UNIVERZITA PARDUBICE
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Fourierovy Řady

Jakub Jeřábek

Bakalářská práce
2012

Univerzita Pardubice
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Akademický rok: **2011/2012**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Jakub Jeřábek**
Osobní číslo:	**I09428**
Studijní program:	**B2612 Elektrotechnika a informatika**
Studijní obor:	**Komunikační a mikroprocesorová technika**
Název tématu:	**Fourierovy řady**
Zadávající katedra:	**Katedra elektrotechniky**

Zásady pro vypracování:

Cílem je vypracovat učební oporu, která bude využitelná pro studenty při studiu oborů ŘP a KMT. Bude obsahovat stručné uvedení do problematiky Fourierových řad, několik příkladů s podrobným postupem řešení a nakonec sbírku úloh, jejichž řešení bude možné sledovat např. jako interaktivní nápovědu (např. volitelnou v různých úrovních).
Součástí práce bude dále několik ilustračních ukázek (animací či obrázků) jak vypadají konkrétní (konečné) rozvoje několika vybraných funkcí.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

Boris Pavlovič Děmidovič: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment 2003
Seibert, J. Matematika III. Univerzita Pardubice 2007

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Martin Svoboda**
Katedra matematiky a fyziky

Datum zadání bakalářské práce: **12. prosince 2011**
Termín odevzdání bakalářské práce: **11. května 2012**

Univerzita Pardubice
Česká republika

L.S.

prof. Ing. Simeon Karamazov, Dr.
děkan

Ing. Zdeněk Němec, Ph.D.
vedoucí katedry

V Pardubicích dne 30. března 2012

Prohlášení autora

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně.

V Pardubicích dne 17. 8. 2012 Jakub Jeřábek

Poděkování

Děkuji vedoucímu bakalářské práce RNDr. Martinu Svobodovi za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé bakalářské práce.

Anotace

Cílem je vypracovat učební oporu, která bude využitelná pro studenty při studiu oborů ŘP a KMT. Bude obsahovat stručné uvedení do problematiky Fourierových řad, několik příkladů s podrobným postupem řešení a nakonec sbírku úloh, jejichž řešení bude možné sledovat např. jako interaktivní nápovědu (např. volitelnou v různých úrovních). Součástí práce bude dále několik ilustračních ukázek (animací či obrázků) jak vypadají konkrétní (konečné) rozvoje několika vybraných funkcí.

Klíčová slova

Fourierova řada, Komplexní Fourierova řada, Amplitudové spektrum, Fázové spektrum

Title

Fourier Series

Annotation

The aim of this thesis is work out learning support, which will be usable for students who are following the next two courses: Controlling Proces and Communication Microprocess Technology. This teaching support will contain a brief introduction to problems of Fourier series, with some examples that show the solving method in detail and collection of the tasks. You will be able to follow to accompanying solution as an e.g. interactive hint. A part of the task will also contain out of some illustrated demonstrations (animations or pictures) and how specific (final) developments of the several selection fuctions are and what they look like.

Keywords

Fourier series, complex Fourier series, Amplitude spectrum, Phase spectrum

Obsah

Seznam zkratek **8**

Seznam obrázků **9**

Úvod. **11**

1 Fourierova řada **12**

1.1 Periodické funkce 12

1.2 Fourierova řada neperiodické funkce 17

1.3 Přímé periodické prodloužení. 17

1.4 Sudé periodické prodloužení. 17

1.5 Liché periodické prodloužení. 18

1.6 Využití Fourierových řad 19

1.7 Komplexní Fourierova řada 23

1.8 Amplitudový tvar FŘ 28

2 Sbírka příkladů **30**

2.1 Příklad 1 31

2.2 Příklad 2 33

2.3 Příklad 3 39

2.4 Příklad 4 43

2.5 Příklad 5 45

2.6 Příklad 6 47

2.7 Příklad 7 49

2.8 Příklad 8 51

2.9 Příklad 9 53

2.10 Příklad 10 55

2.11 Příklad 11 57

2.12 Příklad 12 59

2.13 Příklad 13 62

2.14 Příklad 14 65

2.15 Příklad 15 66

Závěr **69**

Literatura **70**

Příloha A – Zdrojový kód příkladů v MATLABU **71**

Seznam zkratek

FŘ Fourierova řada

Seznam obrázků

1-1 Periodický signál ... 12
1-2 Sudé a liché rozšířeni funkce s(x) (převzato z [7]) ... 18
1-3 Ukázka periodického prodloužení ... 19
1-4 Zobrazení Fourierovy řady v časové a frekvenční oblasti (převzato z [4]) ... 20
1-5 Graf zadané funkce ... 21
1-6 Částečný součet trigonometrické FŘ ... 22
1-7 Graf amplitudového a fázového spektra ... 23
1-8 Dva komplexně sdružené rotující vektory (převzato z [2]) ... 25
1-9 Dvoustranné amplitudové a fázové spektrum ... 25
1-10 Zadaní příkladu pro komplexní FŘ ... 26
1-11 Částečný součet komplexní FŘ ... 27
1-12 Oboustranné amplitudové a fázové spektrum ... 28
2-1 Zadání př.1 ... 31
2-2 Př.1 Částečný součet FŘ ... 33
2-3 Zadání př.2 ... 34
2-4 Př.2 Částečný součet kosinové FŘ ... 39
2-5 Zadání př.3 ... 40
2-6 Př. 3 Částečný součet sinové FŘ ... 42
2-7 Zadání př.4 ... 43
2-8 Př. 4 Částečný součet kosinové FŘ ... 45
2-9 Zadání př. 5 ... 46
2-10 Př. 5 Částečný součet FŘ ... 47
2-11 Zadání př. 6 ... 48
2-12 Zadání př. 7 ... 50
2-13 Př. 7 Částečný součet FŘ ... 51
2-14 Zadání př. 8 ... 52
2-15 Př. 8 Částečný součet FŘ ... 53
2-16 Zadání př. 9 ... 54
2-17 Př. 9 Částečný součet FŘ ... 55
2-18 Zadání př. 10 ... 56
2-19 Př. 10 Částečný součet FŘ ... 57
2-20Zadání př. 11 ... 58
2-21 Př. 11 Částečný součet FŘ ... 59
2-22 Zadání př. 12 ... 60
2-23 Př. 12 Částečný součet FŘ ... 62
2-24 Zadání př. 13 ... 62
2-25 Př. 13 Částečný součet FŘ ... 64
2-26 Zadání př. 14 ... 65
2-27 Př. 1 Částečný součet kosinové FŘ ... 66
2-28 15 a) Zadaná funkce a FŘ ... 67
2-29 15 b) Zadaná funkce a FŘ ... 68

2-30 15 c) Zadaná funkce a FŘ 68

Úvod.

Tato bakalářská práce vznikla z podnětu vypracovat učební oporu, která by byla nápomocná studentům Fakulty elektrotechniky a informatiky oborů Řízení procesů (ŘP) a Komunikační a mikroprocesorové techniky (KMT) při studiu problematiky Fourierových řad. Fourierovy řady slouží k zápisu libovolné periodické funkce pomocí goniometrických funkcí sinus a kosinus. Fourierovou řadou lze rozložit i komplikovanější funkce, které by bylo jen velmi obtížné aproximovat. Výhodou Fourierových řad jsou méně náročné na podmínky pro konvergenci řady, než je tomu například u Taylorových řad. Teorie Fourierových řad je také nezbytným matematickým aparátem při studiu periodických signálů a jejich transformaci z časové oblasti do frekvenční oblasti. Právě frekvenční oblast, častěji nazývána jako spektrální oblast, nám umožňuje zkoumat signály v jejich zobrazení ve spektrech. Ve spektru jsou rozloženy jednotlivé složky dle kmitočtu a nabízí nám tedy jiný pohled na signál než je prezentace signálu v časové oblasti.

Text práce je rozdělen do dvou hlavních částí. První kapitola je věnována Fourierovým řadám různých tvarů. Ať jde o zápis trigonometrického, komplexního a amplitudového tvaru. Druhá část práce obsahuje řešenou sbírku s podrobným postupem řešení úloh doplněných o ukázku konkrétních rozvojů vybraných funkcí.

Následujícím textu se předpokládá, že čtenář má osvojené některé kapitoly z matematické analýzy (např. stejnosměrná konvergence řad nebo jejich částečných součtů, ortogonální systém atd.).

1 Fourierova řada

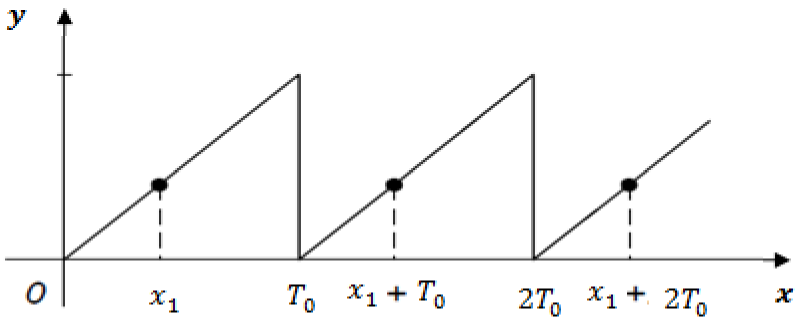
1.1 Periodické funkce

Funkce nabývající stejných hodnot pro okamžiky vzdálených od sebe o T_0 a jeho násobky. Veličina T_0 se nazývá perioda.

$$f(x) = f(x + kT_0), k \epsilon \mathbb{Z}$$

Převrácená hodnota periody je opakovací kmitočet.

$$f = \frac{1}{T_0} [\mathrm{Hz}]$$



1-1 Periodický signál

Pro integrály periodických funkcí platí:

$$\int_0^{x_1} f(x)dx = \int_{kT_0}^{kT_0+x_1} f(x)dx$$

Rozdíl, součet, součin a podíl periodických funkcí s periodou T_0 je opět periodický signál.

Před definicí Fourierovy řady uveďme pár základních pojmů, které s ní neodmyslitelně souvisí. Tedy definujme trigonometrický polynom, jehož částečný součet odpovídá periodické funkci $s_n(x)$ s periodou 2π a je dán vztahem:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos \mathrm{x} + b_1 \sin \mathrm{x} + a_2 \cos 2\mathrm{x} + b_2 \sin 2\mathrm{x} + \cdots + a_n \cos \mathrm{nx} + b_n \sin \mathrm{nx} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n} (a_n \cos \mathrm{nx} + b_n \sin \mathrm{nx}) = s_n(x)$$

Protože nekonečná řada je limitním případem polynomu pro $n \longrightarrow \infty$, pokud řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$, bude její součet periodická funkce s (x) s periodou 2π a bude dána vztahem:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \mathrm{nx} + b_n \sin \mathrm{nx}) =$$

$$= +a_1 \cos \mathrm{x} + b_1 \sin \mathrm{x} + a_2 \cos 2\mathrm{x} + b_2 \sin 2\mathrm{x} + \cdots = \mathrm{s(x)}$$

Kde reálná čísla a_0, a_n a b_n se nazývají koeficienty trigonometrické řady.

Konverguje-li řada stejnoměrně, jsou její koeficienty jednoznačně určeny vzorci:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x)\, dx\,, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x). \cos nx \ dx\,, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x). \sin nx \ dx$$

Může-li tedy součtem nekonečné trigonometrické řady být periodická funkce, můžeme se obráceně pokusit rozložit nějakou danou periodickou funkci na součet nekonečné trigonometrické řady.

Nechť máme periodickou funkce f, která je definována na základním intervalu periodicity $\langle -\pi, \pi \rangle$, na kterém je po částech spojitá. Tedy není spojitá jen v konečně mnoha bodech tohoto intervalu a body nespojitosti jsou pouze prvního druhu. U nespojitostí prvního existují jednostranné limity zleva a zprava.

Chceme-li vyjádřit periodickou funkci f jako trigonometrickou řadu, musíme určit, jak souvisí koeficienty trigonometrické řady se zadanou funkcí.

Předpokládáme-li, že $f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \mathrm{nx} + b_n \sin \mathrm{nx})$ v $\langle -\pi, \pi \rangle$. Poté platí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \mathrm{nx} + b_n \sin \mathrm{nx}) \right\} dx \qquad (1.1)$$

Konverguje-li trigonometrická řada stejnoměrně v $\mathbb{R}$, můžeme ve vztahu (1.1) zaměnit pořadí integrál suma a můžeme určit koeficienty a_0, a_n, b_n.

