upravíme:

$$\left(R + \frac{U_S^2}{P_S}\right)^2 = \frac{(U_S \cdot U_e)^2}{P_S \cdot P_o}$$

A vyjádříme neznámý odpor rezistoru *R*:

$$R = \frac{U_S \cdot U_e}{\sqrt{P_S \cdot P_o}} - \frac{U_S^2}{P_S}$$

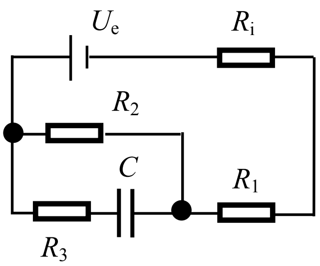
Číselně:

$$R = \frac{12 \cdot 10}{\sqrt{40 \cdot 20}} - \frac{12^2}{40} = 0{,}64\ \Omega$$

Odpověď: Aby spotřebič, který se chová jako ideální rezistor, určený na 12 V se jmenovitým výkonem 40 W, měl po zapojení na ideální zdroj 10 V výkon 20 W, musíme do série s ním zapojit rezistor s elektrickým odporem o velikosti 0,64 Ω.

Poznámka: Při zapojení ideálního rezistoru na zdroj s menším elektrickým napětím, prochází rezistorem menší elektrický proud a na rezistoru je menší výkon. Zatímco elektrické napětí, proud i výkon se mohou při zapojení rezistoru do různých elektrických obvodů měnit, veličinou, která se nemění (a proto je vhodné s ní počítat) je elektrický odpor.

12. V zapojení podle obrázku 3.24 jsou zapojeny rezistory s odpory R_1 = 100 Ω, R_2 = 10 Ω a R_3 = 50 Ω a kondenzátor s kapacitou C = 10 μF ke zdroji s elektromotorickým napětím U_e = 12 V a vnitřním odporem R_i = 10 Ω. Vypočítejte napětí na rezistoru R_i, výkon ztracený na rezistoru R_2, proud tekoucí rezistorem R_1 a náboj na deskách kondenzátoru C.



Obrázek 3.24

$R_1 = 100\ \Omega$

$R_2 = 10\ \Omega$

$R_3 = 50\ \Omega$

$C = 10\ \mu F$

$U_e = 12\ V$

$R_i = 10\ \Omega$

$U_{Ri} = ?$

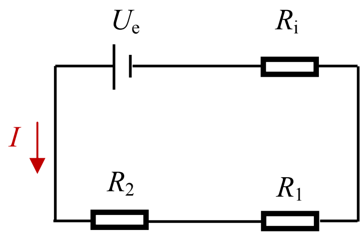
$P_{R2} = ?$

$I_{R1} = ?$

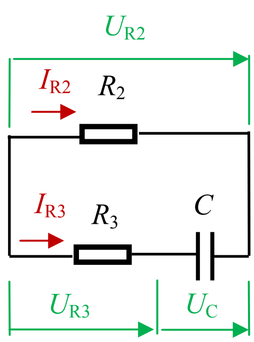
$Q_C = ?$

Řešení: První, co je dobré si uvědomit, je že stejnosměrný proud tekoucí větví s kondenzátorem $\boldsymbol{I_C = 0}$ **A**, protože kondenzátor je součástka, která má mezi vodivými deskami dielektrikum, tj. prostředí elektricky **nevodivé**. Rezistorem R_3, který je s kondenzátorem spojen sériově teče stejný, tj. nulový elektrický proud ($I_{R3} = I_C = 0$ A – viz. obr. 3.26). Úbytek elektrického napětí na rezistoru R_3 je tedy dle Ohmova zákona roven nule ($U_{R3} = I_{R3} \cdot R_3 = 0$ V – viz. obr. 3.26). Rezistor R_3 tedy ve schématu neplní žádnou funkci a je možné jej úplně vypustit.

Protože elektrický proud tekoucí větví s kondenzátorem je nulový, je možné pro první představu vypustit i kondenzátor a zadaný elektrický obvod zjednodušit a překreslit (viz. obr. 3.25).



Obrázek 3.25



Obrázek 3.26

Jedná se tedy o sériové zapojení rezistorů R_i, R_1 a R_2 připojené ke zdroji napětí U_e. Elektrický proud tekoucí tímto obvodem (obr. 3.25) je dle Ohmova zákona roven:

$$I = \frac{U_e}{R_i + R_1 + R_2} = \frac{12}{10 + 100 + 10} = 0{,}1 \text{ A}$$

Úbytek napětí na vnitřním odporu zdroje U_{Ri} lze s pomocí Ohmova zákona vypočítat jako:

$$U_{R_i} = I \cdot R_i = \frac{U_e}{R_i + R_1 + R_2} \cdot R_i = 0{,}1 \cdot 10 = 1 \text{ V}$$

Výkon ztracený na rezistoru R_2 můžeme s využitím znalosti procházejícího proudu I vypočítat jako:

$$P_{R_2} = R_2 \cdot I^2 = 10 \cdot 0{,}1^2 = 100 \text{ mW}$$

Elektrický proud je v sériovém zapojení všude stejný, tedy elektrický proud tekoucí rezistorem R_1 je:

$$I_{R_1} = I = 0{,}1 \text{ A}$$

Pro výpočet elektrického náboje na deskách kondenzátoru samozřejmě musíme kondenzátor uvažovat. Pro úvahu využijeme obrázek 3.26. Jak bylo řečeno výše, rezistor R_3 je možné úplně vypustit. Napětí na kondenzátoru je stejné jako napětí na rezistoru R_2, kterým teče proud $I_{R2} = I = 0{,}1$ A, protože kondenzátor je paralelně připojen k rezistoru R_2 a $U_{R3} = 0$ V, tedy:

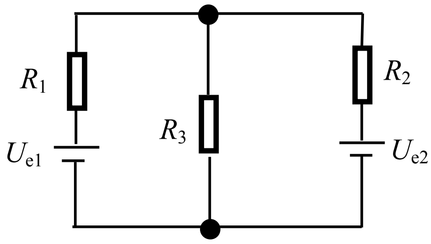
$$U_C = U_{R_2} = I \cdot R_2 = \frac{U_e}{R_i + R_1 + R_2} \cdot R_2 = 0{,}1 \cdot 10 = 1 \text{ V}$$

Náboj na deskách kondenzátoru lze tedy s pomocí znalosti napětí na kondenzátoru vypočítat jako (viz. kapitola 2):

$$Q_C = C \cdot U_C = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 1 = 10 \text{ µC}$$

Odpověď: V zapojení dle obr. 3.24 je napětí ztracené na vnitřním odporu zdroje rovno 1 V, výkon ztracený na rezistoru R_2 roven 100 mW, proud tekoucí rezistorem R_1 roven 100 mA a náboj na deskách kondenzátoru roven 10 µC.

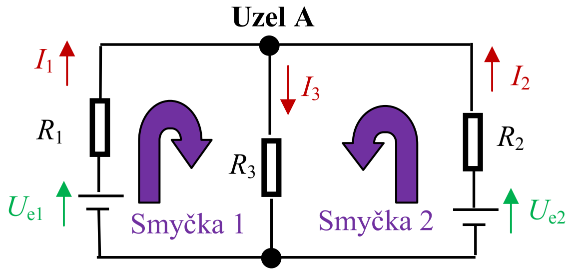
13. V zapojení dle obr. 3. 27 je $U_{e1} = 20$ V, $R_1 = 5\ \Omega$, $U_{e2} = 15$ V, $R_2 = 10\ \Omega$ a $R_3 = 30\ \Omega$. Vypočtěte elektrické proudy tekoucí rezistory R_1, R_2 a R_3.



Obrázek 3.27

$U_{e1} = 20$ V
$R_1 = 5\ \Omega$
$U_{e2} = 15$ V
$R_2 = 10\ \Omega$
$R_3 = 30\ \Omega$
$I_1 = ?$
$I_2 = ?$
$I_3 = ?$

Řešení: Označíme elektrický proud tekoucí rezistorem R_1 jako I_1, elektrický proud tekoucí rezistorem R_2 jako I_2 a elektrický proud tekoucí rezistorem R_3 jako I_3 (viz. obr. 3.28). Směry proudů zvolíme (viz. obr. 3.28). Pokud by skutečný směr proudu byl opačný než námi zvolený, vyjde nám v řešení záporné číslo.



Obrázek 3.28

Pro řešení využijeme Kirchhoffovy zákony. První Kirchhoffův zákon říká, že součet proudů do uzlu vtékajících je roven součtu proudů z uzlu vytékajících. Použijeme-li jej pro uzel A dostaneme:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Druhý Kirchhoffův zákon říká, že součet úbytků napětí na rezistorech v uzavřené smyčce je stejný jako součet elektromotorických napětí zdrojů, přičemž je potřeba dávat pozor na znaménka.

Pro smyčku 1 míří elektromotorické napětí U_{e1} i proudy I_1 a I_3 ve zvolené orientaci smyčky 1, proto:

$$U_{e1} = I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3$$

Také pro smyčku 2 míří elektromotorické napětí U_{e2} i proudy I_2 a I_3 ve zvolené orientaci smyčky 2, proto:

$$U_{e2} = I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3$$

Dosadíme-li za proud I_3 dostaneme:

$$U_{e1} = I_1 \cdot R_1 + I_1 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_3 = (R_1 + R_3) \cdot I_1 + R_3 \cdot I_2$$

$$U_{e2} = I_2 \cdot R_2 + I_1 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_3 = R_3 \cdot I_1 + (R_2 + R_3) \cdot I_2$$

Z první rovnice vyjádříme proud I_2:

$$I_2 = \frac{U_{e1} - (R_1 + R_3) \cdot I_1}{R_3}$$

A dosadíme do druhé rovnice:

$$U_{e2} = R_3 \cdot I_1 + (R_2 + R_3) \cdot \frac{U_{e1} - (R_1 + R_3) \cdot I_1}{R_3}$$

Rovnici upravíme:

$$U_{e2} \cdot R_3 = R_3^2 \cdot I_1 + (R_2 \cdot U_{e1} + R_3 \cdot U_{e1}) - (R_1 + R_3) \cdot (R_2 + R_3) \cdot I_1$$

A vyjádříme neznámý proud I_1:

$$I_1 = \frac{U_{e2} \cdot R_3 - R_2 \cdot U_{e1} - R_3 \cdot U_{e1}}{R_3^2 - (R_1 + R_3) \cdot (R_2 + R_3)}$$

Číselně:

$$I_1 = \frac{15 \cdot 30 - 10 \cdot 20 - 30 \cdot 20}{30^2 - (5 + 30) \cdot (10 + 30)} = 700 \text{ mA}$$

Proud I_2 je potom:

$$I_2 = \frac{U_{e1} - (R_1 + R_3) \cdot I_1}{R_3} = \frac{20 - (5 + 30) \cdot 0{,}7}{30} = -150 \text{ mA}$$

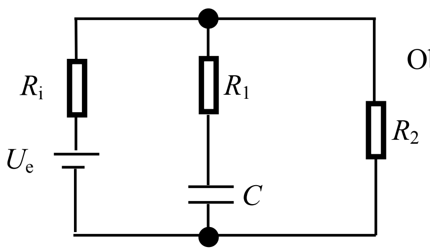
A proud I_3:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 0{,}7 - 0{,}15 = 550 \text{ mA}$$

Odpověď: V zapojení dle zadání je proud tekoucí rezistorem R_1 je 700 mA, proud tekoucí rezistorem R_2 je 150 mA (směrem opačným než je v obr. 3.28) a konečně proud tekoucí rezistorem R_3 je 550 mA.

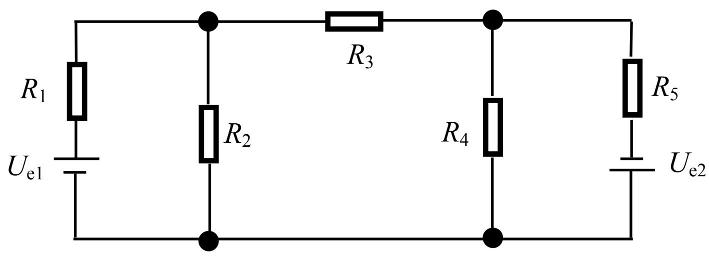
Autotest

1. Jaký elektrický náboj projde vodičem za čas 30 s, jestliže je závislost proudu procházejícího vodičem kvadratická, tj. popsaná rovnicí $I = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$? Konstanty a, b a c určete z podmínek, že na počátku je proud nulový, v čase t_1 = 10 s je proud $I(t_1)$ = 1 A a v čase t_2 = 30 s je proud $I(t_2)$ = 2 A.
   (37,5 C)
2. Jaké stejnosměrné napětí je možno vložit na konce cívky, která má 1000 závitů měděného drátu, je-li dovolená hustota proudu 2,6 A·mm^{-2}? Průměr závitů cívky 6,4 cm, rezistivita mědi 1,75·10^{-8} Ω·m.
   (9,15 V)
3. V zapojení dle obr. 3. 29 je U_e = 30 V, R_1 = 5 Ω, R_2 = 10 Ω, R_i = 5 Ω a C = 10 μF. Určete náboj na deskách kondenzátoru.