Pro výpočet koeficientů využijeme ortogonality trigonometrického systému funkcí na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, který je dán: $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx\}$ a pro který platí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \;\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \;\, dx = 0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \,.\cos mx \;\, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \,.\cos mx \;\, dx = \begin{cases} 0\,; n \neq m \\ \pi\,; n = m \end{cases} , \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \,.\sin mx \;\, dx = \begin{cases} 0\,; n \neq m \\ \pi\,; n = m \end{cases}$$

Kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Pro koeficient a_0: integrováním řady člen po členu na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ a využitím při výpočtu integrálu ortogonality trigonometrického systému funkcí.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \;\, dx + \; b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx) = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = a_0 \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Pro koeficient a_n: vynásobíme-li FŘ $cos\ nx$, integrujeme člen po členu na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ a využitím při výpočtu integrálu ortogonality trigonometrického systému funkcí.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx.\cos nx \;\, dx + \; b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx.\cos nx \, dx) =$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx.\cos nx \;\, dx = a_n \pi \qquad , (pro\ k = n)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx \;\, dx$$

Pro koeficient b_n: vynásobíme-li FŘ $sin\ nx$, integrujeme člen po členu na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ a využitím při výpočtu integrálu ortogonality trigonometrického systému funkcí.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin nx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\ \ dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx.\sin nx\ \ dx + \ b_{\mathrm{n}}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx.\sin kx\,dx) =$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx.\sin kx\,dx = b_0\pi \qquad ,\mathrm{pro\ n = k}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin nx\ \ dx$$

Předchozími výpočty jsme určily, jak souvisí koeficienty a_0, a_n, b_n se zadanou periodickou funkcí f, která je určena trigonometrickou řadou a platí:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos \mathrm{nx} + b_n\sin \mathrm{nx})$$

Potom trigonometrickou řadu nazýváme Fourierovou (trigonometrickou) řadou funkce f na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ a koeficienty a_0, a_n, b_n se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

Pokud periodická funkce f a její derivace jsou po částech spojité funkce na základním intervalu periodicity $\langle -\pi, \pi\rangle$. Potom Fourierova řada funkce f konverguje v $\mathbb{R}$, konkrétně k hodnotě $f(x)$ v bodech x, ve kterých je daná funkce spojitá. V bodech nespojitosti x_k funkce f konverguje řada k hodnotě $\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_k^+} f(x) + \lim_{x\to x_k^-} f(x)\right]$, což je aritmetický průměr jednostranných limit zleva a zprava.

Vraťme se nyní ještě k trigonometrické řadě:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos \mathrm{nx} + b_n\sin \mathrm{nx})$$

Jsou-li všechny koeficienty $a_n = 0, pro\ n = 0, 1, 2, \ldots$, říkáme, že řada je sinová.

Jsou-li všechny koeficienty $b_n = 0,\ \ pro\ n = 1, 2, ..$, říkáme, že řada je kosinová.

Hledáme-li k funkci f jí odpovídající trigonometrickou řadu, provádíme rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu.

Co znamená pro rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu, je-li řada sinová nebo kosinová?

Nechť máme zadanou po částech spojitou sudou funkci f, definovanou na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ a budeme-li rozvíjet funkci f ze symetrického intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ je výsledný rozvoj nazýván kosinovou Fourierovou řadou.

Potom pro koeficienty kosinové FŘ platí:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \ dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx \ dx\,, b_n = 0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \mathrm{nx}$$

Pro sudou funkci f na $\langle -\pi, \pi \rangle$ je součin $f(x)\cos nx$ také sudá funkce, ale součin $f(x)\sin nx$ je lichá funkce.

Nechť máme zadanou po částech spojitou lichou funkci f, definovanou na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ a budeme-li rozvíjet funkci f ze symetrického intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ je výsledný rozvoj nazýván sinovou Fourierovou řadou.

Pro koeficienty sinové FŘ platí:

$$a_0 = 0, a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \ dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx \ dx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \mathrm{nx}$$

Pro lichou funkci f na $\langle -\pi, \pi \rangle$ je součin $f(x)\cos nx$ lichá funkce, ale součin $f(x)\sin nx$ je sudá funkce.

Pozn.: Úprava koeficientů sinové a kosinové FŘ vyplívá z následujících předpokladů integrovatelnosti sudé resp. liché funkce na symetrickém intervalu:

Funkci $f(x)$ nazýváme lichou v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, jestliže pro všechna $x \epsilon \langle -\pi, \pi \rangle$ platí: $f(-x) = -f(x)$. Pro lichou integrovatelnou funkci dostáváme:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int_{0}^{\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 0$$

Funkci $f(x)$ nazýváme sudou v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, jestliže pro všechna $x \epsilon \langle -\pi, \pi \rangle$ platí $f(-x) = f(x)$. Pro sudou integrovatelnou funkci dostáváme:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{0}^{\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx$$

1.2 Fourierova řada neperiodické funkce

Fourierovu řadu můžeme najít i k neperiodické funkci $f(x)$, která je definována jen na omezeném intervalu $< -\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2} >$ a mimo tento interval je nulová. Jestliže FŘ konverguje, pak konverguje k periodické funkci, musíme tedy vytvořit z funkce $f(x)$ periodickou funkci tvz. periodickým prodloužením. Fourierova řada existuje a je nenulová i mimo interval $< -\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2} >$.

Pro následující ukázky periodického prodloužení, předpokládejme, že funkce f a její derivace f' jsou po částech spojité funkce na intervalech, na kterém jsou definovány.

1.3 Přímé periodické prodloužení.

Nechť máme funkci $f(x)$, která je definován na intervalu (a, b). Funkci prodloužíme tak, aby byl periodický s periodou $2l = b - a$.

Definujeme $f_p(x)$, tak že $\qquad f_p(x) = f(x) \qquad , pro\ x \in (a, b)$

$$f_p(x + k2l) = \overline{f}_p(x) \qquad , k \in Z.$$

Nyní můžeme periodicky prodlouženou funkci $\overline{f}_p(x)$ rozvinout do Fourierovy řady na intervalu (a, b) pro kterou platí:

$$\overline{f}_p(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right).$$

Fourierova řada konverguje v intervalu (a, b) k hodnotě $\overline{f}_p(x)$ v bodech x , kde je funkce spojitá. V bodech nespojitosti x_k funkce $\overline{f}_p(x)$ konverguje k hodnotě $\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_k^+} f(x) + \lim_{x\to x_k^-} f(x)\right]$

1.4 Sudé periodické prodloužení.

Nechť máme funkci $f(x)$, která je definována na intervalu (0, l). Definujeme sudé prodloužení na intervalu $(-l, 0)$.

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x) \ \ pro \ \ x \in (0, l) \\ f(-x) \ \ pro\ x \in (-l, 0) \end{cases},$$

nyní výslednou funkci $f_s(x)$ periodicky prodloužíme s periodou délky $2l$ tak, že položíme $\overline{f_s}(x) = f_s(x + 2kl)$, kde $k \in Z$.

Nyní můžeme sudou periodicky prodlouženou funkci $\overline{f}_s(x)$ rozvinout do Fourierovy řady na intervalu $(-l, l)$ pro kterou platí:

$$\overline{f}_s(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, b_n = 0$$

Fourierova řada konverguje v intervalu $(-l, l)$ k hodnotě $\overline{f}_s(x)$ v bodech x , kde je funkce spojitá. V bodech nespojitosti x_k funkce $\overline{f}_s(x)$ konverguje k hodnotě $\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_k^+} f(x) + \lim_{x\to x_k^-} f(x)\right]$

Tuto řadu také nazýváme kosinová Fourierova řada.

1.5 Liché periodické prodloužení.

Nechť máme funkci $f(x)$, která je definována na intervalu (0, l). Definujeme liché prodloužení na intervalu $(-l, 0)$.

$$f_l(x) = \begin{cases} f(x) & pro\ \ x \in (0, l) \\ 0 & pro\ x = 0 \\ -f(-x) & pro\ x \in (-l, 0) \end{cases}$$

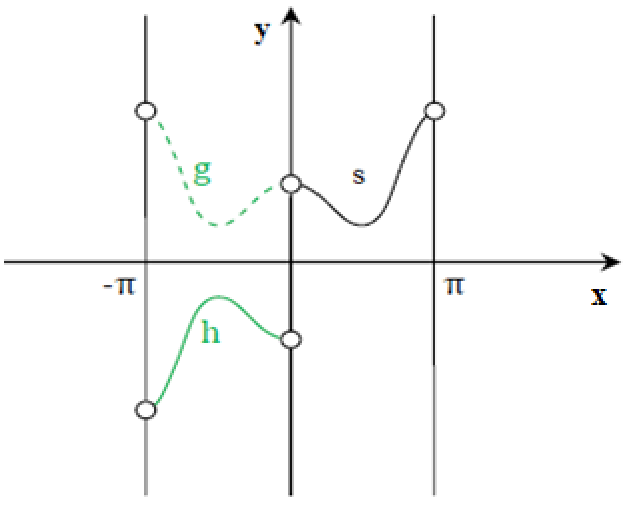
Nyní výslednou funkci $f_l(x)$ periodicky prodloužíme s periodou délky $2l$ tak, že položíme $\overline{f_l}(x) = f_l(x + 2kl)$, kde $k \in Z$.

Nyní můžeme lichou periodicky prodlouženou funkci $\overline{f}_l(x)$ rozvinout do Fourierovy řady na intervalu $(-l, l)$ pro kterou platí:

$$\overline{f}_l(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, a_n = 0$$

Fourierova řada konverguje v intervalu $(-l, l)$ k hodnotě $\overline{f}_l(x)$ v bodech x, kde je funkce spojitá. V bodech nespojitosti x_k funkce $\overline{f}_l(x)$ konverguje k hodnotě $\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_k^+} f(x) + \lim_{x\to x_k^-} f(x)\right]$

Tuto řadu nazýváme sinová Fourierova řada.



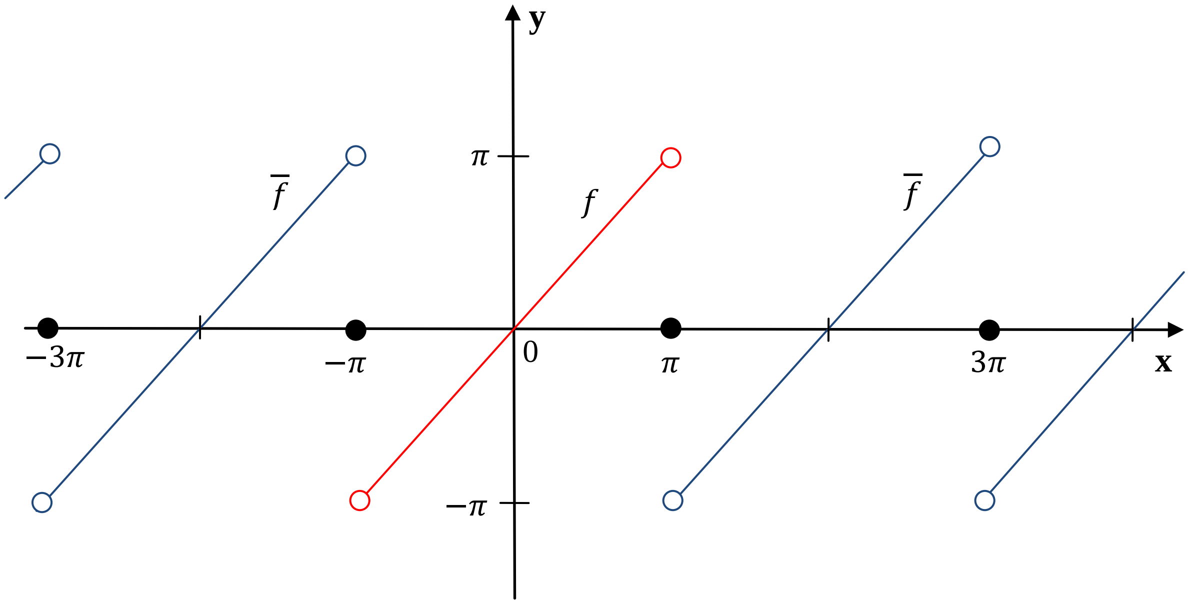
Funkce $s(x)$ je definována na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

Liché rozšíření představuje funkce $h(x)$ na intervalu$\langle 0, \pi\rangle$.

Sudé rozšíření představuje funkce $g(x)$ na intervalu$\langle 0, \pi\rangle$.

1-2 Sudé a liché rozšířeni funkce s(x) (převzato z [7])

Ukázka periodického prodloužení funkce $f(x) = x$, která je definována na intervalu $< -\pi, \pi >$.