Obrázek 3.29

   (200 μC)
4. V zapojení dle obr. 3. 30 je U_{e1} = 50 V, R_1 = 5 Ω, U_{e2} = 25 V, R_2 = 10 Ω, R_3 = 5 Ω, R_4 = 15 Ω a R_5 = 10 Ω. Vypočtěte elektrické proudy tekoucí jednotlivými rezistory.



Obrázek 3.30

   (I_{R1} = 5,58 A, I_{R2} = 2,21 A, I_{R3} = 3,37 A, I_{R4} = 0,35 A, I_{R5} = 3,02 A)

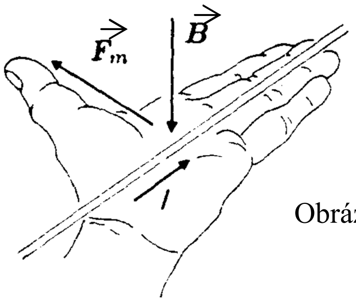
IV. Magnetické pole

Teorie:

Velikost a směr magnetického pole v určitém místě prostoru určujeme pomocí intenzity magnetického pole $\vec{H}$ nebo častěji pomocí magnetické indukce $\vec{B}$. Ve vakuu platí, že $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$, kde $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ H·m^{-1} je tzv. permeabilita vakua a uvnitř magnetika $\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$, kde μ_r je relativní permeabilita použitého prostředí (magnetika).

Magnetické pole působí na vodič, kterým protéká elektrický proud Ampérovou silou: $\overrightarrow{F_m} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$, kde I je elektrický proud protékající vodičem, l je délka vodiče v magnetickém poli a $\vec{B}$ je indukce magnetického pole. Směr vektoru $\vec{l}$ je shodný se směrem protékajícího elektrického proudu. Pro velikost Ampérovy síly platí: $F_m = I \cdot l \cdot B \cdot sin\varphi$, kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{l}$ a $\vec{B}$.

Směr Ampérovy síly můžeme určit podle Flemingova pravidla levé ruky: Přiložíme-li levou ruku k přímému vodiči tak, aby magnetické indukční čáry daného pole vstupovaly do dlaně a natažené prsty ukazovaly směr elektrického proudu, pak kolmo vychýlený palec ukazuje směr magnetické síly (viz. obr. 4.1).



Obrázek 4.1

Magnetické pole působí na nabité, pohybující se částice (objekty) magnetickou silou $\overrightarrow{F_m}$: $\overrightarrow{F_m} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$, kde q je náboj částice, $\vec{v}$ je její rychlost a $\vec{B}$ je indukce magnetického pole. Pro velikost magnetické síly platí: $F_m = q \cdot v \cdot B \cdot sin\varphi$, kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{v}$ a $\vec{B}$.

Pokud si uvědomíme, že směr elektrického proudu je stejný jako směr pohybu kladně nabitých částic, resp. opačný než směr pohybu záporně nabitých částic, můžeme směr magnetické síly určit opět pomocí Flemingova pravidla levé ruky (viz. obr. 4.1).

Konvence směrů vektorů:

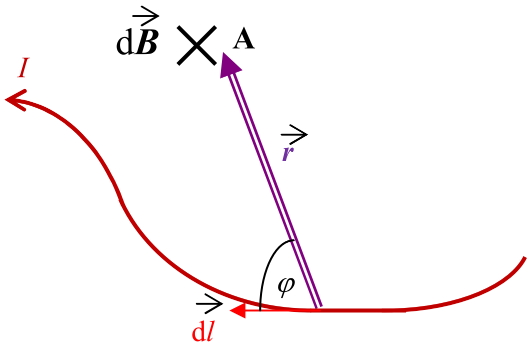
$\times$

Do nákresny

Z nákresny

$\odot$

Magnetické pole, které ve svém okolí vytváří obecný vodič (Biotův-Savartův-Laplaceův zákon):



Obrázek 4.2

Příspěvek indukce vytvářený průchodem elektrického proudu I vybraným úsekem vodiče délky $d\vec{l}$ v jistém místě prostoru A vzdáleném $\vec{r}$ od vodiče (viz. obr. 4.2) je:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\left(d\vec{l} \times \vec{r}\right)}{r^3}$$

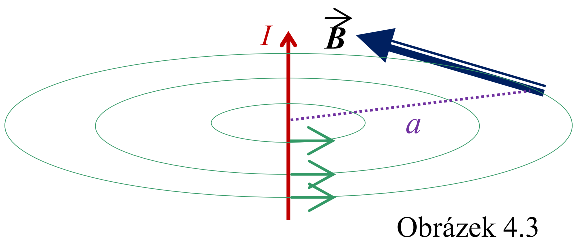
Velikost:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{sin\varphi}{r^2} dl$$

kde φ je úhel, který svírají vektory $d\vec{l}$ a $\vec{r}$. Směr $d\vec{B}$ na obr. 4.2 je do nákresny.

Integrací Biotova-Savartova-Laplaceova zákona získáme následující výsledky:

Nekonečný přímý vodič:



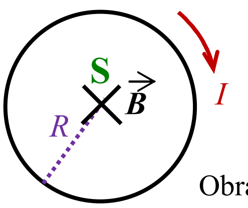
Obrázek 4.3

Magnetické pole, které vytváří nekonečný přímý vodič, kterým protéká elektrický proud I v kolmé vzdálenosti a:

Velikost $B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot a}$

Směr magnetického pole viz. obr. 4.3 (kolmo k vektoru a)

Kruhová smyčka:



Obrázek 4.4

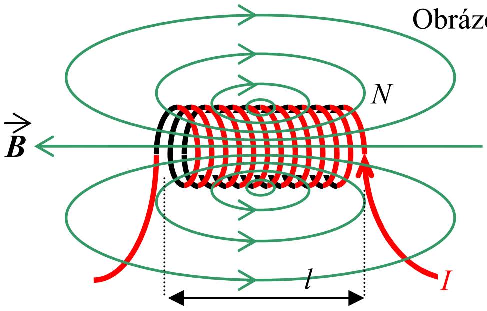
Magnetické pole, které vytváří kruhová smyčka o poloměru R, kterou prochází elektrický proud I ve středu této smyčky je:

Velikost $B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot R}$

Směr magnetického pole ve středu smyčky (dle. obr. 4.4) je do nákresny.

Válcová cívka (solenoid) bez jádra:

Obrázek 4.5

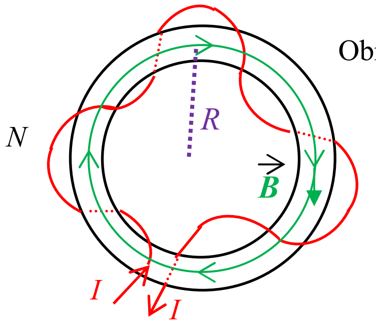


Uvnitř dlouhé válcové cívky (solenoidu) s N závity o délce l, kterou protéká proud I vzniká (téměř) homogenní magnetické pole o velikosti:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{l}$$

Směr magnetického pole uvnitř solenoidu dle obr. 4.5 je doleva.

Kruhová cívka (toroid) bez jádra:



Obrázek 4.6

Uvnitř kruhové cívky (toroidu) s N závity o poloměru R, kterým protéká proud I vzniká (téměř) homogenní magnetické pole o velikosti:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

Směr magnetického pole uvnitř toroidu je na obr. 4.6.

Pro homogenní magnetické pole o indukci $\vec{B}$ procházející plochou S je magnetický indukční tok: $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$, kde směr vektoru $\vec{S}$ je kolmý k dané ploše. Velikost magnetického indukčního toku vypočteme jako: $\Phi = B \cdot S \cdot cos\varphi$, kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{B}$ a $\vec{S}$.

Vlastní indukčnost: $L = \frac{\Phi}{I}$, kde Φ je celkový magnetický indukční tok a I je elektrický proud procházející cívkou.

Energie magnetického pole cívky: $E_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$, kde L je vlastní indukčnost cívky a I je elektrický proud procházející cívkou.

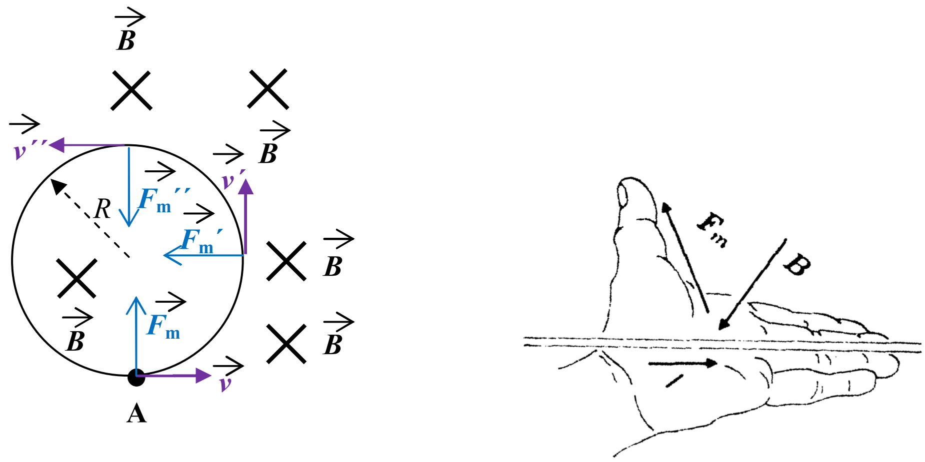
Konstanty:

$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C (elementární náboj)
$m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg (atomová hmotnostní jednotka)
$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg (hmotnost protonu)
$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg (hmotnost elektronu)
$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ H·m^{-1} (permeabilita vakua)

1. Částice alfa ($q = 2 \cdot e$, $m = 4 \cdot m_u$) se pohybuje po kružnici o poloměru 4,5 cm v magnetickém poli o indukci velikosti 1,2 T. (elementární náboj $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, atomová hmotnostní jednotka $m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg). Vypočtěte
   a) velikost její rychlosti,
   b) periodu jejího oběhu,
   c) její kinetickou energii,
   d) elektrické napětí, kterým musí být urychlena z klidu, aby dosáhla této energie.

$q = 3{,}204 \cdot 10^{-19}$ C
$m = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg
$R = 0{,}045$ m
$B = 1{,}2$ T
$v = ?$
$T = ?$
$E_k = ?$
$U = ?$

Obrázek 4.7



Řešení: Jde o pohyb částice α po kruhové trajektorii. Na pohybující se nabitou částici působí v magnetickém poli magnetická síla, která je silou dostředivou a způsobuje pohyb částice právě po zmíněné trajektorii. Magnetická síla směřuje ve všech místech trajektorie částice do středu kružnice. Směr magnetické síly můžeme určit pomocí Flemingova pravidla levé ruky. Levou ruku položíme dlaní nahoru (magnetické indukční čáry směřují do dlaně), prsty směrem doprava (bod A trajektorie), pak palec levé ruky ukazuje směr magnetické síly (nahoru) – viz. obr. 4.7.

Magnetickou sílu, kterou působí magnetické pole na pohybující se částici, vypočítáme jako:

$$\overrightarrow{F_m} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Pro její velikost platí:

$F_m = q \cdot v \cdot B \cdot sin\varphi$, kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{v}$ a $\vec{B}$, tj. v našem případě $\varphi = \pi/2$ v každém místě trajektorie (viz. obr. 4.7).

Velikost dostředivé síly vypočteme jako: $F_d = m \cdot \frac{v^2}{R}$

Protože silou dostředivou je síla magnetická, musí pro velikosti sil platit, že: $F_d = F_m$

Dosadíme za obě síly a dostaneme:

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = q \cdot v \cdot B \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit neznámou rychlost:

$$v = \frac{q \cdot B \cdot R}{m} = \frac{3{,}204 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}045}{6{,}64 \cdot 10^{-27}} = 2{,}60 \cdot 10^6 \text{ m·s}^{-1}$$

Částice se pohybuje po kružnici rovnoměrně, tj. platí:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

Vyjádříme dobu oběhu:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v}$$

Dosadíme za rychlost částice:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{q \cdot B \cdot R} \cdot m = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27}}{3{,}204 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}2} = 0{,}108 \text{ µs}$$

Kinetickou energii částice vypočteme pomocí její rychlosti jako:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{q \cdot B \cdot R}{m}\right)^2 = \frac{q^2 \cdot B^2 \cdot R^2}{2 \cdot m} = \frac{(3{,}204 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}045)^2}{2 \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27}} =$$
$$= 2{,}25 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Elektrické napětí, kterým musela být částice urychlena z klidu (E_{k0} = 0 J), aby dosáhla rychlosti *v*, resp. kinetické energie E_k, vypočteme pomocí energií. Částice má na počátku kinetickou energii rovnou nule, na konci $E_k = 2{,}25 \cdot 10^{-14}$ J. Tuto energii získá částice od elektrického pole. Potenciální energie, kterou získá částice s nábojem *q* při průchodu rozdílem elektrických potenciálů *U*, vypočteme jako $E_p = q \cdot U$.

Pomocí energií tedy můžeme napsat:

$$\Delta E_k = E_k - 0 = E_p$$

Dosadíme za energie a dostaneme:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = q \cdot U$$

Neznámé urychlovací elektrické napětí U je tedy:

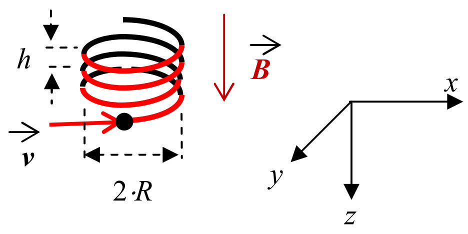
$$U = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot q} = \frac{q \cdot B^2 \cdot R^2}{2 \cdot m} = \frac{3{,}204 \cdot 10^{-19} \cdot (1{,}2 \cdot 0{,}045)^2}{2 \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27}} = 70{,}35\ \mathrm{kV}$$

Odpověď: Částice α se pohybuje po kružnici v magnetickém poli rychlostí $2{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ s periodou 0,11 μs a kinetickou energií $2{,}25 \cdot 10^{-14}$ J. Aby dosáhla této rychlosti, musela být urychlena z klidu elektrickým napětím 70 kV.

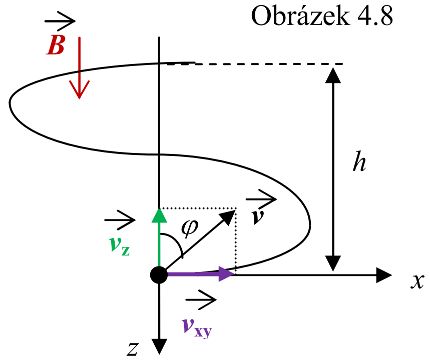
2. Částice alfa ($q = 2 \cdot e$, $m = 4 \cdot m_u$) byla urychlená elektrickým napětím 70 kV a vlétla do magnetického pole o indukci velikosti 1,2 T pod úhlem 30° proti směru vektoru magnetické indukce. Popište trajektorii, po které se bude částice v magnetickém poli pohybovat. (elementární náboj $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, atomová hmotnostní jednotka $m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg).

$q = 3{,}204 \cdot 10^{-19}$ C
$m = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg
$B = 1{,}2$ T
$\varphi = \pi/6$
$R = ?$
$h = ?$

Obrázek 4.10

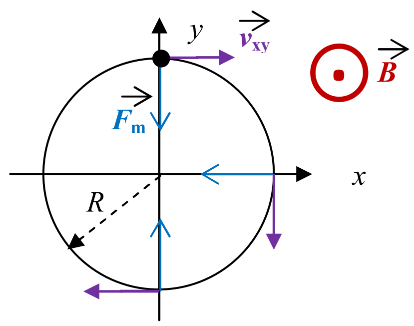


Řešení:



Obrázek 4.8

Obrázek 4.9



Rychlost, se kterou α částice vletí do magnetického pole, můžeme stejně jako v předcházejícím příkladu spočítat pomocí energií. Kinetickou energii, kterou bude částice mít, získá od elektrického pole (napětí):

$$\Delta E_k = E_k - 0 = E_p$$

Dosadíme za energie (viz. příklad č. 1) a vypočteme rychlost částice:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = q \cdot U \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}204 \cdot 10^{-19} \cdot 70 \cdot 10^3}{6{,}64 \cdot 10^{-27}}} = 2{,}60 \cdot 10^6 \text{ m·s}^{-1}$$

Tato rychlost svírá úhel φ se směrem osy $-z$. Pro řešení rozložíme tuto rychlost do směru osy $-z$ a do směru osy x (kolmo k ose z) – viz. obr. 4.8.

Složka rychlosti proti směru osy z je $v_z = v \cdot cos\varphi$

Složka rychlosti kolmá k ose z je $v_{xy} = v \cdot sin\varphi$

Použijeme princip nezávislosti pohybů a popíšeme působení magnetického pole na každou z těchto složek zvlášť.

a) Pohyb částice v rovině *xy* kolmé k ose *z*

Tento pohyb jsme řešili v předchozím případě. Na pohybující se nabitou částici působí v magnetickém poli magnetická síla, která je silou dostředivou a způsobuje pohyb částice po kružnici. Magnetická síla směřuje ve všech místech trajektorie částice do středu kružnice – viz. obr. 4.9.

Proti předchozímu příkladu je pro pohyb po kružnici podstatná pouze složka rychlosti kolmá k ose z, tj. $\overrightarrow{v_{xy}}$.

Protože silou dostředivou je síla magnetická, musí pro velikosti sil platit, že $F_d = F_m$

Úhel mezi složkou rychlosti $\overrightarrow{v_{xy}}$ a magnetickou indukcí $\vec{B}$ je π/2.

Dosadíme za obě síly $\left(F_d = m \cdot \frac{v_{xy}^2}{R},\ F_m = q \cdot v_{xy} \cdot B \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ – viz. příklad č.1 a dostaneme:

$$m \cdot \frac{v_{xy}^2}{R} = q \cdot v_{xy} \cdot B \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Poloměr kružnice, po které se bude v rovině *xy* částice pohybovat je:

$$R = \frac{m \cdot v_{xy}}{q \cdot B} = \frac{m \cdot v \cdot sin\varphi}{q \cdot B} = \frac{m \cdot sin\varphi}{q \cdot B} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m}} = \frac{sin\varphi}{B} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot U}{q}}$$

Číselně:

$$R = \frac{sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1{,}2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27} \cdot 70 \cdot 10^{3}}{3{,}204 \cdot 10^{-19}}} = 2{,}24\ \text{cm}$$

Částice se v rovině *xy* pohybuje po kružnici rovnoměrně, tj. platí:

$$v_{xy} = \frac{s}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

Vyjádříme dobu oběhu částice v rovině *xy*:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v_{xy}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{m}{q \cdot B} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{6{,}64 \cdot 10^{-27}}{3{,}204 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}2} = 0{,}108\ \mu\text{s}$$

b) Pohyb částice proti směru osy *z*

Protože magnetickou sílu, kterou působí magnetické pole na pohybující se nabitou částici, vypočítáme jako $\overrightarrow{F_{mz}} = q \cdot (\overrightarrow{v_z} \times \vec{B})$ a úhel mezi složkou rychlosti $\overrightarrow{v_z}$ a magnetickou indukcí $\vec{B}$ je roven π, je velikost magnetické síly při pohybu částice proti směru osy *z* rovna nule.

$$F_{mz} = q \cdot v_z \cdot B \cdot sin(\pi) = 0$$

Proti směru osy *z* se částice pohybuje rovnoměrně rychlostí v_z. Za dobu *T*, za kterou v rovině *xy* opíše částice jeden obvod kružnice, se proti směru osy *z* částice posune o vzdálenost *h*, kterou vypočteme jako:

$$h = v_z \cdot T = v \cdot T \cdot cos\varphi$$

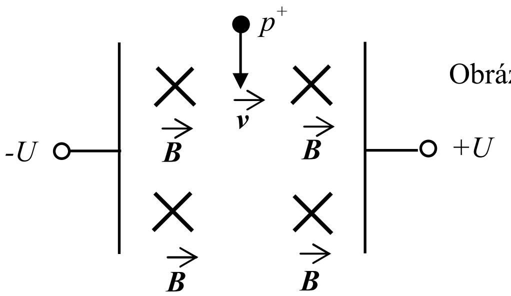
Číselně:

$$h = v \cdot T \cdot cos\varphi = 2{,}6 \cdot 10^6 \cdot 0{,}108 \cdot 10^{-6} \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 24{,}4 \text{ cm}$$

Složením obou pohybů dostaneme výslednou trajektorii, po které se částice pohybuje. Částice se pohybuje po šroubovici naznačené na obr. 4.10.

Odpověď: Částice se pohybuje po šroubovici naznačené na obr. 4.10 s poloměrem 2,24 cm a výškou závitu 24,4 cm.

3. Jakou rychlost musí mít proton, aby beze změny směru prolétl mezi deskami kondenzátoru nabitého elektrickým napětím 1000 V? Na proton navíc působí magnetické pole o indukci 1 T směrem kolmým k intenzitě elektrického pole a k rychlosti protonu (viz. obr. 4.11). Vzdálenost mezi deskami kondenzátoru je 3 mm, hmotnost protonu je $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, náboj protonu je $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.
   - Co by se muselo změnit, aby proton prolétl beze změny směru při přepolóvání desek kondenzátoru?

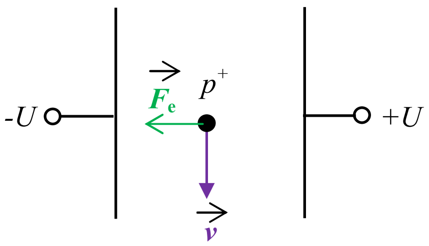


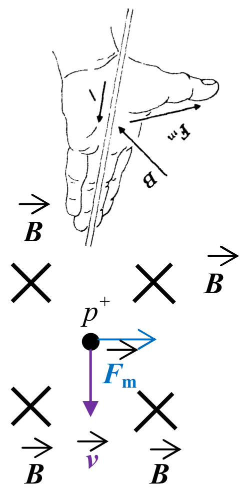
Obrázek 4.11

$U = 1000$ V
$B = 1$ T
$d = 3 \cdot 10^{-3}$ m
$q = e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg

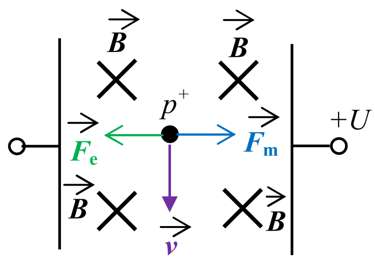
Řešení:

Obrázek 4.12





Obrázek 4.13



Obrázek 4.14

Na kladně nabitý proton působí dvě pro řešení příkladu důležité síly (elektrická $\vec{F_e}$ a magnetická $\vec{F_m}$).

Kladně nabitý proton s nábojem $q = e$ je přitahován k záporně nabité elektrodě kondenzátoru, uvnitř kterého je homogenní elektrické pole intenzity $\vec{E}$, silou elektrickou velikosti $F_e = q \cdot E$ (směr $\vec{F_e}$ je doleva – viz. obr. 4.12, viz. kapitola č. 2).

Velikost intenzity homogenního elektrického pole uvnitř kondenzátoru se vypočítá jako $E = \frac{U}{d}$. Velikost elektrické síly působící na proton je tedy $F_e = q \cdot E = q \cdot \frac{U}{d}$ (viz. kapitola č. 2).

Na pohybující se nabitý proton působí v magnetickém poli magnetická síla $\overrightarrow{F_m}$:

$$\overrightarrow{F_m} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Směr magnetické síly můžeme určit pomocí Flemingova pravidla levé ruky. Levou ruku položíme dlaní nahoru (magnetické indukční čáry směřují do dlaně), prsty směrem dolů – viz. obr. 4.13, pak palec levé ruky ukazuje směr magnetické síly (doprava).

Velikost: $F_m = q \cdot v \cdot B \cdot sin\varphi$, kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{v}$ a $\vec{B}$, tj. v našem případě $\varphi = \pi/2$.