1-3 Ukázka periodického prodloužení

Periodickým prodloužením funkce f nazýváme funkci $\overline{f}$ definovanou na $(-\infty, \infty)$.

Funkce $\overline{f}$ je periodická funkce s periodou 2π. Fourierova řada konverguje v intervalu $(-\pi, \pi)$ k hodnotě $\overline{f}(x)$ v bodech x, kde je funkce spojitá. V bodech nespojitosti x_k funkce $\overline{f}(x)$ konverguje k hodnotě $\frac{1}{2}\left[\lim_{x \to x_k^+} f(x) + \lim_{x \to x_k^-} f(x)\right]$ a $\overline{f}(x + 2\pi) = \overline{f}(x)$, pro každé $x \, \epsilon (-\infty, \infty)$.

1.6 Využití Fourierových řad

Analýza signálu

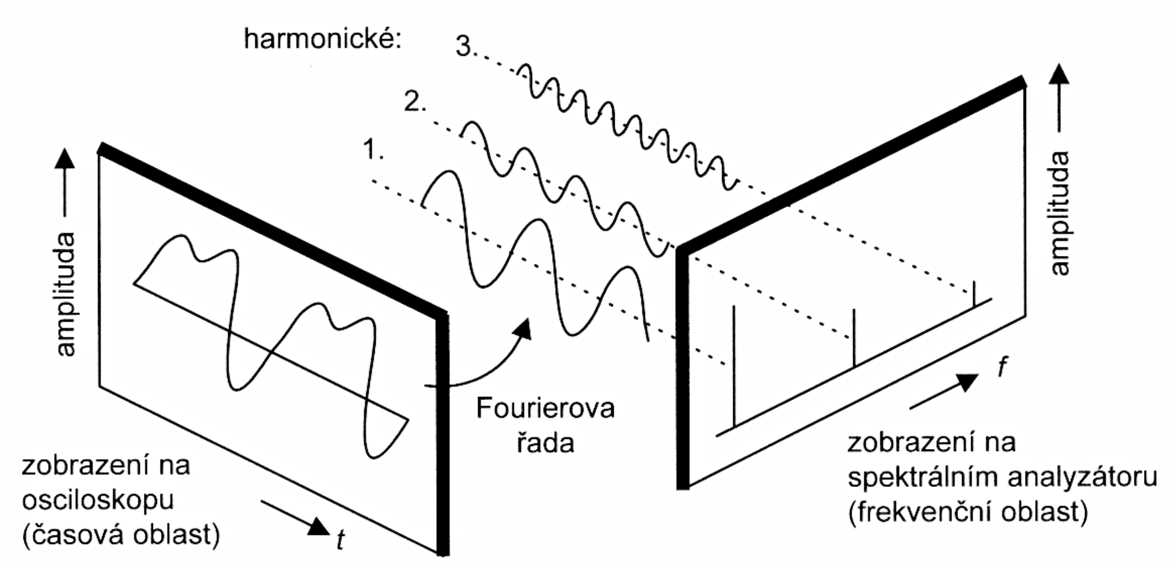
Cílem je stanovit parametry a charakteristiky analyzovaného signálu. Analýzu signálu můžeme provádět ve dvou oblastech, časové a frekvenční. Přechod mezi oblastmi je definován pomocí lineárních transformací. Transformace mají podobu vzorce či algoritmu. Pro transformaci z časové oblasti do frekvenční se realizuje u periodických signálů pomocí Fourierovy řady a u neperiodických Fourierovou transformací. Zpětně se z frekvenční oblasti do časové dostane zpětnou transformací.

Analýza v časové oblasti

V časové oblasti vyšetřujeme změnu signálu v čase. Základní informace o signálu v časové oblasti jsou informace o maximální, minimální hodnotě signálu, střední hodnota a efektivní hodnota signálu a další.

Spektrální analýza

Představuje analýzu signálu ve frekvenční oblasti. Periodický signál lze zapsat jako součet nekonečného počtu goniometrických funkcí sinus a kosinus, které mají různé amplitudy a počáteční fáze a jejichž kmitočty jsou rovny celistvým násobkům základního kmitočtu ω_0. Vyjádření signálu ve frekvenční oblasti je tvořeno amplitudovým spektrem, které odpovídá amplitudě jednotlivých harmonických složek a fázové spektrum, které vypovídá o počáteční fázi jednotlivých složek spektra. Periodické signály mají diskrétní spektra na kmitočtech rovným celistvým násobkům základní frekvence $f_0 = \frac{1}{T_0}$.



1-4 Zobrazení Fourierovy řady v časové a frekvenční oblasti (převzato z [4])

Pro signály použijeme obdobný vztah Fourierovy řady, upravený substitucí za $x = \omega_0 t$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t).$$

Kde ω_0 je tvz. první harmonická (základní frekvence).

Z koeficientů $a_{n,} b_n$ FŘ určíme amplitudu a počáteční fázi n-té harmonické složky:

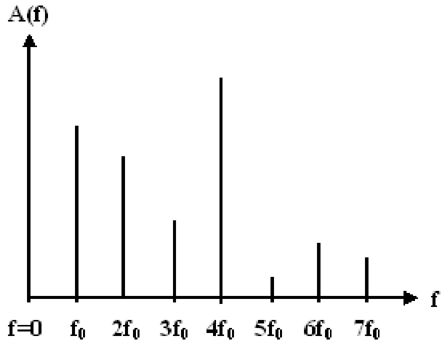
$s = s(A_n, \varphi_n)$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \;;\; \varphi_n = -\,arctg\,\frac{b}{a}\begin{cases} +0 \;\; pro\; a \geq 0 \\ +\pi \;\; pro\; a < 0 \end{cases}$$

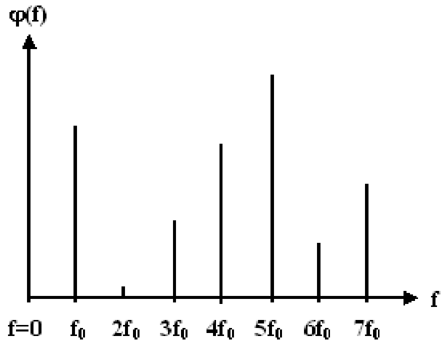
Množina amplitud $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ tvoří čárové (diskrétní) AMPLITUDOVÉ SPEKTRUM.

Množina fází$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří čárové (diskrétní) FÁZOVÉ SEKTRUM.

Periodické signály mají diskrétní spektra na kmitočtech rovných celistvým násobkům základního kmitočtu $f_0 = \frac{1}{T_0}$.



1-2 Diskrétní amplitudové spektrum



1-3 Diskrétní fázové spektru

Příklad 1: trigonometrická Fourierova řada

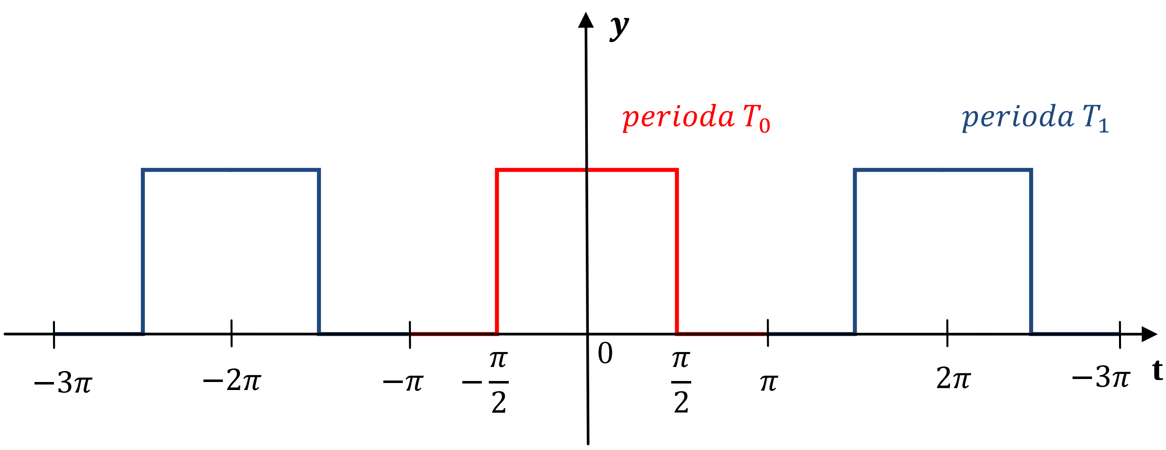
Nechť máme zadaný signál, který je definován na intervalu $T = \langle -\pi, \pi \rangle$ tak že,

$$s(t) = \begin{cases} 0 \;\; pro\; t \in \langle -\pi\,, -\frac{\pi}{2}) \\ 2\; pro\; t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \;\; pro\; t \in \left(\frac{\pi}{2}\,, \pi \right\rangle \end{cases}$$

. Najděte předpis pro Fourierovu řadu v $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Chceme-li najít Fourierovu řadu k danému signálu, musíme dodefinovat signál v intervalu $(-\infty, \infty)$, tak aby signál $s(t)$ splňoval podmínku periodické funkce, viz.(1.3). Protože pokud Fourierova řada konverguje, tak konverguje k periodickému signálu. Signál $s(t)$ musí být na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ po částech spojitý.

Nyní máme již periodický signál $\bar{s}(t)$, který je definován na intervalu $(-\infty, \infty)$.



1-5 Graf zadané funkce

Výpočet koeficientů :

Perioda: $2l = 2\pi$, půlperioda $l = \pi$.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l s(t)dt = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 0\,dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\,dt\right\} = \frac{1}{\pi}2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{2}{\pi}[t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

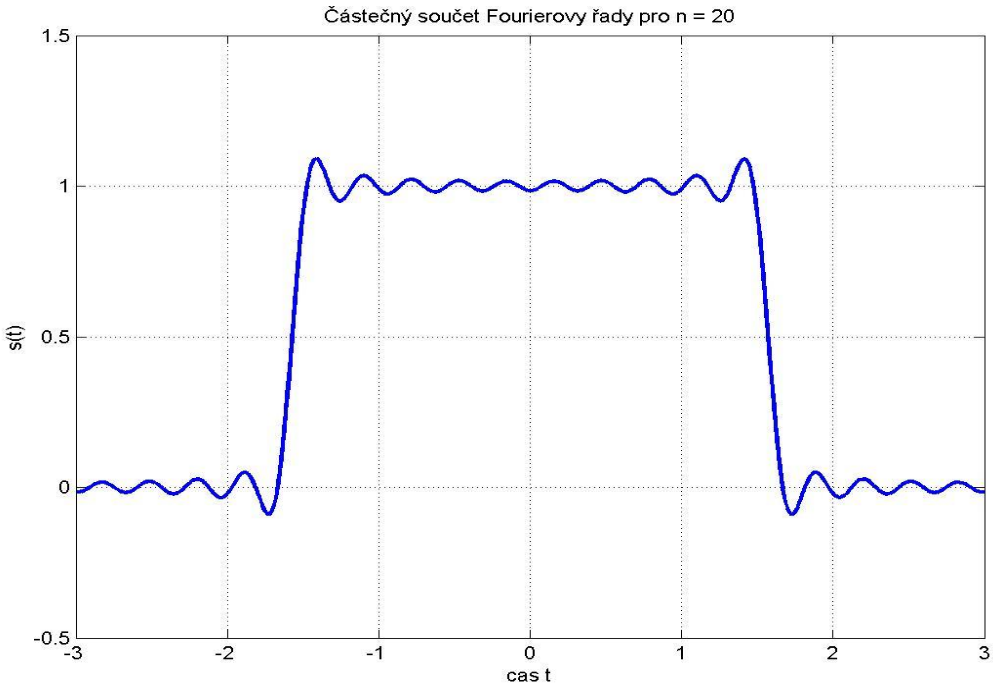
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} s(t).\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \mathrm{nt}\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n\frac{\pi}{2}) - \sin(0)}{n}\right] =$$

$$= \frac{2\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\pi} = \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\frac{\pi}{2}} \quad ,uprava\ do\ tvaru\ \frac{\sin x}{x}$$