Elektrická síla a magnetická síla působící na proton mají opačné směry (viz. obr. 4.14). Aby se směr pohybu protonu nezměnil, musí být výsledná síla působící na proton nulová, tj. velikosti sil působících na proton se musí rovnat, tedy:

$$F_e = F_m$$

Dosadíme za velikosti sil a dostaneme:

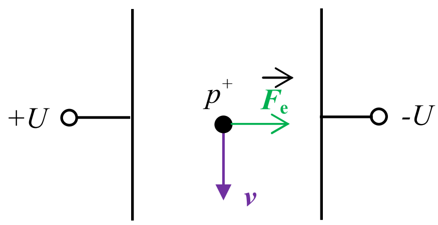
$$q \cdot \frac{U}{d} = q \cdot v \cdot B \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Hledaná rychlost protonu:

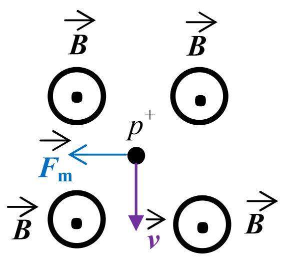
$$v = \frac{U}{d \cdot B} = \frac{1000}{0{,}003 \cdot 1} = 3{,}33 \cdot 10^5 \text{ m·s}^{-1}$$

Přepolóvání desek:

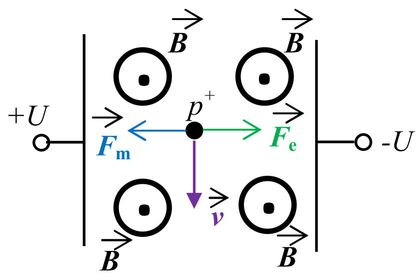
Obrázek 4.15



Obrázek 4.16



Obrázek 4.17



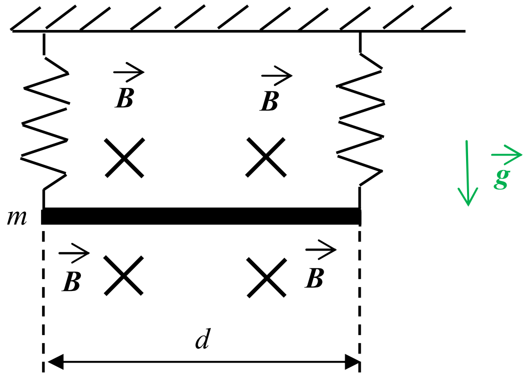
Pokud změníme polaritu elektrického napětí, změní se směr elektrické síly působící na proton (viz. obr. 4.15). Proton bude přitahován k záporné elektrodě kondenzátoru (doprava). Aby proton proletěl beze změny směru, musí se změnit i směr magnetické síly (doleva). Aby magnetická síla působila doleva, musí se změnit směr magnetické indukce (z nákresny), viz. obr. 4.16 a obr. 4.17. (Levá ruka – prsty dolů, dlaní dolů).

Odpověď: Aby proton prolétl v magnetickém poli mezi deskami nabitého kondenzátoru beze změny směru, musí mít rychlost $3{,}33 \cdot 10^{5}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Při přepolóvání desek kondenzátoru musíme pro zachování směru protonu změnit směr magnetické indukce na opačný.

Poznámka: Uvedené zařízení se nazývá rychlostní filtr a lze je použít, pokud potřebujeme nabité částice s určitou (přesně definovanou) rychlostí. Tento rychlostní filtr se využívá na vstupu některých hmotnostních spektrometrů, které se používají např. pro identifikaci neznámých látek nebo na rozlišení různých izotopů stejné látky.

4. Vodorovný vodič délky 100 cm má hmotnost 20 g a je zavěšen na dvou vodivých pružinách. Umístíme jej do magnetického pole o indukci 0,5 T směřujícího do nákresny (viz. obr. 4.18). Jaká musí být velikost a směr elektrického proudu protékajícího vodičem, aby v pružinách nevznikalo žádné mechanické napětí? Pozn.: Mechanické napětí má jednotku Pa.

Obrázek 4.18



$d = 1$ m
$m = 0{,}02$ kg
$B = 0{,}5$ T
$g = 10$ m·s^{-2}
$I = ?$

Řešení: Mechanické napětí je definováno obdobně jako tlak (viz. Sbírka řešených úloh z mechaniky) a proto má i stejnou jednotku. Velikost mechanického napětí se spočítá jako síla působící na určitou plochu

$$\sigma = \frac{F}{S};\ [\sigma] = Pa$$

Podmínka, aby v pružinách nevznikalo žádné mechanické napětí, je tedy ekvivalentní podmínce, aby byl vodič v rovnováze, tj. aby výsledná síla působící na vodič byla nulová. Zaměříme se tedy na síly působící na vodič.

Vodič je přitahován k Zemi tíhovou silou o velikosti

$$F_G = m \cdot g$$

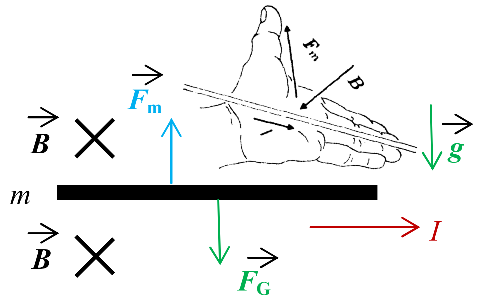
Aby byl vodič v rovnováze, musí na něj působit **směrem nahoru** síla stejně velká jako je síla tíhová.

Protože jde o vodič, kterým protéká elektrický proud umístěný v magnetickém poli, působí na něj síla Ampérova.

a) Směr proudu

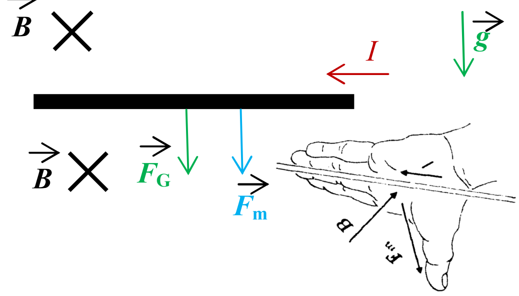
Směr Ampérovy síly určíme podle Flemingova pravidla levé ruky: Levou ruku položíme na vodič tak, aby prsty směřovaly ve směru proudu (buď doprava – viz. obr. 4.19 nebo doleva – viz. obr. 4.20), magnetická indukce vstupovala do dlaně (dlaní směrem k sobě) a palec ukazuje směr Ampérovy síly.

Aby síla směřovala nahoru, musí proud téct směrem doprava (obr. 4.19).



Obrázek 4.19

Obrázek 4.20



b) Velikost proudu

Aby byl vodič v rovnováze, musí být velikost magnetické a tíhové síly stejná, tj.:

$$F_G = F_m$$

Úhel mezi směrem proudu (doprava) a směrem magnetické indukce (do nákresny) je $\varphi = \pi/2$.

Velikost Ampérovy síly je:

$$F_m = I \cdot d \cdot B \cdot sin\varphi = I \cdot d \cdot B \cdot sin(\pi/2) = I \cdot d \cdot B$$

Dosadíme do silové podmínky rovnováhy:

$$F_G = F_m \rightarrow m \cdot g = I \cdot d \cdot B$$

Vyjádříme neznámou velikost proudu I:

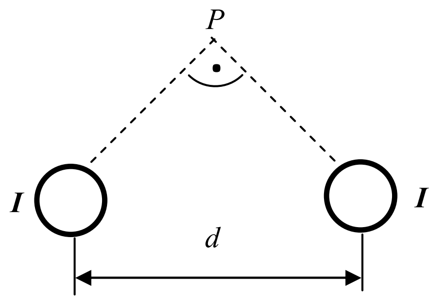
$$I = \frac{m \cdot g}{d \cdot B}$$

Dosadíme

$$I = \frac{0{,}02 \cdot 10}{1 \cdot 0{,}5} = 0{,}4 \text{ A}$$

Odpověď: Aby v pružinách nevznikalo žádné mechanické napětí, musí vodičem téct elektrický proud o velikosti 0,4 A směrem doprava.

5. Každým ze dvou dlouhých rovnoběžných vodičů, vzdálených od sebe 10 cm protéká proud 100 A. Oba vodiče leží kolmo k rovině obrázku a bod P je od obou vodičů stejně vzdálen (viz. obr. 4.21). Určete velikost a směr výsledné magnetické indukce v bodě P, jestliže
   a) proud tekoucí oběma vodiči má směr z nákresny,
   b) proud tekoucí levým vodičem má směr z nákresny, proud tekoucí pravým vodičem má směr do nákresny.



Obrázek 4.21

$d = 0{,}1$ m
$I = 100$ A $= I_1 = I_2$
$\overrightarrow{B_P} = ?$

Řešení:

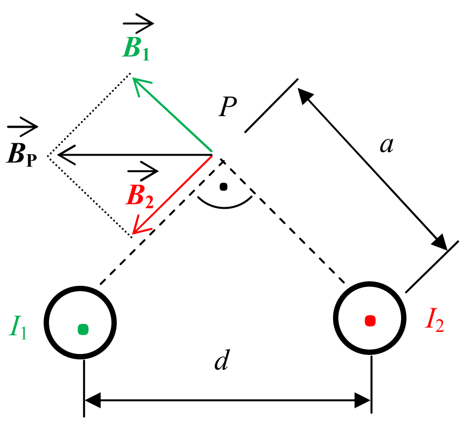
Vypočteme vzdálenost a bodu P od obou vodičů:

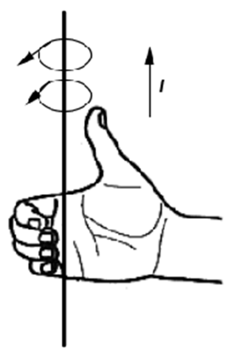
$$a^2 + a^2 = d^2 \;\rightarrow a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot d = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}1 = 7{,}07 \text{ cm}$$

Pro řešení použijeme princip superpozice, tj. nejprve vypočítáme magnetickou indukci, kterou vytváří v bodě P levý vodič (označíme jako $\overrightarrow{B_1}$), poté vypočítáme magnetickou indukci, kterou vytváří v bodě P pravý vodič (označíme jako $\overrightarrow{B_2}$). Výslednou magnetickou indukci vypočteme jako vektorový součet $\overrightarrow{B_1}$ a $\overrightarrow{B_2}$. Postup je naznačen na obr. 4.22. a na obr. 4.23.

a) Proud tekoucí oběma vodiči má směr z nákresny (obr. 4.22)

Obrázek 4.22





Velikost příspěvku magnetické indukce od levého vodiče (ve vzdálenosti *a* od vodiče) je:

$$B_1 = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot a} = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot \frac{d}{\sqrt{2}}} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}1} = 2{,}83 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

Protože velikost obou proudů i vzdálenost bodu P od obou vodičů je stejná, je velikost příspěvku magnetické indukce od pravého vodiče (ve vzdálenosti *a* od vodiče):

$$B_2 = \mu_0 \cdot \frac{I_2}{2 \cdot \pi \cdot a} = B_1 = 2{,}83 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

Směr příspěvku $\overrightarrow{B_1}$, resp. $\overrightarrow{B_2}$ určíme pomocí pravidla pravé ruky. Vztyčený palec pravé ruky ukazuje směrem z nákresny (směr proudu I_1, resp. I_2), kolmo vychýlené prsty ukazují směr magnetické indukce v daném místě (viz. obr. 4.22 – zeleně pro $\overrightarrow{B_1}$, resp. červeně pro $\overrightarrow{B_2}$).

Příspěvky k magnetické indukci vytvářené oběma vodiči jsou k sobě kolmé. Výslednou magnetickou indukci v bodě P proto vypočteme pomocí Pythagorovy věty:

$$B_P = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{B_1^2 + B_1^2} = \sqrt{2} \cdot B_1$$

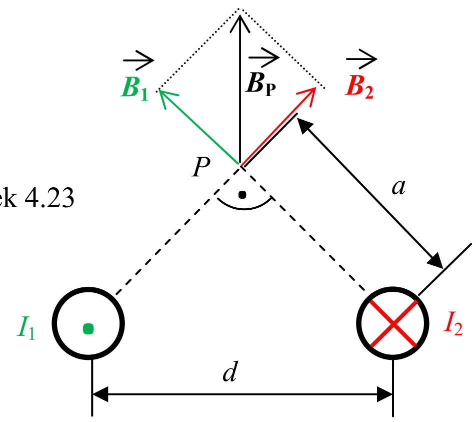
Dosadíme za B_1:

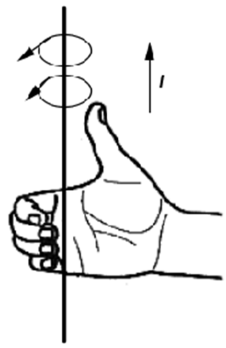
$$B_P = \sqrt{2} \cdot \mu_0 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot d} = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{\pi \cdot d} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{100}{\pi \cdot 0{,}1} = 4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

Směr výsledné magnetické indukce je doleva (viz. obr. 4.22).

b) proud tekoucí levým vodičem má směr z nákresny, proud tekoucí pravým vodičem má směr do nákresny (viz. obr. 4.23)

Obrázek 4.23





Pro výpočet můžeme využít výsledky z předcházejícího:

Velikost příspěvků k magnetické indukci v bodě P od obou vodičů je stejná a to:

$$B_2 = B_1 = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot a} = \mu_0 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot d} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}1} = 2{,}83 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

Oba příspěvky jsou k sobě kolmé (viz. obr. 4.23), výsledná magnetická indukce v bodě P je proto:

$$B_P = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{2} \cdot B_1 = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{\pi \cdot d} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{100}{\pi \cdot 0{,}1} = 4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

Tedy stejně velká jako v předchozím bodě.