$b_n = 0$, funkce f je sudou funkcí na intervalu$< -\pi, \pi >$

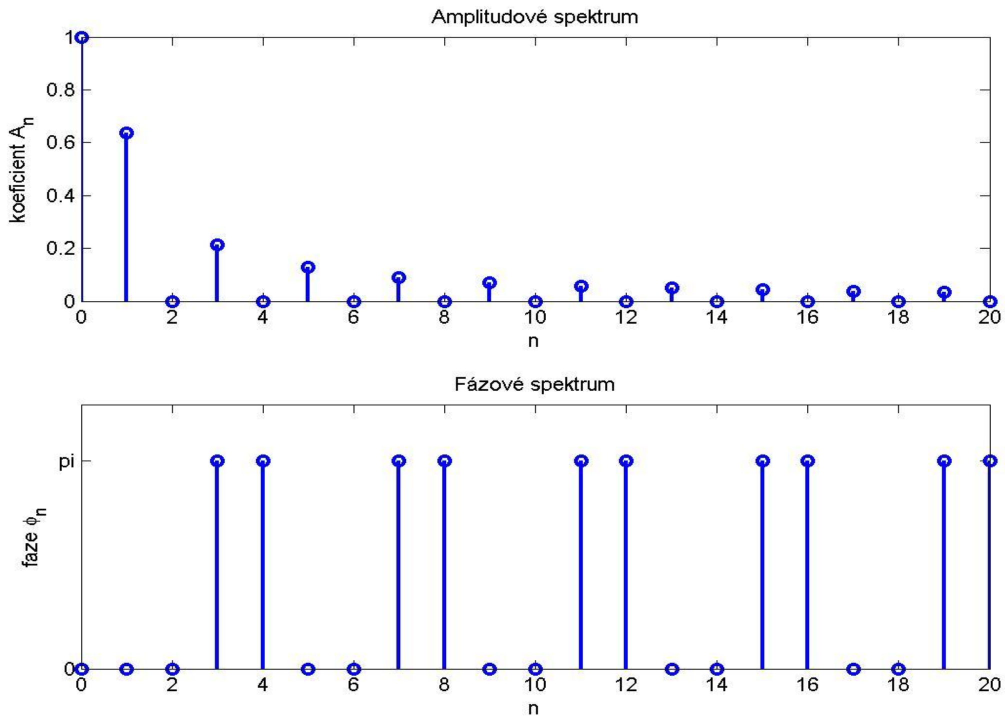
Hledaný rozvoj signálu $\overline{s}(t)$ v trigonometrickou FŘ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$:

$$\overline{s}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\frac{\pi}{2}} \cos(nt)$$



1-6 Částečný součet trigonometrické FŘ

Vykreslení diskrétního amplitudového a fázového spektra



1-7 Graf amplitudového a fázového spektra

1.7 Komplexní Fourierova řada

Komplexní Fourierova řada je jiným zápisem trigonometrické Fourierové řady.

Upravení pro

$$a_n . \cos n\omega t + b_n . \sin n\omega t = a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a_n - jb_n). e^{jn\omega t}\right] + \frac{1}{2}\left[(a_n + jb_n). e^{-jn\omega t}\right]$$

Dosazeni do trigonometrické Fourierovy řady:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_0 t}$$

Kde:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \quad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad , \quad c_n^* = \frac{a_n + jb_n}{2} = c_{-n}$$

Pro komplexní Fourierovu řadu můžeme psát:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{jn\omega_0 t}$$

Koeficient c_n:

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{2}.\frac{2}{T_0}[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t).\cos n\omega_0 t \;\; dt - j\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t).\sin n\omega_0 t \; dt \,] =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t)[\cos n\omega_0 t - \mathrm{j} \sin n\omega_0 t] \;\; dt = \;\; \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \; e^{-jn\omega_0 t} \;\; dt$$

Dosazením za a_n,, b_n:

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t).\cos n\omega_o t \;\; dt \qquad\qquad b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t).\sin n\omega_o t \;\; dt$$

Určení jednostranného spektra z koeficientu c_n

$A_0 = c_0$

$$|c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 \, b^2} \qquad \Rightarrow \qquad A_n = 2|c_n| \;\; \begin{cases} a_n = 2 \, Re(c_n) \\ b_n = -2 \, Im \, (c_n) \end{cases}$$

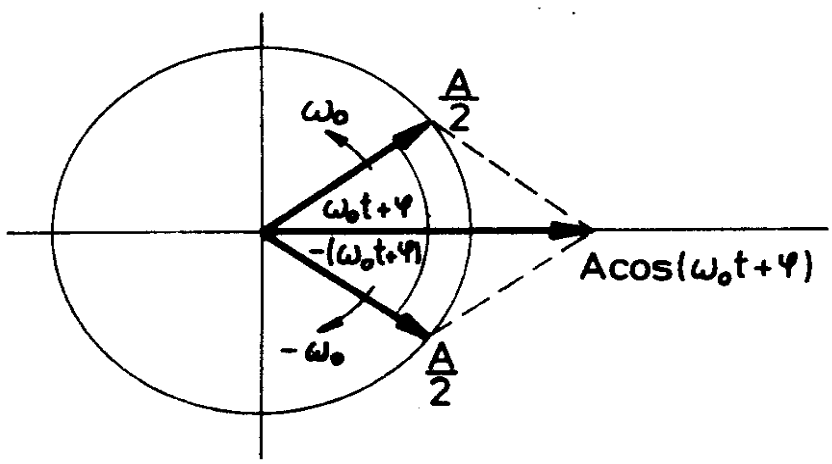
$$\varphi = -arctg \, \frac{b_n}{a_n} \quad \Rightarrow -arctg \frac{-2 \, Im(c_{n)}}{2 \, Re \, (c_{n)}} = arg \, c_n$$

Ovšem častější zobrazení komplexních FŘ je jako dvoustranné spektrum, pro kladná a záporná n (kterým odpovídají kladné a záporné frekvence). Koeficienty c_na c_{-n} jsou komplexně sdružené a výrazy $c_n e^{jn\omega_0 t}$ a $c_{-n}e^{-jn\omega_0 t}$ dosazení za n= …-1,0,1,2… odpovídá dvěma rotujícím vektorům a jejich součet dává n-tou harmonickou složku.

$$c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n}e^{jn\omega_0 t} = |c_n|e^{j\varphi}e^{jn\omega_0 t} + |c_n|e^{-j\varphi}e^{-jn\omega_0 t} =$$

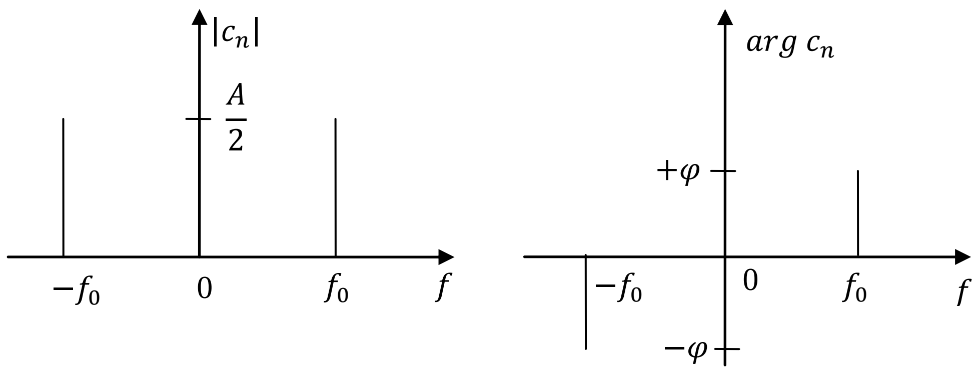
$$|c_n| \; (e^{j\varphi}e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) =$$

$$= 2|c_n| \left(\frac{e^{j(n\omega_0 t+\varphi)} + e^{-j(n\omega_0 t+\varphi)}}{2} \right) = 2|c_n| \cos(n\omega_0 t + \varphi) = A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi)$$



1-8 Dva komplexně sdružené rotující vektory (převzato z [2])

Pro dvoustranné amplitudové spektrum se vynášejí hodnoty $|c_n|$ a pro fázové spektrum hodnoty $arg\ c_n$. Dvoustranné amplitudové spektrum je sudé, fázové liché.

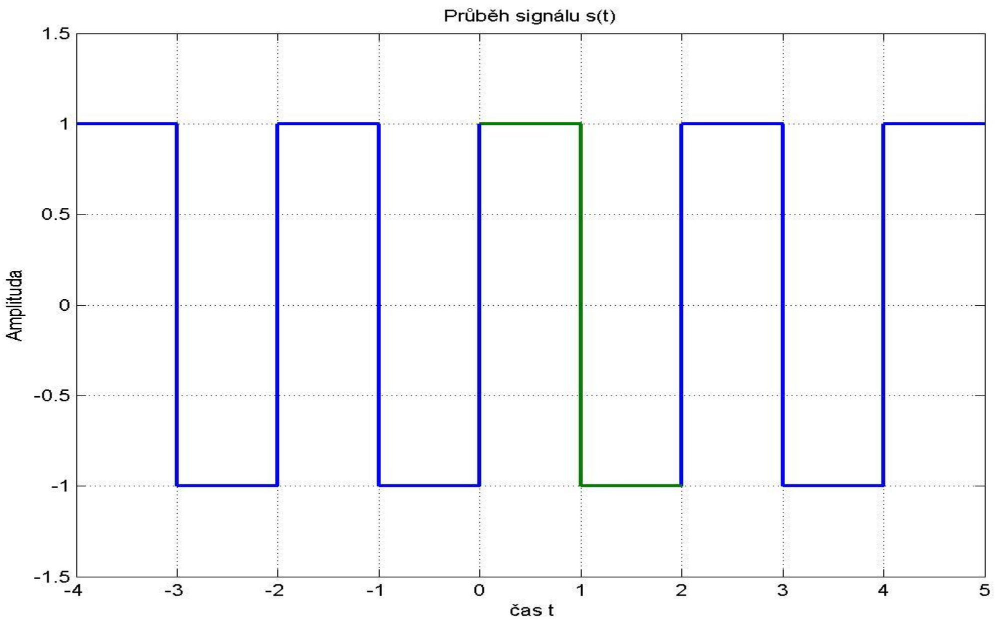


1-9 Dvoustranné amplitudové a fázové spektrum

Přiklad komplexní Fourierovy řady:

Nechť je zadán periodický signál, který je na základním intervalu periodicity $T = \langle 0,2 \rangle$ definován tak, že $s(t) = \begin{cases} 1 & pro\ t \in \langle 0,1) \\ -1 & pro\ t \in (1,2\rangle \end{cases}$

Vypočtěte koeficienty komplexní Fourierovy řady a napište rozvoj v komplexní Fourierovu řadu na intervalu $\langle 0,2 \rangle$.



1-10 Zadaní příkladu pro komplexní FŘ

Výpočet koeficientů C_0 a C_n:

Určení základního kmitočtu: $T = 2 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$C_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^2 s(t)dt = \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 1\,dt + \int_1^2 -1\,dt\right\} = \frac{1}{2}\{[x]_0^1 - [x]_1^2\} = \frac{1}{2}(1 - 2 + 1) = 0$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_0^2 s(t).e^{-jn\omega t}dt = \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 e^{-jn\omega t}dt + \int_1^2 -e^{-jn\omega t}dt\,\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{jn\omega}\left[e^{-jn\omega t}\right]_0^1 + \frac{1}{jn\omega}\left[e^{-jn\omega t}\right]_1^2\right\} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{jn\omega}\left[e^{-jn\omega} - 1\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{jn\omega}\left[e^{-2jn\omega} - e^{-jn\omega}\right] = \frac{1}{2}\right\{-\frac{1}{jn\omega}[\cos(-n\omega) + j\sin(-n\omega) - 1] +$$

$$+\frac{1}{jn\omega}(\,[\cos(-2n\omega) + j\sin(-2n\omega)] - [\cos(-n\omega) + j\sin(-n\omega)]\,)\} =$$

pro $\omega = \pi$ a úprava výrazů dle sudosti a lichosti.

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{jn\pi}[\cos(n\pi) - j\sin(n\pi) - 1] + \right.$$

$$+\frac{1}{jn\pi}(\,[\cos(2n\pi) - j\sin(2n\pi)] - [\cos(n\pi) - j\sin(n\pi)]\,)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{jn\pi}[(-1)^n - 1] + \frac{1}{jn\pi}[1-(-1)^n]\right\} =$$

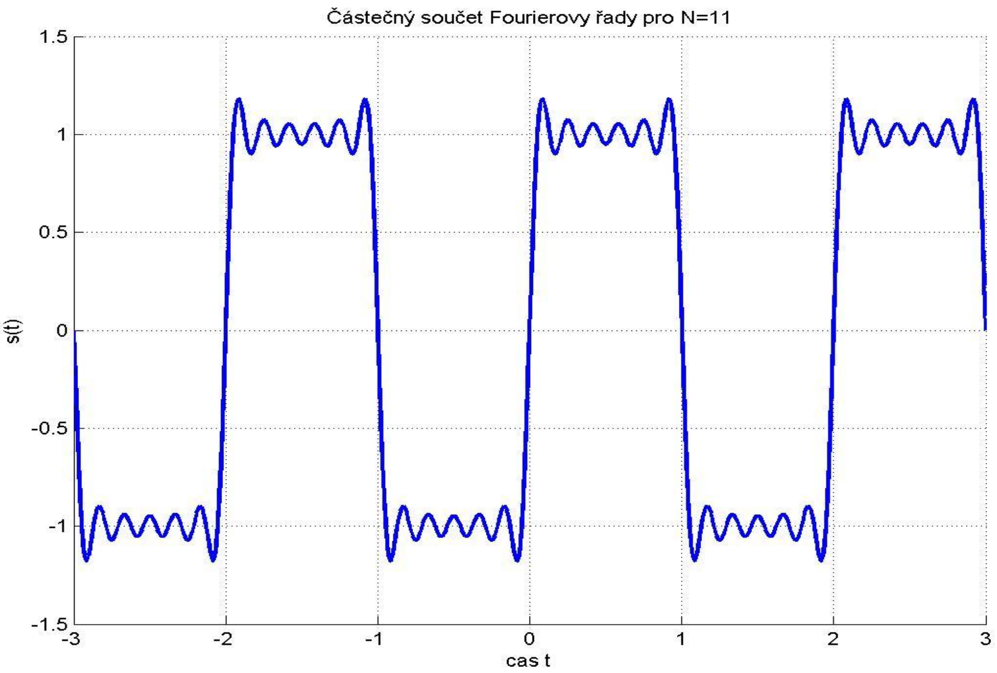
$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{jn\pi}[-(-1)^n + 1 + 1 - (-1)^n] = \frac{1}{2jn\pi}[-2(-1)^n + 2] =$$

$$pro \begin{cases} liché\ n: & \dfrac{2}{jn\pi} \\ sudé\ n: & 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{j(2n-1)\pi}$$

Hledaný rozvoj periodické funkce f v komplexní Fourierovu řadu na $\langle 0{,}2\rangle$:

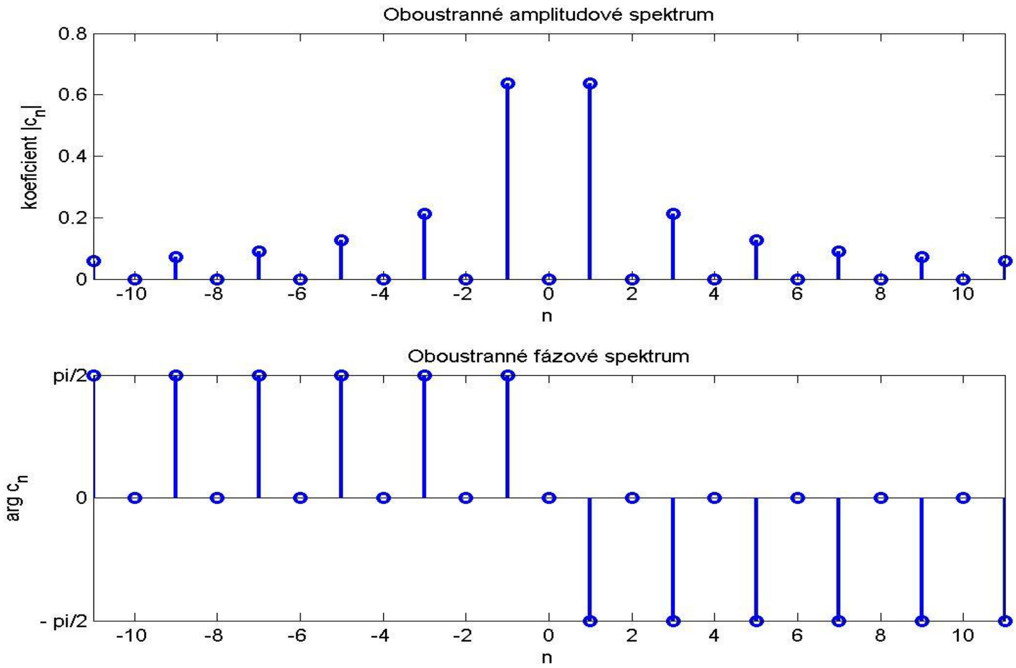
$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{j(2n-1)\pi} \quad e^{-j(2n-1)\pi t}$$

Graf zobrazuje Fourierovu řadu na intervalu $\langle -3, 3\rangle$ i když jsme hledali rozvoj pro FŘ na intervalu $\langle 0{,}2\rangle$, je vidět že FŘ konverguje k periodické funkci f v celém svém definičním oboru.



1-11 Částečný součet komplexní FŘ

Graf amplitudového a fázového spektra komplexní FŘ pro n=11.



1-12 Oboustranné amplitudové a fázové spektrum

1.8 Amplitudový tvar FŘ

Periodický signál můžeme složit z kosinů (sinů) různých frekvencí, amplitud a fáze

$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\,(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

Pro:

$$\varphi_k = -arctg\frac{b}{a}, \quad A_k = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad A_0 = \frac{a_0}{2}$$

Trigonometrickou Fourierovu řadu můžeme přepsat pomocí vzorce:

$$\boldsymbol{a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos\,(\omega t + \varphi).}$$

A dostaneme Fourierovu řadu amplitudového tvaru.

Důkaz rovnosti vzorce:

$s(t) = \mathrm{A}\cos(\omega \mathrm{t} + \varphi) = \mathrm{Re}[A\, e^{j(\omega t + \varphi)}] = Re[A\, e^{j\omega t}\, e^{\varphi}] =$

$= Re\{A\ [(\cos\omega t + j\sin\omega t)(\cos\varphi + j\sin\varphi)]\} =$

$= \mathrm{Re}\{[\mathrm{A}\cos\omega t\cos\varphi - A\ \sin\omega t\sin\varphi + j\ (A\ \cos\omega t\sin\varphi + A\ \sin\omega t + \cos\varphi)]\} =$

$= A\cos\omega t\ \cos\varphi - \mathrm{A}\sin\omega t\sin\varphi\ =$ $\quad pro \begin{cases} a = A\cos\varphi \\ b = -A\sin\varphi \end{cases}$

$= a\cos\omega t\ + \mathrm{b}\sin\omega t$

Fázově posunutý harmonický signál je složen ze sinusového a kosinusového signálu. Jejichž amplitudy jsou: $a = A\cos\varphi,\ b = -A\sin\varphi$

Určení amplitudy:

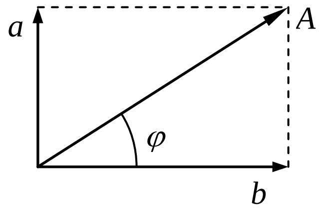
$$a^2 + b^2 = A^2 cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = A^2(cos^2\varphi + sin^2\varphi) = A^2$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Určení fázového posuvu:

$$-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \ -\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{a}$$

$$\varphi = -\,arctg\ \frac{b}{a}\begin{cases} +0 & pro\ a \geq 0 \\ +\pi & pro\ a < 0 \end{cases}$$



Přičtení $+\pi$ je úprava pro II. a III. kvadrant.

2 Sbírka příkladů

Poznámky k výpočtům uvedeným ve sbírce.

Všechny příklady uvedené ve sbírce splňují podmínky konvergence.

Rozvoj funkce f na intervalu $\langle -l, l\rangle$, kde $l > 0$. Interval délky: $2l$ a půlperioda: l.

Potom Fourierova řada má tvar:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

A pro koeficienty platí:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx\,, a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\,, \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Zápis sudých čísel: $2n\ pro\ n \epsilon \mathbb{N}$.

Zápis lichých čísel: $2n - 1\ pro\ n \epsilon \mathbb{N}$.

Funkce $\cos(nx)$ je sudou funkcí na každém symetrickém intervalu (např. interval $\langle -\pi, \pi\rangle$).

Funkce $\sin(nx)$ je lichou funkcí na každém symetrickém intervalu (např. interval $\langle -\pi, \pi\rangle$)

Nechť máme sudou funkci $f(x)$, která je definována na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Výsledná funkce součin funkce $f(x)\cos(nx)$ je funkce sudá a $f(x)\sin(nx)$ je lichá.

Nechť máme lichou funkci $f(x)$, která je definována na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Výsledná funkce součin funkce $f(x)\cos(nx)$ je funkce lichá a $f(x)\sin(nx)$ je sudá.

Dosazování za hodnoty $\sin n\pi = 0, \cos n\pi = (-1)^n$.

Při výpočtech využívána metoda integrace per partes

$$(u * v)' = u' * v + u * v'$$

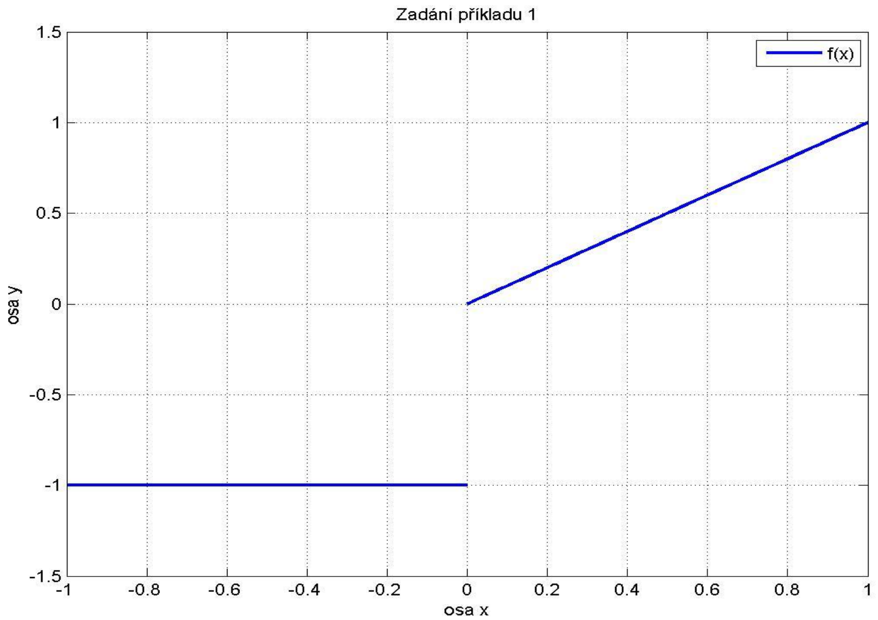
$$\int (u * v)' dx = \int u' * v\, dx \int u * v'\, dx$$

$$u * v = \int u' * v\, dx \int u * v'\, dx$$

$$\int \boldsymbol{u * v'\, dx} = \boldsymbol{u * v} - \int \boldsymbol{u' * v\, dx}$$

2.1 Příklad 1

Nechť je dána periodická funkce f, která je na základním intervalu periodicity $< -1{,}1 >$ definována vztahem $f(x) = \begin{cases} -1\,, x \in < -1{,}0 > \\ x\,, \in < 0{,}1 > \end{cases}$. Najděte předpis pro Fourierovu řadu funkce f na intervalu $< -1{,}1 >$.



2-1 Zadání př.1

Řešení:

Funkce $f(x)$ je na $\langle -1, 1\rangle$ po částech spojitá s jedním bodem nespojitosti prvního druhu $x = 0$. Fourierova řada funkce $f(x)$ konverguje na $\langle -1, 1\rangle$ k $f(x)$ až na výjimku bodu nespojitosti a krajních bodů intervalu.

V bodu nespojitosti konverguje FŘ k hodnotě

$\frac{1}{2}\{lim_{x\to 0-} f(x) + lim_{x\to 0+} f(x)\} = \frac{1}{2}(-1+0) = \frac{1}{2}$

a v krajních bodech intervalu $x = -1$ a x=1 konverguje k hodnotě

$\frac{1}{2}\{lim_{x\to 1+} f(x) + lim_{x\to 1-} f(x)\} = \frac{1}{2}(-1+1) = 0$.

Výpočet koeficientů:

Hledáme rozvoj na intervalu $\langle -l, l\rangle = \langle -1, 1\rangle, 2l = 2\,; l = 1$

Protože je daná funkce definována v $\langle -1, 1\rangle$, ale na intervalu $\langle -1, 0\rangle$ a $\langle 0, 1\rangle$ je definována jiným předpisem, využijeme při výpočtu aktivity integrálů.