V čem se oba případy liší je směr příspěvku $\overrightarrow{B_2}$ (vzhledem k opačnému směru proudu I_2). Směr příspěvku $\overrightarrow{B_2}$ určíme v tomto případě tak, že vztyčený palec pravé ruky ukazuje směrem do nákresny (směr proudu I_2), kolmo vychýlené prsty ukazují směr magnetické indukce v daném místě (viz. obr. 4.23).

Směr výsledné magnetické indukce je potom nahoru (viz. obr. 4.23)

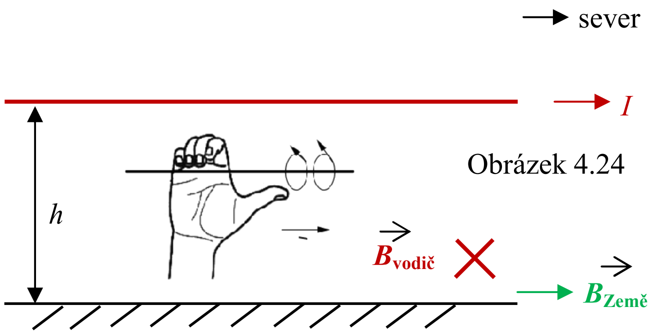
Odpověď: Velikost výsledné magnetické indukce vytvářené dvěma vodiči v bodě P podle obrázku 4.21 je $4 \cdot 10^{-4}$ T. Směr této magnetické indukce je a) doleva v případě, že proudy oběma vodiči tečou směrem z nákresny a b) nahoru v případě, že proud levým vodičem teče směrem z nákresny a proud pravým vodičem teče směrem do nákresny.

6. O jaký úhel se vychýlí magnetka kompasu v místě, které je ve vzdálenosti 5 m pod přímým elektrickým vodičem vedoucím na sever, je-li indukce magnetického pole Země v daném místě $2 \cdot 10^{-5}$ T a protéká-li vodičem proud 100 A ve směru
   a) na sever
   b) na jih

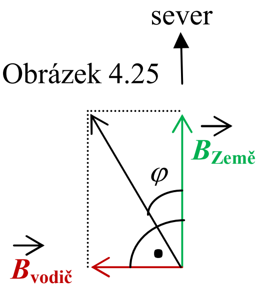
$h = 5$ m
$I = 100$ A
$B_{Země} = 2 \cdot 10^{-5}$ T
$\varphi = ?$

Řešení:

a) Elektrický proud protéká směrem na sever



Obrázek 4.24



Obrázek 4.25

Situace je naznačena na obr. 4.24, kde je sever směrem doprava. Pokud by vodičem neprotékal elektrický proud, ukazovala by magnetka kompasu na sever a to proto, že směrem na sever míří indukce magnetického pole Země $\overrightarrow{B_{Země}}$ (na obr. 4.24 zeleně). Vodič, kterým prochází elektrický proud, vytváří v místě pod vodičem magnetické pole s indukcí $\overrightarrow{B_{vodič}}$, jejíž směr určíme podle pravidla pravé ruky – na obr. 4.24 do nákresny (vztyčený palec pravé ruky ukazuje směrem doprava = směr proudu, kolmo vychýlené prsty ukazují směr magnetické indukce v daném místě – směrem na západ). Směry magnetických indukcí si lépe představíme na obr. 4.25, ve kterém sever je nahoru a tedy západ směrem doleva.

Magnetickou indukci, vytvářenou vodičem, kterým prochází elektrický proud ve vzdálenosti h od tohoto vodiče, vypočteme jako:

$$B_{vodič} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot h} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{100}{2 \cdot \pi \cdot 5} = 4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

Hledaná výchylka magnetky kompasu φ je vyznačena na obr. 4.25. Pomocí tohoto obrázku můžeme tuto výchylku vypočítat jako:

$$tg\varphi = \frac{B_{vodič}}{B_{Země}}$$

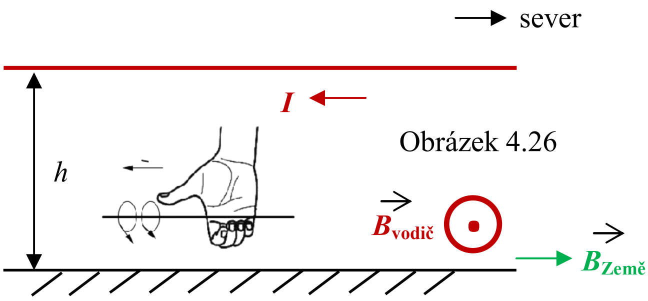
Dosadíme-li magnetickou indukci, kterou vytváří vodič, je:

$$tg\varphi = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot h \cdot B_{Země}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = \frac{1}{5}$$

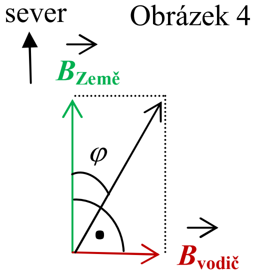
Hledaná výchylka kompasu je tedy:

$$\varphi = arctg\left(\frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot h \cdot B_{Země}}\right) = arctg\left(\frac{1}{5}\right) = 0{,}197 \text{ rad} = 11{,}3°$$

b) Proud protéká směrem na jih



Obrázek 4.26



Obrázek 4.27

Situace je naznačena na obr. 4.26. Stejně jako v předchozím je směr magnetického pole Země na sever. Prochází-li proud směrem na jih, pak dle pravidla pravé ruky míří vektor magnetické indukce, kterou vytváří vodič, směrem z nákresny (vztyčený palec pravé ruky ukazuje směrem doleva = směr proudu, kolmo vychýlené prsty ukazují směr magnetické indukce v daném místě – směrem na východ). Na obr. 4.27 je směr sever nahoru a východ doprava.

Stejně jako v předchozím je magnetická indukce, vytvářená vodičem, kterým prochází elektrický proud ve vzdálenosti h od tohoto vodiče rovna:

$$B_{vodič} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot h} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{100}{2 \cdot \pi \cdot 5} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

Hledaná výchylka magnetky kompasu φ je vyznačena na obr. 4.27. Pomocí tohoto obrázku můžeme tuto výchylku vypočítat jako:

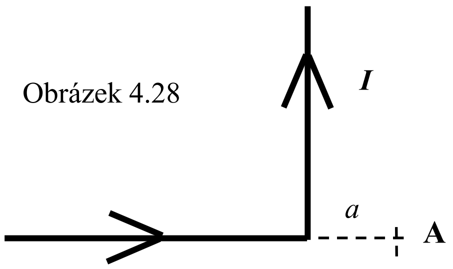
$$tg\varphi = \frac{B_{vodič}}{B_{Země}} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot h \cdot B_{Země}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = \frac{1}{5}$$

Hledaná výchylka kompasu je: $\varphi = arctg\left(\frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot h \cdot B_{Země}}\right) = arctg\left(\frac{1}{5}\right) = 0{,}197 \text{ rad} = 11{,}3°$

Odpověď: V daném místě se v obou případech ručička kompasu vychýlí o úhel 11,3° od směru na sever.

Poznámka: Rozdíl mezi oběma situacemi je v tom, že v případě, že elektrický proud prochází směrem na sever, tak se kompas vychýlí o úhel $\varphi = 11{,}3°$ směrem na západ. Pokud elektrický proud prochází směrem na jih tak se kompas vychýlí o úhel $\varphi = 11{,}3°$ směrem na východ.

7. Velmi dlouhým vodičem zahnutým do pravého úhlu (viz. obr. 4.28) prochází proud 10 A. Určete velikost a směr indukce magnetického pole v bodě A, je-li a = 5 cm.



Obrázek 4.28

I = 10 A
a = 0,05 m
$\overrightarrow{B_A}$ = ?

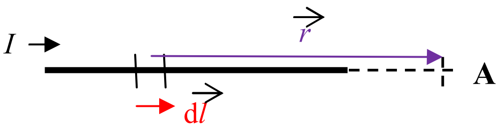
Řešení: Pro výpočet použijeme Biotův-Savartův-Laplaceův zákon. Vodič si rozdělíme na dva úseky.

a) Úsek vlevo od bodu A

Pro všechny elementy tohoto úseku je směr vektoru $\overrightarrow{dl}$ (na obr. 4.29 červeně) rovnoběžný se směrem vektoru $\vec{r}$ (na obr. 4.29 fialově). Velikost příspěvku k magnetické indukci v bodě A od vybraného elementu je:

$$dB_a = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{sin\varphi}{r^2} dl$$

kde φ je úhel, který svírají vektory $\overrightarrow{dl}$ a $\vec{r}$.



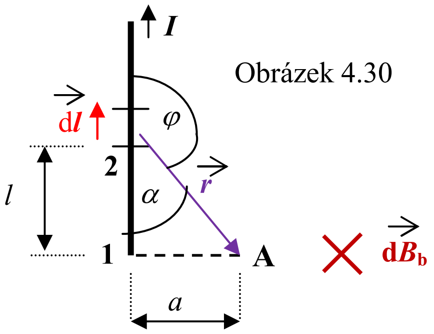
Obrázek 4.29

Pro všechny elementy $\overrightarrow{dl}$ je úhel $\varphi = 0$ a tedy $\overrightarrow{dB_a} = \vec{0}$ a $\vec{B}_a = \vec{0}$.

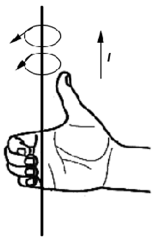
Úsek vodiče vlevo od bodu A tedy k magnetické indukci v bodě A nepřispívá!

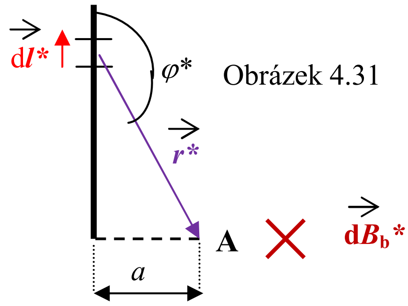
b) Úsek nad bodem A

Pro představu použijeme obr. 4.30, na kterém je vybrán jeden úsek vodiče. Podle pravidla pro vektorový součin míří směr příspěvku $\overrightarrow{dB_b}$ od tohoto elementu (i od všech ostatních elementů) do nákresny. Výsledná magnetická indukce bude tedy v bodě A směřovat do nákresny. (Pro určení směru magnetické indukce vytvářeného vodičem si můžeme pomoci tak, že pokud vztyčený palec pravé ruky ukazuje směrem nahoru = směr proudu, kolmo vychýlené prsty ukazují směr magnetické indukce v daném místě – do nákresny.)



Obrázek 4.30





Obrázek 4.31

Velikost příspěvku k magnetické indukci v bodě A od vybraného elementu *dl* je:

$$dB_b = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{sin\varphi}{r^2} dl$$

V tomto výrazu se při výběru jiného elementu $\overrightarrow{dl^*}$ změní vzdálenost na r^* a úhel na φ^* (viz. obr. 4.31). Pro lepší následný výpočet přepíšeme velikost příspěvku dB_b pomocí známé vzdálenosti a a jediné neznámé φ.

Z obr. 4.30 (ΔA21) je:

$$sin\alpha = \frac{a}{r} \rightarrow r = \frac{a}{sin\alpha}$$

Protože $\varphi = \pi - \alpha$, tak $sin\varphi = sin(\pi - \alpha) = sin\alpha$. Vzdálenost r můžeme tedy vyjádřit pomocí úhlu φ jako:

$$r = \frac{a}{sin\varphi}$$

Vzdálenost l vyjádříme z ΔA21 (obr. 4.30) pomocí úhlu α jako:

$$cotg\alpha = \frac{l}{a} \rightarrow l = a \cdot cotg\alpha$$

Protože $\varphi = \pi - \alpha$, tak $cos\varphi = cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$ a tedy $cotg\varphi = -cotg\alpha$

Vzdálenost l tedy vyjádříme pomocí úhlu φ jako:

$$l = a \cdot cotg\alpha = -a \cdot cotg\varphi$$

Derivací tohoto vztahu podle úhlu φ dostaneme:

$$\frac{dl}{d\varphi} = -a \cdot \left(-\frac{1}{sin^2\varphi}\right) \rightarrow dl = \frac{a}{sin^2\varphi} d\varphi$$

Dosadíme do výrazu pro dB_b za $r = \frac{a}{sin\varphi}$ a $dl = \frac{a}{sin^2\varphi} d\varphi$ a dostaneme:

$$dB_b = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{sin\varphi}{r^2} dl = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\frac{a}{sin^2\varphi}}{\left(\frac{a}{sin\varphi}\right)^2} \cdot sin\varphi d\varphi = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot sin\varphi d\varphi$$

Meze pro úhel φ jsou:

Dolní mez: Bod 1 na obr. 4.30 ($\overrightarrow{dl}$ míří nahoru, $\vec{r}$ míří doprava), tj. $\varphi_{min} = \pi/2$.
Horní mez: nekonečná vzdálenost od bodu A směrem nahoru ($\overrightarrow{dl}$ míří nahoru, $\vec{r}$ míří dolů), tj. $\varphi_{max} = \pi$.