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)=\int_{-1}^{0}-1\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx=[-x]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx=\int_{-1}^{0}-1\cos(n\pi x)dx+\int_{0}^{1}x.\cos(n\pi x)\,dx=$$

$$\left|\begin{matrix} u=x & u'=1 \\ v'=\cos(n\pi x) & v=\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\end{matrix}\right|=\left[-\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_0^1-$$

$$+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\sin(n\pi x)\,dx=0+0+\frac{1}{\pi^2n^2}[\cos(n\pi x)]_0^1=$$

$$=\frac{1}{\pi^2n^2}[\cos n\pi-\cos 0]=\frac{1}{\pi^2n^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases} pro\ sude\ n{:}\ 0 \\ pro\ liche\ n{:}\frac{-2}{\pi^2n^2}\Rightarrow-\frac{2}{\pi^2(2n-1)^2}\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin(n\pi x)\,dx=\int_{-1}^{0}-1\sin(n\pi x)dx+\int_0^1 x.\sin(n\pi x)\,dx=$$

$$\left|\begin{matrix} u=x & u'=1 \\ v'=\sin(n\pi x) & v=-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\end{matrix}\right|=\left[\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^1+$$

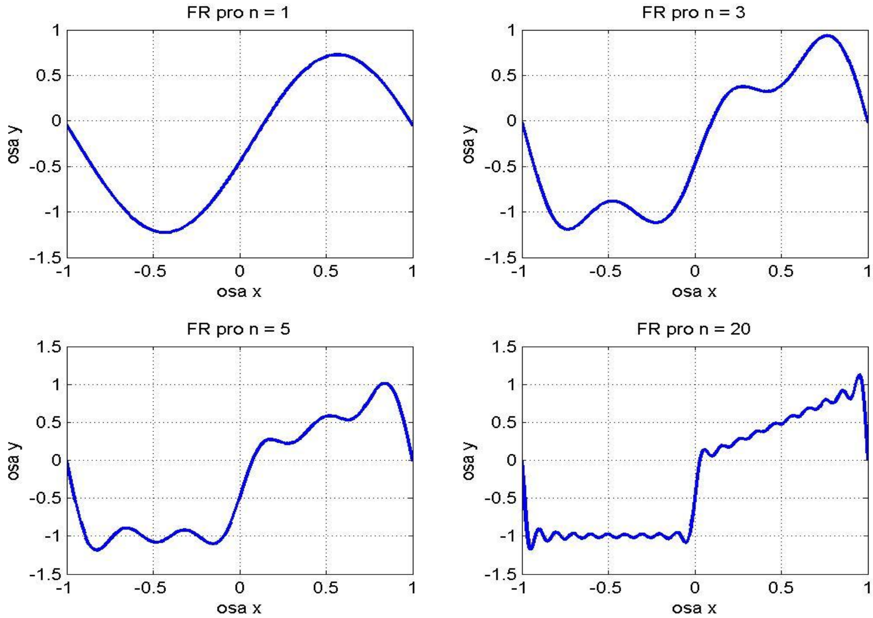
$$+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\cos(n\pi x)\,dx=\frac{1}{n\pi}[\cos 0-\cos(-n\pi)]-\frac{1}{n\pi}[\cos n\pi-0]+0=$$

$$=\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n-(-1)^n]=\frac{1}{n\pi}[1-2(-1)^n]=\begin{cases} pro\ sude\ n{:}\frac{3}{n\pi}\Rightarrow\frac{3}{2n\pi} \\ pro\ liche\ n{:}\frac{1}{n\pi}\Rightarrow\frac{1}{(2n-1)\pi}\end{cases}$$

Hledaný rozvoj ve Fourierovu řada je:

$$f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{\pi^2(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x+\frac{1}{n\pi}[1-2(-1)^n]\sin n\pi x$$

Částečný součet Fourierovy řady pro různé n na intervalu $\langle -1,1 \rangle$.



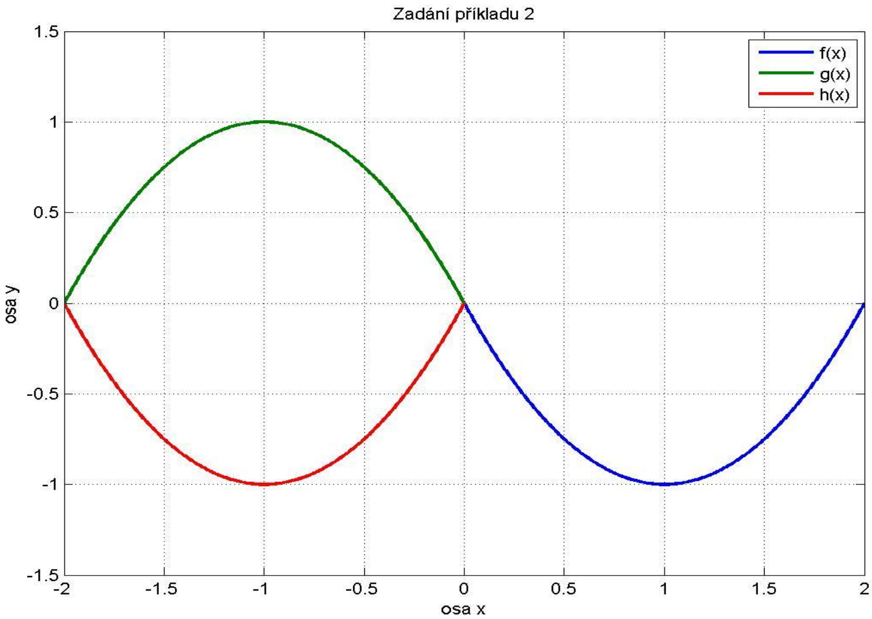
2-2 Př.1 Částečný součet FŘ

2.2 Příklad 2

Nechť je dána funkce $f(x) = x^2 - 2x$, která je definovaná na intervalu $\langle 0,2 \rangle$. Pro následující funkci (tj. její příslušné periodické prodloužení) určete předpis pro její:

a) Fourierovu řadu v $\langle 0,2 \rangle$.
b) sinovou Fourierovu řadu v $\langle 0,2 \rangle$.
c) kosinovou Fourierovu řadu $\langle 0,2 \rangle$.

Graf funkce f na intervalu $< 0{,}2 >$, graf sudého a lichého rozšíření na intervalu $< 0 - 2{,}0 >$.



2-3 Zadání př.2

Řešení:

a) Rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu.

Funkci f periodicky prodloužíme s intervalem periodicity $\langle 0{,}2\rangle$.

Funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ spojitá. Fourierova řada funkce $f(x)$ konverguje na $\langle 0, 2\rangle$ k hodnotám funkce $f(x)$.

Výpočet koeficientů:

Perioda pokračování $2l = 2 \quad \Rightarrow \quad l = 1$.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{1}\int_0^2 x^2 - 2x\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left[\frac{8}{3} + 4\right] = -\frac{4}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \int_0^2 (x^2 - 2x)\ \cos(n\pi x)\ dx =$$

$$\left| \begin{matrix} u = x^2 - 2x & u' = 2x - 2 \\ v' = \cos(n\pi x) & v = \dfrac{1}{n\pi}\sin(n\pi x) \end{matrix} \right| = \left[\frac{(x^2 - 2x)}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_0^2 -$$

$$+\frac{2}{n\pi}\int_0^2 (x - 1)\sin(n\pi x)\, dx = \left| \begin{matrix} u = x - 1 & u' = 1 \\ v' = \sin(n\pi x) & v = -\dfrac{1}{n\pi}\cos(n\pi x) \end{matrix} \right| =$$

$$= 0 - \frac{2}{n\pi}\left\{\left[-\frac{(x-1)}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^2 + \frac{1}{n\pi}\int_0^2 \cos(n\pi x)dx\right\} =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left\{[(x-1)\ \cos(n\pi x)]_0^2 + \frac{1}{n^2\pi^2}[\sin(n\pi x)]_0^2\right\} =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}[(x-1)\cos(n\pi x)]_0^2 + 0 = \frac{2}{n^2\pi^2}[1 . \cos 2n\pi - (-1.1)] =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(1+1) = \frac{4}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-+l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \int_0^2 (x^2-2x)\ \sin(n\pi x)\ dx =$$

$$\left|\begin{matrix} u = x^2 - 2x & u' = 2x - 2 \\ v' = \sin(n\pi x) & v = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\end{matrix}\right| = \left[-\frac{(x^2-2x)}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^2 +$$

$$+\frac{2}{n\pi}\int_0^2 (x-1)\cos(n\pi x)\,dx = \left|\begin{matrix} u = x - 1 & u' = 1 \\ v' = \sin(n\pi x) & v = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\end{matrix}\right| =$$

$$= \left[-\frac{(x^2-2x)}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^2 + \frac{2}{n\pi}\left\{\left[\frac{(x-1)}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^2 - \frac{1}{n\pi}\int_0^2 \sin(n\pi x)dx\right\} =$$

$$= \left[-\frac{(x^2-2x)}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^2 + 0 + \frac{2}{n^3\pi^3}[\cos(n\pi x)]_0^2 =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}[(4-4)\cos(2n\pi) - (0)\cos(2n\pi)] + 0 + \frac{2}{n^3\pi^3}[\cos(2n\pi) - (\cos 0)] =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}[(0.1) - 0] + 0 + \frac{2}{n^3\pi^3}[1-1] = 0$$

Hledaný rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu je:

$$f(x) = -\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)$$

b) Rozvoj funkce f v sinovou Fourierovu řadu.

Liché periodické prodloužení funkce f představuje dodefinovaní funkce $g(x) = -x^2 - 2x$ na intervalu $\langle -2,0\rangle$ a funkce f bude periodická na intervalu periodicity $\langle -2,2\rangle$.

Výpočet koeficientů:

Perioda pokračování $2l = 4 \quad \Rightarrow \; l = 2.$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0}(-x^2 - 2x)dx + \int_{0}^{2}(x^2 - 2x)dx\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[0 - \left(\frac{8}{3} - 4\right)\right] + \left[\frac{8}{3} - 4\right]\right\} = \frac{1}{2}\left[-\frac{8}{3} + 4 + \frac{8}{3} - 4\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x).\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0}(-x^2 - 2x).\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{2}(x^2 - 2x).\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right\} =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = -x^2 - 2x & u' = -2x - 2 \\ v' = cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) & v = \frac{2}{n\pi}sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix} u = x^2 - 2x & u' = 2x - 2 \\ v' = cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) & v = \frac{2}{n\pi}sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{-2(x^2 + 2x)}{n\pi}sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{-2}^{0} + \frac{4}{n\pi}\int_{-2}^{0}(x + 1)sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{2(x^2 - 2x)}{n\pi}sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{0}^{2} - \frac{4}{n\pi}\int_{0}^{2}(x - 1)sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right\} =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x + 1 & u' = 1 \\ v' = sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) & v = -\frac{2}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix} u = x - 1 & u' = 1 \\ v' = sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) & v = -\frac{2}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{0 + \frac{4}{n\pi}\left\{\left[-\frac{2(x + 1)}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{-2}^{0} + \frac{2}{n\pi}\int_{-2}^{0}cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right\} + 0\right.$$

$$\left. - \frac{4}{n\pi}\left\{\left[-\frac{2(x - 1)}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{0}^{2} + \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{2}cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right\}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{4}{n\pi}\left\{\left[-\frac{2(x + 1)}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{-2}^{0} + \frac{4}{n^2\pi^2}sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\right.$$

$$\left. - \frac{4}{n\pi}\left\{\left[-\frac{2(x - 1)}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{0}^{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left\{\frac{4}{n\pi}\left[-\frac{2(x+1)}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{-2}^{0}+0\right\}-\frac{4}{n\pi}\left\{\left[-\frac{2(x-1)}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{0}^{2}+0\right\}\right\} =$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(x+1)cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{-2}^{0}+\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(x-1)cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{0}^{2} =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}[-1-(-1^n)+(-1^n)+1] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x).\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}2\int_{0}^{2}(x^2-2x).\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx =$$

$$\left|\begin{matrix} u = x^2-2x & u' = 2x-2 \\ v' = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) & v = -\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2}) \end{matrix}\right| = \left[-\frac{2(x^2-2x)}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2 +$$

$$+\frac{4}{n\pi}\int_0^2 (x-1)\cos(\frac{n\pi x}{2})\,dx = \left|\begin{matrix} u = x-1 & u' = 1 \\ v' = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) & v = \frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2}) \end{matrix}\right| =$$

$$= \left[-\frac{2(x^2-2x)}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2 + \frac{4}{n\pi}\left\{\left[\frac{2(x-1)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right\} =$$

$$= \left[-\frac{2(x^2-2x)}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2 + \frac{4}{n\pi}\left\{0+\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2\right\} =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[(x^2-2x)\cos(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2 + \frac{16}{n^3\pi^3}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 =$$

$$= 0 + \frac{16}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1] \quad \begin{cases} pro\ sude\ n\colon\ 0 \\ pro\ liche\ n\colon\ -\frac{32}{n^3\pi^3} \Rightarrow -\frac{32}{(2n-1)^3\pi^3} \end{cases}$$

Hledaný rozvoj v sinovou Fourierova řada je:

$$f(x) = -\frac{32}{\pi^3}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

c) Rozvoj funkce f v kosinovou Fourierovu řadu.