Příspěvek k magnetické indukci v bodě A od úseku nad bodem A vypočteme integrací dB_b:

$$B_b = \int dB_b = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot sin\varphi d\varphi = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sin\varphi d\varphi = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot [-cos\varphi]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

Dosadíme integrační meze a dostaneme:

$$B_b = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot \left[-cos\pi - \left(-cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right] = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a}$$

Příspěvek k magnetické indukci v bodě A od úseku vodiče nad bodem A je tedy:

$$B_b = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{4 \cdot \pi \cdot 0{,}05} = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

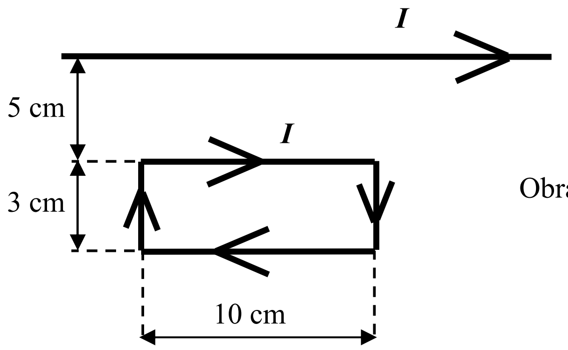
Výsledná magnetická indukce v bodě A je vektorový součet obou příspěvků, tedy součet magnetické indukce vytvářené úsekem vodiče vlevo od bodu A (B_a) a magnetické indukce vytvářené úsekem vodiče nad bodem A (B_b). Protože $B_a = 0$ T je:

$$B_A = B_a + B_b = 0 + 2 \cdot 10^{-5} = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

Odpověď: Výsledná magnetická indukce, kterou v bodě A vytváří vodič dle obr. 4.28 je $2 \cdot 10^{-5}$ T směrem do nákresny.

Poznámka: Porovnáním magnetické indukce pro úsek nad bodem A $\left(B_A = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a}\right)$ a magnetické indukce, kterou v kolmé vzdálenosti a vytváří nekonečný vodič $\left(B_{vodič} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a}\right)$ zjistíme, že $B_A = \frac{1}{2} \cdot B_{vodič}$. Můžeme si to představit tak, že úsek vodiče nad bodem A je „poloviční“ než by byl přímý nekonečný vodič, a tudíž vytváří magnetické pole s poloviční magnetickou indukcí.

8. Drát ve tvaru obdélníkového závitu je umístěn vedle dlouhého přímého vodiče (viz. obr. 4.32). Oběma vodiči teče stejný proud I = 2,5 A. Jaká je velikost a směr výsledné síly působící na závit?

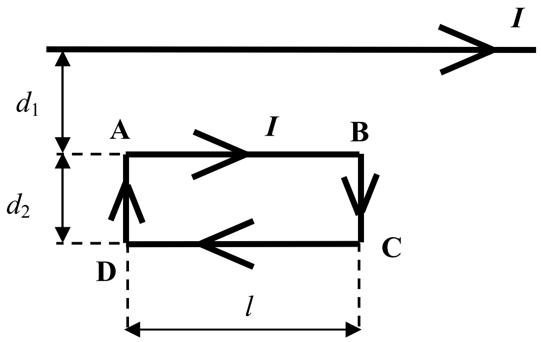


Obrázek 4.32

---

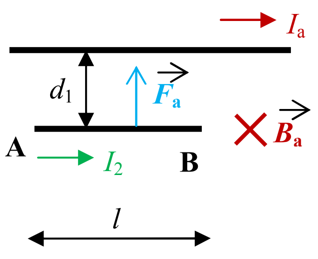
d_1 = 0,05 m
d_2 = 0,03 m
l = 0,1 m
$I = 2{,}5\ \mathrm{A} = I_a = I_b = I_c = I_d = I_2$
$\vec{F} = ?$

Řešení: Označíme vzdálenosti zadané na obr. 4.32 jako d_1, d_2 a l (viz. obr. 4.33). Vypočteme postupně a) sílu působící na úsek závitu AB, b) sílu působící na úsek závitu CD, c) sílu působící na úsek závitu BC a nakonec d) sílu působící na úsek závitu DA.

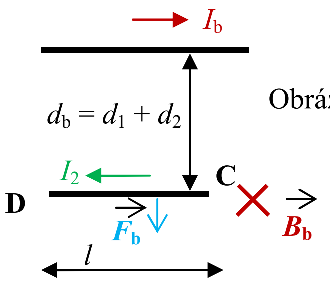


Obrázek 4.33

a) Síla působící od horního vodiče na úsek závitu AB



Obrázek 4.34



Obrázek 4.35

Magnetická indukce vytvářená horním vodičem, kterým prochází elektrický proud I_a, v kolmé vzdálenosti d_1 od vodiče (v místě úseku AB – viz. obr. 4.34) je:

$$B_a = \frac{\mu_0 \cdot I_a}{2 \cdot \pi \cdot d_1} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 2{,}5}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}05} = 1 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

Směr této magnetické indukce určíme podle pravidla pravé ruky (vztyčený palec pravé ruky ukazuje směrem doprava = směr proudu I_a, kolmo vychýlené prsty ukazují směr magnetické indukce v daném místě) – do nákresny.

Magnetické pole o indukci B_a působí na úsek závitu AB, kterým prochází proud I_2, Ampérovou silou velikosti (úhel mezi směrem proudu I_2 (doprava) a magnetickou indukcí $\overrightarrow{B_a}$ (do nákresny) je π/2):

$$F_a = I_2 \cdot l \cdot B_a \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mu_0 \cdot I_a \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot d_1} \cdot l = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}05} \cdot 0{,}1 = 2{,}5\ \mu\mathrm{N}$$

Směr síly F_a určíme Flemingovým pravidlem levé ruky (levou ruku položíme na vodič tak, aby prsty směřovaly ve směru proudu (doprava – viz. obr. 4.34), magnetická indukce vstupovala do dlaně (dlaní směrem k sobě) a palec ukazuje směr magnetické síly) - nahoru.

b) Síla působící od horního vodiče na úsek závitu CD

Magnetická indukce vytvářená horním vodičem, kterým prochází elektrický proud I_b, v kolmé vzdálenosti $d_b = d_1 + d_2$ od vodiče (v místě úseku CD – viz. obr. 4.35) je:

$$B_b = \frac{\mu_0 \cdot I_b}{2 \cdot \pi \cdot (d_1 + d_2)} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 2{,}5}{2 \cdot \pi \cdot (0{,}05 + 0{,}03)} = 6{,}25 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

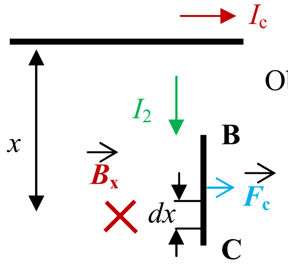
Směr této magnetické indukce je stejný jako v předchozím (vztyčený palec pravé ruky ukazuje směrem doprava = směr proudu I_b, kolmo vychýlené prsty ukazují směr magnetické indukce v daném místě) – směrem do nákresny.

Magnetické pole o indukci B_b působí na úsek závitu CD, kterým prochází proud I_2, Ampérovou silou velikosti (úhel mezi směrem proudu I_2 (doleva) a magnetickou indukcí $\overrightarrow{B_b}$ (do nákresny) je π/2):

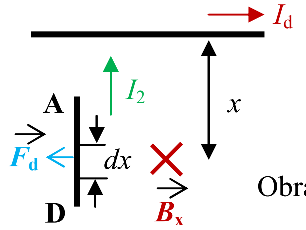
$$F_b = I_2 \cdot l \cdot B_b \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mu_0 \cdot I_b \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot (d_1 + d_2)} \cdot l = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5}{2 \cdot \pi \cdot (0{,}05 + 0{,}03)} \cdot 0{,}1 = 1{,}56\ \mu\mathrm{N}$$

Směr síly F_b určíme Flemingovým pravidlem levé ruky (levou ruku položíme na vodič tak, aby prsty směřovaly ve směru proudu (doleva – viz. obr. 4.35), magnetická indukce vstupovala do dlaně (dlaní směrem k sobě) a palec ukazuje směr magnetické síly) – dolů.

c) Síla působící od horního vodiče na úsek závitu BC – viz. obr. 4.36



Obrázek 4.36



Obrázek 4.37

Velikost magnetické indukce, kterou vytváří vodič, závisí na vzdálenosti od tohoto vodiče. Ve vzdálenosti x je magnetická indukce:

$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot I_c}{2 \cdot \pi \cdot x}$$

Tato magnetická indukce působí na element závitu délky dx (kterým prochází elektrický proud I_2) silou dF (úhel mezi směrem proudu I_2 (dolů) a magnetickou indukcí $\overrightarrow{B_x}$ (do nákresny) je $\pi/2$):

$$dF = I_2 \cdot B_x \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) dx = \frac{\mu_0 \cdot I_c \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot x} dx$$

Výslednou sílu působící na úsek BC určíme integrací v mezích od d_1 (bod B) do $d_1 + d_2$ (bod C) – viz. obr. 4.36 a obr. 4.33:

$$F_c = \int dF = \int_{d_1}^{d_1+d_2} \frac{\mu_0 \cdot I_c \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot x} dx = \frac{\mu_0 \cdot I_c \cdot I_2}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{d_1}^{d_1+d_2} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 \cdot I_c \cdot I_2}{2 \cdot \pi} \cdot [ln|x|]_{d_1}^{d_1+d_2}$$

Dosadíme integrační meze a dostaneme:

$$F_c = \frac{\mu_0 \cdot I_c \cdot I_2}{2 \cdot \pi} \cdot [ln(d_1 + d_2) - ln(d_1)] = \frac{\mu_0 \cdot I_c \cdot I_2}{2 \cdot \pi} \cdot ln \frac{d_1 + d_2}{d_1}$$

$$= \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5}{2 \cdot \pi} \cdot ln \frac{0{,}08}{0{,}05} = 0{,}587\ \mu\text{N}$$

Směr síly F_c určíme Flemingovým pravidlem levé ruky (levou ruku položíme na vodič tak, aby prsty směřovaly ve směru proudu (dolů – viz. obr. 4.36), magnetická indukce vstupovala do dlaně (dlaní směrem k sobě) a palec ukazuje směr magnetické síly) – doprava.

d) Síla působící od horního vodiče na úsek závitu DA – viz. obr. 4.37

Ze symetrie problému je zřejmé, že velikost síly působící na úsek DA, je stejná jako velikost síly působící na úsek BC a tedy $F_d = F_c$. Přesný postup výpočtu je podobný jako v předchozím. Velikost magnetické indukce, kterou vytváří vodič, závisí na vzdálenosti od tohoto vodiče. Ve vzdálenosti x je magnetická indukce:

$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot I_d}{2 \cdot \pi \cdot x}$$

Tato magnetická indukce působí na element závitu délky dx (kterým prochází elektrický proud I_2) silou dF (úhel mezi směrem proudu I_2 (nahoru) a magnetickou indukcí $\overrightarrow{B_x}$ (do nákresny) je π/2):

$$dF = I_2 \cdot B_x \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) dx = \frac{\mu_0 \cdot I_d \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot x} dx$$

Výslednou sílu působící na úsek DA určíme integrací v mezích od $d_1 + d_2$ (bod D) do d_1 (bod A) – viz. obr. 4.37 a obr. 4.33:

$$F_d = \int dF = \int_{d_1+d_2}^{d_1} \frac{\mu_0 \cdot I_d \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot x} dx = \frac{\mu_0 \cdot I_d \cdot I_2}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{d_1+d_2}^{d_1} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 \cdot I_d \cdot I_2}{2 \cdot \pi} \cdot [ln|x|]_{d_1+d_2}^{d_1}$$

Dosadíme integrační meze a dostaneme:

$$F_d = \frac{\mu_0 \cdot I_d \cdot I_2}{2 \cdot \pi} \cdot [ln(d_1) - ln(d_1 + d_2)] = \frac{\mu_0 \cdot I_d \cdot I_2}{2 \cdot \pi} \cdot ln \frac{d_1}{d_1 + d_2}$$
$$= \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5}{2 \cdot \pi} \cdot ln \frac{0{,}05}{0{,}08} = -0{,}587\ \mu\text{N}$$

Směr síly F_d určíme Flemingovým pravidlem levé ruky (levou ruku položíme na vodič tak, aby prsty směřovaly ve směru proudu (nahoru – viz. obr. 4.37), magnetická indukce vstupovala do dlaně (dlaní směrem k sobě) a palec ukazuje směr magnetické síly) – doleva (význam znaménka mínus v předchozím výsledku).