Sudé periodické prodloužení, představuje dodefinovaní funkce $h(x) = x^2 + 2x$ na intervalu $\langle -2, 0\rangle$ a funkce f bude periodická na intervalu periodicity $\langle -2, 2\rangle$.

Výpočet koeficientů:

Perioda pokračování $2l = 4 \quad \Rightarrow l = 2$

$$a_0 = \frac{1}{2} 2 \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left[\frac{8}{3} - 4\right] = -\frac{4}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{2} 2 \int_0^2 (x^2 - 2x)\ \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\ dx =$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = x^2 - 2x & u' = 2x - 2 \\ v' = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) & v = \frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2}) \end{array} \right| = \left[\frac{2(x^2 - 2x)}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2 -$$

$$+\frac{4}{n\pi}\int_0^2 (x-1)\sin(\frac{n\pi x}{2})\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x - 1 & u' = 1 \\ v' = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) & v = -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi x) \end{array} \right| =$$

$$= 0 - \frac{4}{n\pi}\left\{\left[-\frac{2(x-1)}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx\right\} =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left\{\left[-\frac{2(x-1)}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2 + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\sin(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2\right\} =$$

$$= \frac{8}{n^2\pi^2}\left[(x-1)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 + 0 = \frac{8}{n^2\pi^2}[1\,.\cos n\pi - (-1.1)] =$$

$$= \frac{8}{n^2\pi^2}[(-1)^n + 1]\ \ pro \begin{cases} sude\ n\text{:}\ \frac{16}{n^2\pi^2} & \Rightarrow \frac{16}{(2n)^2\pi^2} = \quad \frac{4}{n^2\pi^2} \\ liche\ n\text{:}\quad 0 & \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^2 f(x).\sin\frac{n\pi x}{2} = = \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^0 (x^2 + 2x).\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_0^2 (x^2 - 2x).\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right\}$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 2x & u' = 2x + 2 \\ v' = sin\frac{n\pi x}{2} & v = -\frac{2}{n\pi}cos\frac{n\pi x}{2} \end{array} \right| \left| \begin{array}{ll} u = x^2 - 2x & u' = 2x - 2 \\ v' = sin\frac{n\pi x}{2} & v = -\frac{2}{n\pi}cos\frac{n\pi x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{2(x^2 + 2x)}{n\pi}cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^0 + \frac{4}{n\pi}\int_{-2}^0 (x+1)cos\frac{n\pi x}{2}dx +\right.$$

$$\left. + \left[-\frac{2(x^2 - 2x)}{n\pi}cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 + \frac{4}{n\pi}\int_0^2 (x-1)cos\frac{n\pi x}{2}dx\right\} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x + 1 & u' = 1 \\ v' = cos\frac{n\pi x}{2} & v = \frac{2}{n\pi}sin\frac{n\pi x}{2} \end{array} \right| \left| \begin{array}{ll} u = x - 1 & u' = 1 \\ v' = cos\frac{n\pi x}{2} & v = \frac{2}{n\pi}\ sin\frac{n\pi x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{2(x^2+2x)}{n\pi}cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{0} + \frac{4}{n\pi}\left\{\left[\frac{2(x+1)}{n\pi}sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{0} - \frac{2}{n\pi}\int_{-2}^{0} sin\frac{n\pi x}{2}\right\} + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{2(x^2-2x)}{n\pi}cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{0}^{2} + \frac{4}{n\pi}\left\{\left[\frac{2(x-1)}{n\pi}cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{0}^{2} - \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{2} sin\frac{n\pi x}{2}\right\}\right\} =$$

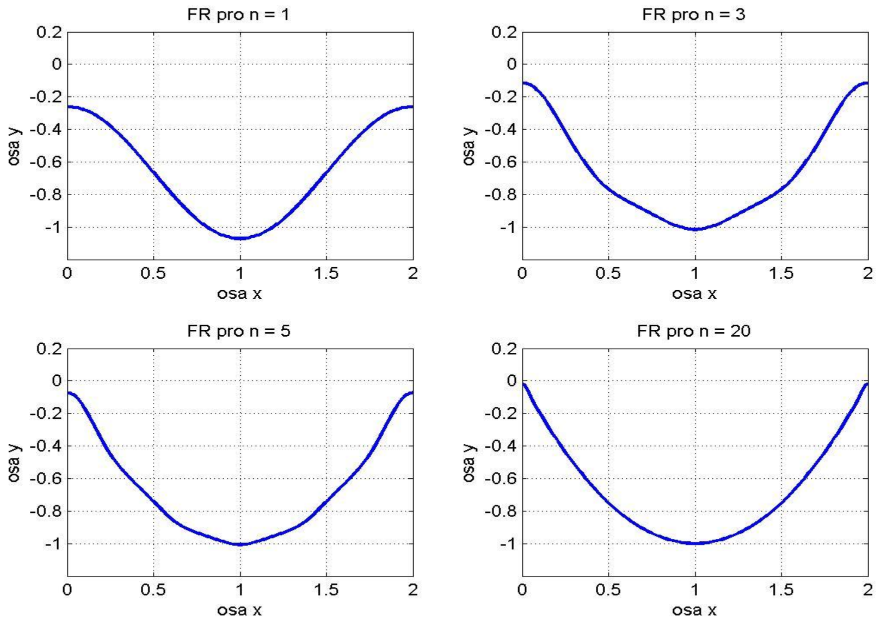
$$= \frac{8}{n^3\pi^3}\left\{0 + 0 + \left[cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{-2}^{0} + \left[cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{0}^{2}\right\} =$$

$$= \frac{8}{n^3\pi^3}[1 - (-1^n) + (-1^n) - 1] = 0$$

Hledaný rozvoj funkce f v kosinovou Fourierovu řadu je:

$$f(x) = -\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \cos\frac{n\pi x}{2}$$

Graf částečného součtu kosinové Fourierovy řady pro různá n na intervalu $\langle 0,2 \rangle$.



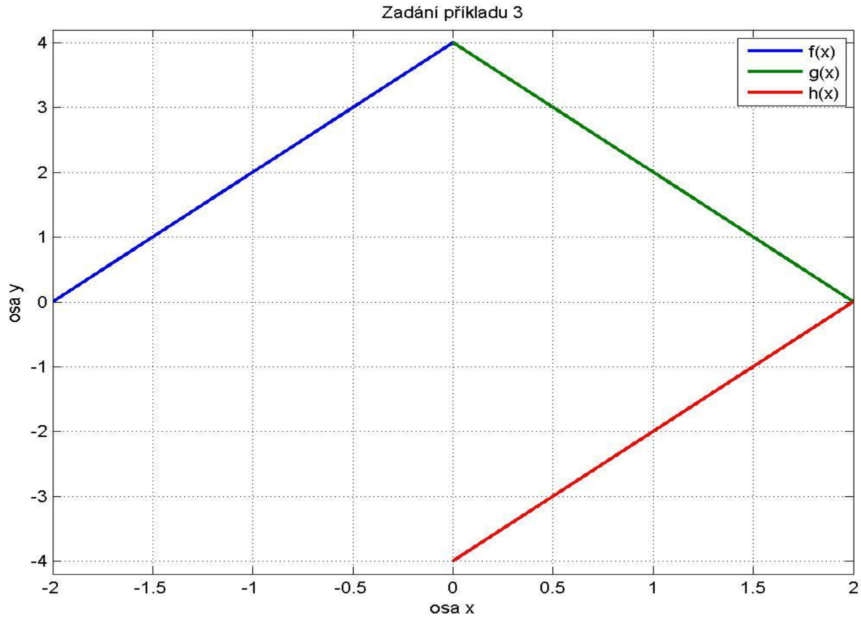
2-4 Př.2 Částečný součet kosinové FŘ

2.3 Příklad 3

Nechť je dána funkce $f(x) = 2x + 4$, která je definovaná na intervalu $\langle -2,0 \rangle$. Pro následující funkci (tj. její příslušné periodické prodloužení) určete předpis pro:

a) Fourierovu řadu $\langle -2, 0\rangle$.
b) sinovou Fourierovu řadu v $\langle -2, 0\rangle$.
c) kosinovou Fourierovu řadu v $\langle -2, 0\rangle$.

Graf funkce f na intervalu$\langle -2, 0\rangle$, graf sudého a lichého rozšíření na intervalu $\langle 0, -2\rangle$.



2-5 Zadání př.3

Řešení:

a) Rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu.

Funkci f periodicky prodloužíme s intervalem periodicity $\langle -2, 0\rangle$.

Výpočet koeficientů:

$$2l = 2 \quad \Rightarrow \quad l = 1$$

$$a_0 = \int_{-2}^{0} (2x + 4) dx = [x^2 + 4x]_{-2}^{0} = [0 - (4 - 8)] = 4$$

$$a_n = \int_{-2}^{0} (2x - 4)\ \cos(n\pi x)\ dx =$$

$$\left| \begin{matrix} u = 2x - 4 & u' = 2 \\ v' = \cos(n\pi x) & v = \dfrac{1}{n\pi}\sin(n\pi x) \end{matrix} \right| = \left[\frac{(2x - 4)}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_{-2}^{0} +$$

$$-\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{2} \sin(n\pi x)\, dx = 0 + \frac{2}{n^2\pi^2}[\cos\ n\pi x]_{-2}^{0} = \frac{2}{n^2\pi^2}(1 - 1) = 0$$

$$b_n = \int_{-2}^{0} (2x-4)\ \sin(n\pi x)\ dx =$$

$$\left| \begin{array}{cc} u = 2x-4 & u' = 2 \\ v' = \sin(n\pi x) & v = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x) \end{array} \right| = \left[-\frac{(2x-4)}{n\pi} \cos(n\pi x) \right]_{-2}^{0} +$$

$$+\frac{2}{n\pi}\int_{-2}^{0} \cos(n\pi x)\, dx = -\frac{2}{n\pi}[(x-2)\ \cos(n\pi x)]_{-2}^{0} + \frac{2}{n^2\pi^2}[\ \sin(n\pi x)]_{-2}^{0} =$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi^2}(-2+4) = -\frac{4}{n^2\pi^2}$$

Hledaný rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu je:

$$f(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n^2\pi^2} \sin n\pi x$$

b) Napište rozvoj funkce f v sinovou Fourierovu řadu.

Liché periodické prodloužení, představuje dodefinovaná funkce $h(x) = 2x - 4$ na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ a funkce f bude periodická na intervalu periodicity$\langle -2, 2\rangle$.

Výpočet koeficientů:

$$2l = 4 \quad \Rightarrow l = 2$$

$$a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2} 2 \int_{0}^{2} (2x-4) . \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx =$$

$$\left| \begin{array}{cc} u = 2x-4 & u' = 2 \\ v' = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) & v = -\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2}) \end{array} \right| = \left[-\frac{4(x-2)}{n\pi} \cos(\frac{n\pi x}{2}) \right]_{0}^{2} +$$

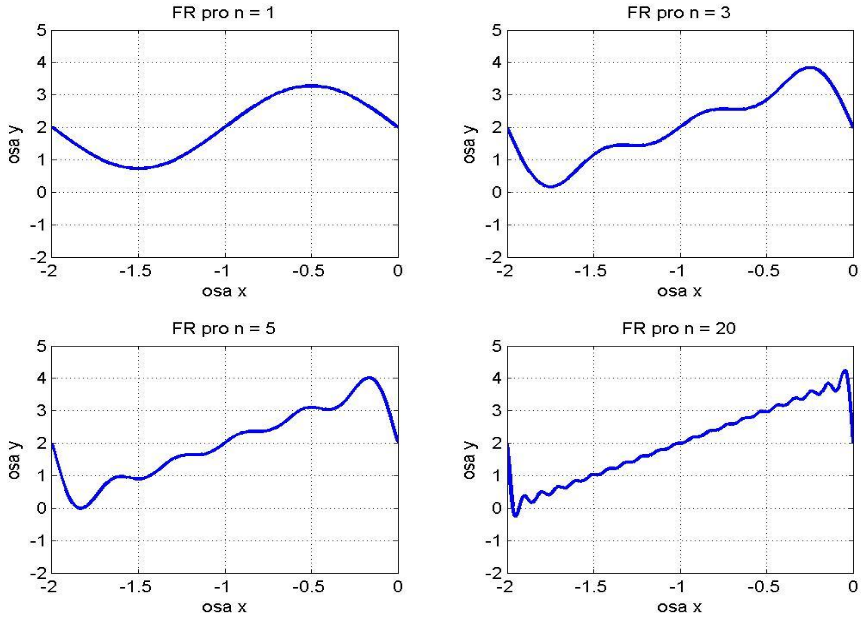
$$+\frac{4}{n\pi}\int_{0}^{2} \cos(\frac{n\pi x}{2})\, dx = -\frac{4}{n\pi}\left[(x-2)\cos(\frac{n\pi x}{2})\right]_{0}^{2} + \frac{8}{n^2\pi^2}\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{4}{n\pi}(0-(-2)\right) + 0 = -\frac{8}{n\pi}$$

Hledaný rozvoj funkce f v sinovou Fourierovu řadu je:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

Graf součtové sinové Fourierovy řady pro různá n na intervalu $\langle -2, 0\rangle$.