Výslednou sílu působící na závit určíme vektorovým součtem všech příspěvků. Protože $\overrightarrow{F_d} = -\overrightarrow{F_c}$ je výsledná síla působící doprava (resp. doleva) rovna nule. Protože $F_a > F_b$ bude mít výsledná síla směr nahoru a její velikost je:

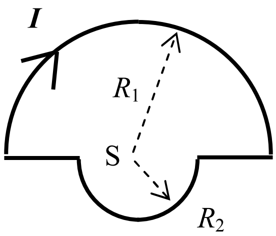
$$F_{výsledek} = F_a - F_b = \frac{\mu_0 \cdot I_2 \cdot l}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{I_a}{d_1} - \frac{I_b}{d_1 + d_2}\right)$$

Dosadíme:

$$F_{výsledek} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2{,}5}{0{,}05} - \frac{2{,}5}{0{,}05 + 0{,}03}\right) = 0{,}937\ \mu\text{N}$$

Odpověď: Výsledná síla působící od horního vodiče na závit je 0,94 μN směrem nahoru.

9. Vypočtěte velikost a směr výsledné magnetické indukce vytvářené dvěma vodiči protékanými proudem ve tvaru půlkružnic v jejich společném středu S (viz. obr. 4.38). Rozměry R_1 = 2 cm, R_2 = 1 cm a proud tekoucí oběma vodiči I = 100 A (ve směru hodinových ručiček).



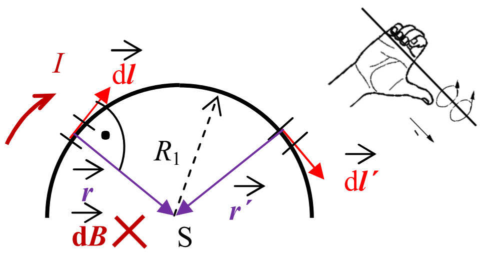
Obrázek 4.38

$R_1 = 0{,}02$ m
$R_2 = 0{,}01$ m
$I = 100$ A
$\overrightarrow{B_S} = ?$

Řešení: Pro výpočet použijeme Biotův-Savartův-Laplaceův zákon. Rozdělíme si vodič, kterým prochází proud, na čtyři úseky, a vypočteme příspěvek k magnetické indukci v bodě S zvlášť pro každý z těchto úseků.

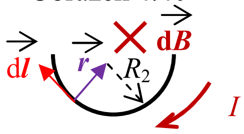
a) Půlkružnice nad bodem S

Pro představu použijeme obr. 4.39, na kterém jsou vybrány dva elementy vodiče $\vec{dl}$ a $\vec{dl}'$. Podle pravidla pro vektorový součin je směr příspěvku $\vec{dB}$ od elementu $\vec{dl}$ (i od všech ostatních elementů) do nákresny. Výsledná magnetická indukce bude tedy v bodě S směřovat do nákresny.



Obrázek 4.39

Obrázek 4.40



Velikost příspěvku k magnetické indukci v bodě S od vybraného elementu dl je:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{sin\varphi}{r^2} dl$$

Úhel mezi vektory $\vec{dl}$ (směr tečny kružnice) a $\vec{r}$ (směr normály kružnice) je $\varphi = \pi/2$ a to pro všechny elementy (viz. obr. 4.39). Navíc vzdálenost $r = R_1$ je konstanta. Výslednou magnetickou indukci v bodě S vypočteme integrací:

$$B_a = \int dB = \int_0^l \frac{\mu_0 \cdot I \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4 \cdot \pi \cdot R_1^2} dl = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot R_1^2} \cdot \int_0^l dl = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot R_1^2} \cdot l$$

Kde l je délka vodiče (půlkružnice), tj. $l = \pi \cdot R_1$

Příspěvek k magnetické indukci v bodě S od horní půlkružnice je tedy:

$$B_a = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot R_1^2} \cdot \pi \cdot R_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot R_1}$$

b) Půlkružnice pod bodem S (viz. obr. 4.40)

Postupujeme obdobně jako v předcházejícím. Vyjdeme-li z předchozího výsledku a uvědomíme-li si, se obě půlkružnice se liší pouze poloměrem, dostaneme:

$$B_b = \int dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot R_2^2} \cdot l$$

Kde l je délka vodiče (půlkružnice), tj. $l = \pi \cdot R_2$

Příspěvek k magnetické indukci v bodě S od horní půlkružnice je tedy:

$$B_b = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot R_2^2} \cdot \pi \cdot R_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot R_2}$$

směrem do nákresny.

c) Úsek vlevo od bodu S

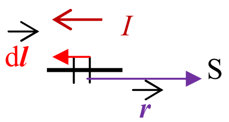
Pro všechny elementy tohoto úseku směr vektoru $\vec{dl}$ (na obr. 4.41 červeně) míří proti směru vektoru $\vec{r}$ (na obr. 4.41 fialově). Velikost příspěvku k magnetické indukci v bodě S od vybraného elementu $\vec{dl}$ je:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{sin\varphi}{r^2} dl$$

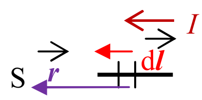
kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{dl}$ a $\vec{r}$

Pro všechny elementy $\vec{dl}$ je úhel $\varphi = \pi$, a tedy $dB = 0$ a $B_c = 0$ T.

Úsek vodiče vlevo od bodu S tedy k magnetické indukci v bodě S nepřispívá!



Obrázek 4.41



Obrázek 4.42

d) Úsek vpravo od bodu S

Pro všechny elementy tohoto úseku je směr vektoru $\overrightarrow{dl}$ (na obr. 4.42 červeně) rovnoběžný se směrem vektoru $\vec{r}$ (na obr. 4.42 fialově). Velikost příspěvku k magnetické indukci v bodě S od vybraného elementu $\overrightarrow{dl}$ je:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{sin\varphi}{r^2} dl$$

kde φ je úhel, který svírají vektory $\overrightarrow{dl}$ a $\vec{r}$

Pro všechny elementy $\overrightarrow{dl}$ je úhel $\varphi = 0$, a tedy dB = 0 a B_d = 0 T.

Úsek vodiče vpravo od bodu S k magnetické indukci v bodě S také nepřispívá!

Protože příspěvky B_c = B_d = 0 T a příspěvky B_a a B_b jsou rovnoběžné a míří směrem do nákresny, je velikost výsledné magnetické indukce v bodě S:

$$B_S = B_a + B_b = \frac{\mu_0 \cdot I}{4} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{4} \cdot \left(\frac{1}{0{,}02} + \frac{1}{0{,}01}\right) = 47{,}12\ \mu\mathrm{T}$$

směrem do nákresny.

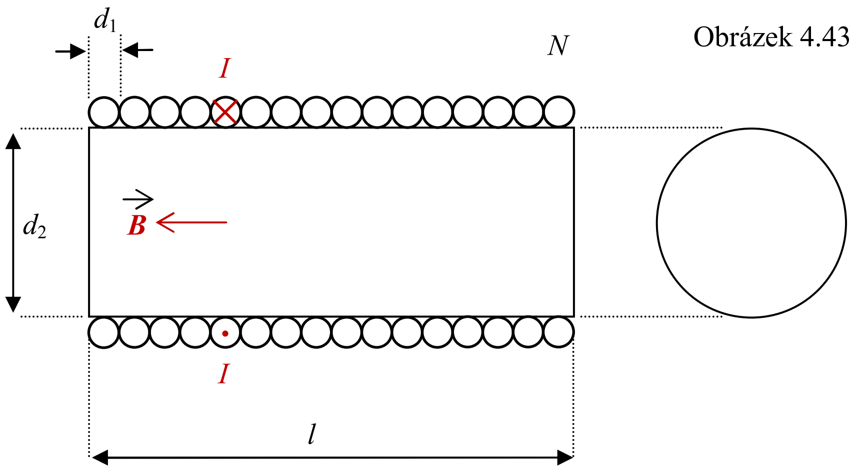
Odpověď: Výsledná magnetická indukce vytvářená vodičem podle obr. 4.38 ve společném středu dvou půlkružnic je 47 μT směrem do nákresny.

Poznámka: Porovnáním magnetické indukce pro půlkružnici nad bodem S $\left(B_a = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot R_1}\right)$, pod bodem S $\left(B_b = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot R_2}\right)$ a magnetické indukce, kterou ve svém středu vytváří kruhová smyčka $\left(B_{smyčka} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R}\right)$, zjistíme, že $B_a = B_b = \frac{1}{2} \cdot B_{smyčka}$. Můžeme si to představit tak, že půlkružnice je „poloviční kruhová smyčka“, a tudíž vytváří ve svém středu magnetické pole s poloviční magnetickou indukcí.

10. Měděný drát má rezistivitu 1,555·10^{-8} Ω·m a průměr je 2 mm. Z tohoto drátu je navinuta válcová cívka bez jádra délky 2 dm o 1000 závitech navinutých těsně vedle sebe, s průměrem závitu 2 cm. Jak velké elektrické napětí je třeba přiložit na konce tohoto drátu, aby uvnitř cívky byla magnetická indukce o velikosti 300 mT?

ρ = 1,555·10^{-8} Ω·m
d_1 = 2·10^{-3} m
l = 0,2 m
N = 1000
d_2 = 0,02 m
B = 0,3 T
U = ?

Řešení:



Obrázek 4.43

Magnetickou indukci uvnitř cívky vypočteme jako:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l}$$

Elektrický proud procházející cívkou, který vytvoří zadané magnetické pole, je tedy:

$$I = \frac{B \cdot l}{\mu_0 \cdot N} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}2}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000} = 47{,}75 \text{ A}$$

Pro výpočet elektrického napětí je třeba znát elektrický odpor drátu, ze kterého je navinuta cívka. Elektrický odpor drátu vypočteme jako (viz. kapitola 3):

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

kde l je délka drátu, kterou vypočteme jako součin počtu závitů N a délky jednoho závitu, tedy: $l = N \cdot \pi \cdot d_2$, a S je průřez drátu, který vypočteme jako $S = \pi \cdot \left(\frac{d_1}{2}\right)^2$ - viz. obr. 4.43. na kterém je cívka nakreslena v příčném a podélném řezu.

Elektrický odpor drátu je tedy:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} = \rho \cdot \frac{N \cdot \pi \cdot d_2}{\pi \cdot \frac{d_1^2}{4}} = \frac{4 \cdot N \cdot \rho \cdot d_2}{d_1^2} = \frac{4 \cdot 1000 \cdot 1{,}555 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}02}{(2 \cdot 10^{-3})^2} = 0{,}311\ \Omega$$

Hledané elektrické napětí vypočteme z Ohmova zákona (viz. kapitola 3):

$$U = R \cdot I = \frac{4 \cdot N \cdot \rho \cdot d_2}{d_1^2} \cdot \frac{B \cdot l}{\mu_0 \cdot N}$$

Číselně:

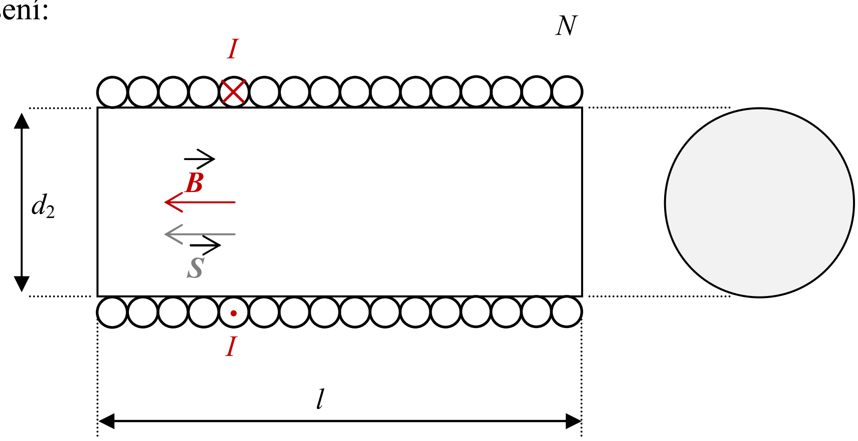
$$U = 0{,}311 \cdot 47{,}75 = 14{,}85\ \mathrm{V}$$

Odpověď: Pro vytvoření magnetického pole dle zadání musíme na konce drátu přiložit elektrické napětí 15 V.

11. Válcovou cívkou bez jádra s 500 závity s průměrem závitu 10 cm a délkou 50 cm protéká proud 100 mA. Určete:
   c) magnetický indukční tok tekoucí jedním závitem cívky,
   d) celkový magnetický indukční tok tekoucí všemi závity cívky,
   e) indukčnost cívky,
   f) energii magnetického pole cívky.

$N = 500$
$d_2 = 0{,}1$ m
$l = 0{,}5$ m
$I = 0{,}1$ A
$\Phi_1 = ?$
$\Phi = ?$
$L = ?$
$E_m = ?$

Řešení:



Obrázek 4.44

Magnetickou indukci uvnitř cívky vypočteme jako:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 0{,}1}{0{,}5} = 1{,}257 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

Předpokládáme pro jednoduchost, že uvnitř cívky, nakreslené na obr. 4.44 v podélném a příčném řezu, vzniká homogenní magnetické pole. Směr magnetické indukce při směru proudu naznačeném na obr. 4.44 (do nákresny nahoře a z nákresny dole) je doleva. Průřezem závitu je kruh, směr vektoru $\vec{S}$ je kolmo k ploše (na obr. 4.44 opět doleva – šedou barvou). Oba vektory jsou tedy rovnoběžné.

Magnetický indukční tok jedním závitem cívky Φ_1 vypočteme jako (homogenní pole):

$$\Phi_1 = B \cdot S \cdot cos(0) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l} \cdot S = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$
$$= \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 0{,}1}{0{,}5} \cdot \pi \cdot \left(\frac{0{,}1}{2}\right)^2 = 1\ \mu\mathrm{Wb}$$

Každým z N závitů cívky prochází magnetický indukční tok Φ_1, celkový magnetický tok Φ je tedy:

$$\Phi = N \cdot \Phi_1 = N \cdot \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 \cdot 0{,}1}{0{,}5} \cdot \pi \cdot \left(\frac{0{,}1}{2}\right)^2 = 0{,}493 \text{ mWb}$$

Indukčnost cívky vypočteme pomocí celkového magnetického toku Φ jako:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \cdot N^2}{l} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 500^2}{0{,}5} \cdot \pi \cdot \left(\frac{0{,}1}{2}\right)^2 = 4{,}93 \text{ mH}$$

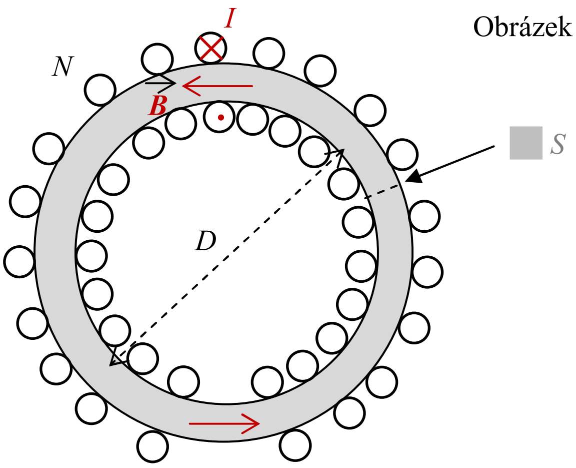
Energii magnetického pole cívky vypočteme pomocí indukčnosti:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot N^2}{l} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \cdot I^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 500^2}{2 \cdot 0{,}5} \cdot \pi \cdot \left(\frac{0{,}1}{2}\right)^2 \cdot 0{,}1^2$$
$$= 24{,}67\ \mu\text{J}$$

Odpověď: Magnetický indukční tok jedním závitem cívky je 1 μWb, celkový magnetický indukční tok všemi závity cívky je 493 μWb, indukčnost cívky je 4,9 mH a energie magnetického pole této cívky je 24,7 μJ.

12. Železné jádro ve tvaru toroidu (prstence) středního průměru 10 cm s plošným průřezem 2 cm^2 je ovinuto 500 závity, kterými teče proud 100 mA. Tím se v určitém místě v jádře vyvolá magnetický indukční tok 5 μWb. Určete velikost vektoru magnetické indukce, resp. magnetické intenzity magnetického pole v prstenci a relativní permeabilitu železa. Využijte Hopkinsonův zákon pro výpočet magnetického odporu prstence.

$D = 0{,}1$ m
$S = 2 \cdot 10^{-4}$ m^2
$N = 500$
$I = 0{,}1$ A
$\Phi_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ Wb $= \Phi$
$B = ?$
$H = ?$
$\mu_r = ?$
$R_m = ?$



Obrázek 4.45

Řešení: Elektrický proud procházející N závity cívky, která je na obr. 4.45 nakreslena v podélném a příčném řezu, vytváří uvnitř této cívky magnetické pole o intenzitě $H = \frac{N \cdot I}{l}$, kde l je délka střední magnetické indukční čáry ($l = \pi \cdot D$), tj.:

$$H = \frac{N \cdot I}{\pi \cdot D} = \frac{500 \cdot 0{,}1}{\pi \cdot 0{,}1} = 159{,}1 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

Intenzita magnetického pole není závislá na materiálu, ze kterého je jádro cívky.

Vzhledem k tomu, že jádrem cívky je železo s relativní permeabilitou μ_r, vypočítá se magnetická indukce uvnitř cívky jako:

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot I}{\pi \cdot D}$$

Plocha průřezu S jádra cívky je malá a pro jednoduchost budeme předpokládat, že magnetické pole vznikající uvnitř cívky je homogenní.

Vzhledem k tomu, že ve všech bodech uvnitř cívky je směr magnetické indukce kolmý na plochu průřezu cívky (tedy rovnoběžný s vektorem $\vec{S}$), můžeme magnetický indukční tok jedním závitem cívky (tj. magnetický indukční tok v určitém místě jádra cívky) vypočítat jako:

$$\Phi_1 = B \cdot S \cdot cos(0)$$

Z tohoto vztahu můžeme vyjádřit hledanou magnetickou indukci uvnitř cívky:

$$B = \frac{\Phi_1}{S} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-4}} = 25 \text{ mT}$$

Hledanou relativní permeabilitu železa μ_r můžeme vypočítat ze vztahu mezi magnetickou indukcí a intenzitou magnetického pole:

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H \rightarrow \mu_r = \frac{B}{\mu_0 \cdot H} = \frac{\Phi_1 \cdot \pi \cdot D}{S \cdot \mu_0 \cdot N \cdot I} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot \pi \cdot 0{,}1}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 0{,}1} = 125$$

Dosadíme-li do výrazu pro magnetický indukční tok $\Phi_1 = B \cdot S \cdot cos(0)$ za magnetickou indukci $B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot I}{\pi \cdot D}$, dostaneme:

$$\Phi_1 = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot I}{\pi \cdot D} \cdot S$$

Tento výraz přepíšeme do tvaru:

$$\Phi = \frac{N \cdot I}{\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{\pi \cdot D}{S}} = \frac{U_m}{R_m}$$

který se nazývá Hopkinsonův zákon, kde $U_m = N \cdot I$ je tzv. magnetomotorické napětí (magnetický indukční tok je vytvářen N závity, kterými teče elektrický proud I) a $R_m = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{\pi \cdot D}{S}$ je tzv. magnetický odpor cívky (odpor, který materiál klade průchodu magnetického toku).

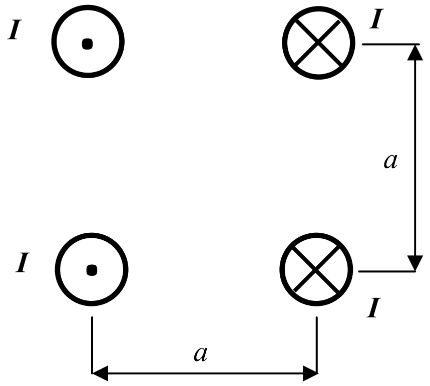
Magnetický odpor cívky tedy vypočteme jako:

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{\pi \cdot D}{S} = \frac{\pi \cdot 0{,}1}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 125 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 10^7 \text{ H}^{-1}$$

Odpověď: Magnetická indukce uvnitř jádra cívky je 25 mT, intenzita magnetického pole uvnitř cívky je 159 $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$, relativní permeabilita železného jádra je 125 a magnetický odpor cívky je 10^7 H^{-1}.

Autotest

1. Čtyři dlouhé vodiče jsou navzájem rovnoběžné a procházejí vrcholy čtverce se stranami $a = 20$ cm kolmo k jeho rovině. Každým z vodičů prochází proud $I = 20$ A ve směru podle obr. 4.46. Určete velikost a směr magnetické indukce $\vec{B}$ ve středu čtverce.



Obrázek 4.46

(80 μT, směrem nahoru)

2. Určete velikost a směr magnetické indukce na ose kruhového závitu o poloměru R, kterým protéká proud I. Řešte nejprve obecně a poté určete velikost magnetické indukce na ose závitu ve vzdálenosti 10 cm od jejího středu, je-li $I = 10$ A a poloměr závitu 5 cm. *(11,2 μT)*
3. Vodiče ve tvaru kružnice a pravidelného šestiúhelníku mají stejnou délku a teče jimi i stejný proud. Porovnejte velikosti magnetických indukcí ve středu kružnice a šestiúhelníku.
$\left(\frac{B_6}{B_k} = 1{,}053\right)$
4. Ve dvou souosých cívkách stejné délky vinutých na sobě tečou proudy opačných směrů. Jedna cívka má 300 závitů, jimiž teče proud 0,4 A, druhá má pak 160 závitů. Jaký proud musí jimi protékat, aby výsledné magnetické pole uvnitř obou cívek bylo nulové?
(0,75 A)

V. Literatura

Sestaveno na základě uvedených zdrojů:

HALLIDAY, David, RESNICK, Robert a WALKER, Jearl: Fyzika. Brno: Vutium, 2000. ISBN 80-214-1868-0.

JANÍČEK, Petr a KAŠPAROVÁ, Jana: Sbírka řešených příkladů z mechaniky. Pardubice, 2014. ISBN 978-80-7395-721-6 (pdf).

TULKA, Jiří: Výpočtové úlohy z fyziky pro posluchače UPa (I). Pardubice, 2001. ISBN 80-7194-383-5.

TULKA, Jiří a PIRKL, Slavomír: Výpočtové úlohy z fyziky (II) Elektřina a magnetismus. Pardubice, 2001. ISBN 80-7194-386-X.

ZAJÍC, Jan a KAŠPAROVÁ, Jana: Základy fyziky I (Sbírka příkladů pro posluchače prezenčního studia DFJP Univerzity Pardubice). Pardubice, 2003.

ZAJÍC, Jan: Základy fyziky II (Sbírka příkladů pro posluchače prezenčního studia DFJP Univerzity Pardubice). Pardubice, 2006.

ZAJÍC, Jan: Fyzika II (pro technické obory DFJP Univerzity Pardubice). Pardubice, 2013.

Obrázek magnetického pole v okolí přímého vodiče (použit v obr 4.22, 4.23, 4.24, 4.26, 4.30 a 4.39) převzat z:

http://www.techmania.cz/edutorium/art_exponaty.php?xkat=fyzika&xser=456c656b74f8696e612061206d61676e657469736d7573h&key=435

Obrázek Flemingova pravidla levé ruky (číslo 4.1, použitý i u obr. 4.7, 4.13, 4.19 a 4.20) převzat z:

http://kvinta-html.wz.cz/fyzika/elektrina_a_magnetismus/stacionarni_magneticke_pole/magneticka_indukce.htm

Název	Sbírka řešených příkladů z gravitace, elektřiny a magnetismu
Autoři	RNDr. Petr Janíček, Ph.D., Mgr. Jana Kašparová, Ph.D.
Vydavatel	Univerzita Pardubice
Určeno pro	studenty Fakulty chemicko-technologické a Dopravní fakulty Jana Pernera Univerzity Pardubice
Odpovědný redaktor	doc. Ing. Zdeněk Palatý, CSc.
Stran	128
Vydání	první
AA/VA	4,93 / 4,96
Forma vydání	e-kniha (pdf)

ISBN 978-80-7395-832-9 (pdf)