2-6 Př. 3 Částečný součet sinové FŘ

c) Rozvoj funkce f v kosinovou Fourierovu řadu.

Sudé periodické prodloužení, představuje dodefinovaní funkce $g(x) = -2x + 4$ na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ a funkce f bude periodická na intervalu periodicity $\langle -2, 2\rangle$.

Výpočet koeficientů:

$$2l = 4 \quad \Rightarrow l = 2$$

$$a_0 = \frac{1}{2} 2 \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left[\frac{8}{3} - 4\right] = -\frac{4}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{2} 2 \int_0^2 (-2x + 4) \ \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \ dx =$$

$$\left| \begin{matrix} u = -2x + 4 & u' = -2 \\ v' = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) & v = \frac{2}{n\pi} \sin(\frac{n\pi x}{2}) \end{matrix} \right| = \left[-\frac{4(x^2 - 2x)}{n\pi} \sin(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2 +$$

$$+ \frac{4}{n\pi} \int_0^2 \sin(\frac{n\pi x}{2}) \ dx = 0 - \frac{8}{n^2\pi^2} \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 =$$

$$= \frac{8}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1] \ \ pro \begin{cases} liche\ n: \frac{16}{n^2\pi^2} \\ sude\ n: \ \ 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{16}{(2n-1)^2\pi^2}$$

$$b_n = 0$$

Hledaný rozvoj funkce f v kosinovou Fourierovu řadu je:

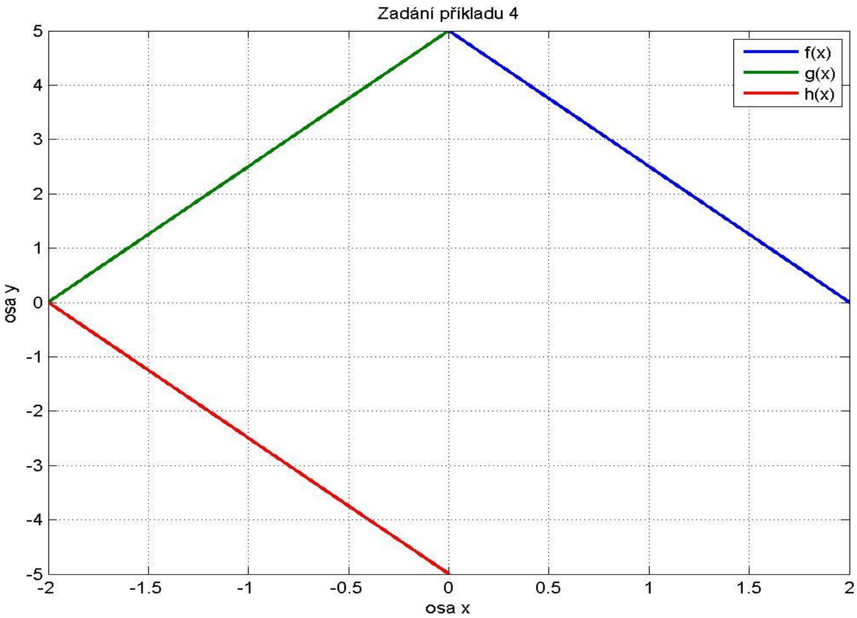
$$f(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{(2n-1)^2\pi^2} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

2.4 Příklad 4

Nechť je dána funkce $f(x) = 5 - \frac{5}{2}x$, která je definovaná na intervalu $\langle 0,2\rangle$. Pro následující funkci (tj. její příslušné periodické prodloužení) určete předpis pro její:

a) sinovou Fourierovu řadu v $\langle 0,2\rangle$.
b) kosinovou Fourierovu řadu v $\langle 0,2\rangle$.

Graf funkce f na intervalu $\langle 0,2\rangle$, graf sudého a lichého rozšíření na intervalu $\langle -2, 0\rangle$.



2-7 Zadání př.4

Řešení:

a) Sestavte sinovou Fourierovu řadu na intervalu $\langle 0,2\rangle$

Liché periodické prodloužení, představuje dodefinovaní funkce $h(x) = -5 - \frac{5}{2}x$ na intervalu $\langle -2, 0\rangle$ a funkce f bude periodická na intervalu periodicity $\langle -2, 2\rangle$.

Výpočet koeficientů:

$$2l = 4 \quad \Rightarrow l = 2$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2} 2 \int_0^2 \left(5 - \frac{5}{2}x\right) . \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx =$$

$$\left| \begin{matrix} u = 5 - \frac{5}{2}x & u' = -\frac{5}{2} \\ v' = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) & v = -\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2}) \end{matrix} \right| = \left[\frac{-10 + 5x}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2 +$$

$$-\frac{5}{n\pi}\int_0^2 \cos(\frac{n\pi x}{2})\, dx = -\frac{5}{n\pi}\left[(2 - x)\cos\,(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2 - \frac{25}{n^2\pi^2}\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 =$$

$$= \left(-\frac{5}{n\pi}(0 - 2\right) + 0 = -\frac{10}{n\pi}$$

Hledaný rozvoj funkce f v sinovou Fourierovu řadu je:

$$f(x) = -\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\, \sin\frac{n\pi x}{2}$$

b) Sestavte kosinovou Fourierovu řadu na intervalu $\langle 0, 2\rangle$.

Sudé periodické prodloužení, představuje dodefinovaní funkce $g(x) = 5 + \frac{5}{2}x$ na intervalu $\langle -2, 0\rangle$, se základním intervalem periodicity $\langle -2, 2\rangle$.

Výpočet koeficientů:

Určení periody: $2l = 4 \quad \Rightarrow l = 2$

$$a_0 = \frac{1}{2} 2 \int_0^2 \left(5 - \frac{5}{2}x\right) dx = \left[5x - \frac{5}{4}x^2\right]_0^2 = [10 - 5] = 5$$

$$a_n = \frac{1}{2} 2 \int_0^2 (5 - \frac{5}{2}x)\ \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\ dx =$$

$$\left| \begin{matrix} u = 5 - \frac{5}{2}x & u' = -\frac{5}{2} \\ v' = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) & v = \frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2}) \end{matrix} \right| = \left[\frac{10 - 5x}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2 +$$

$$+\frac{5}{n\pi}\int_0^2 \sin(\frac{n\pi x}{2})\, dx = 0 - \frac{10}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 =$$

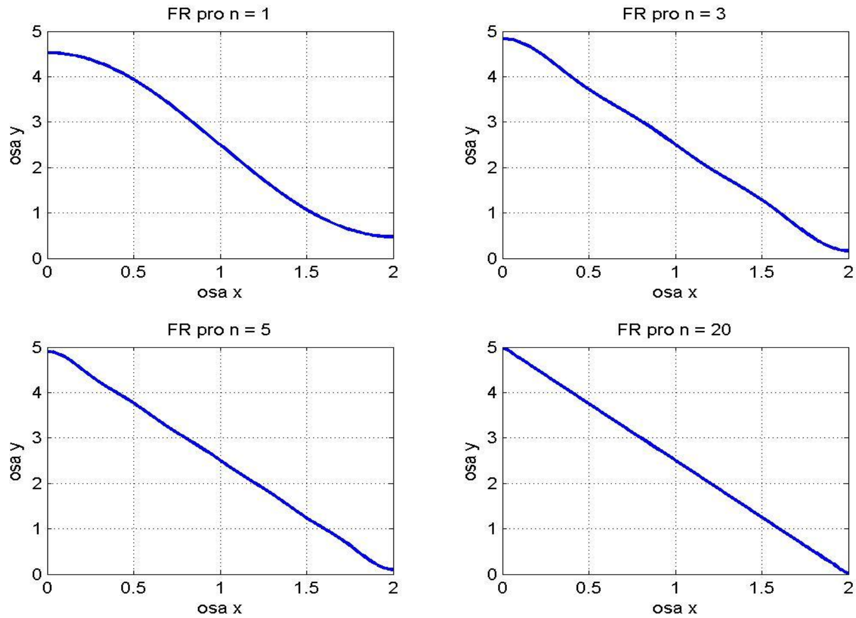
$$= \frac{10}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1] \quad pro \begin{cases} liche\ n: \ \frac{20}{n^2\pi^2} \\ sude\ n: \ \ 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{20}{(2n-1)^2\pi^2}$$

$$b_n = 0$$

Hledaný rozvoj funkce f v kosinovou Fourierovu řadu je:

$$f(x) = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{(2n-1)^2\pi^2} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

Graf součtové kosinové Fourierovy řady pro různá n na intervalu ⟨0,2⟩.

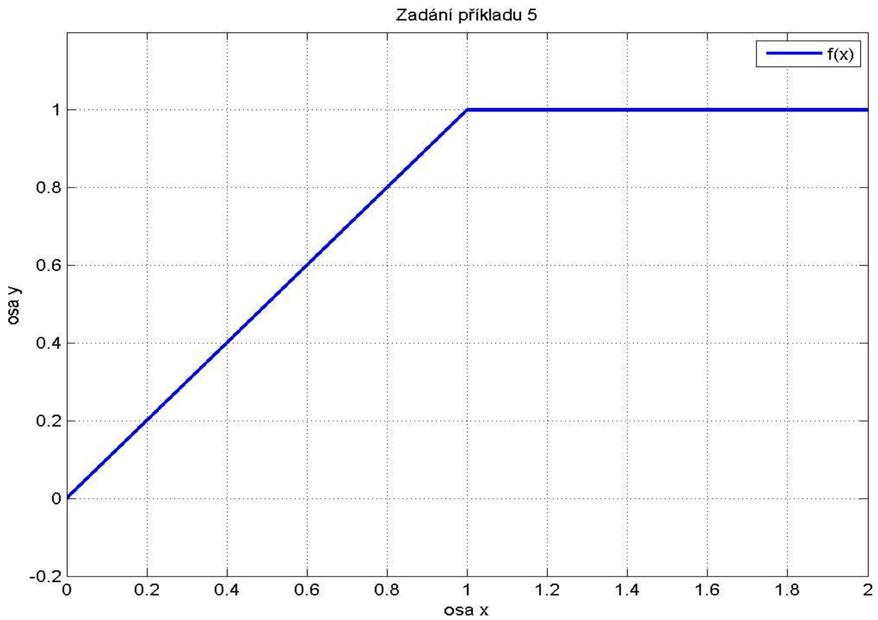


2-8 Př. 4 Částečný součet kosinové FŘ

2.5 Příklad 5

Nechť je dána periodická funkce f, která je na základním intervalu periodicity ⟨0,2⟩ je dána vztahem $f(x) = \begin{cases} x \ \epsilon \ \langle 0, 1\rangle \\ 1 \ \epsilon \ \langle 1, 2\rangle \end{cases}$. Najděte předpis pro Fourierovu řadu funkce f na intervalu ⟨0,2⟩.

Graf zadané funkce f na intervalu$\langle 0,2 \rangle$.



2-9 Zadání př. 5

Řešení:

Výpočet koeficientů:

$$2l = 2 \Rightarrow l = 1$$

$$a_0 = \int_0^1 x\,dx\; + \int_1^2 1\,dx = [x^2]_0^1 + [x]_1^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \int_0^1 x\,.\cos(n\pi x)\;\,dx + \int_1^2 1.\cos(n\pi x)\;\,dx =$$

$$\left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos(n\pi x) & v = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x) \end{matrix} \right| = \frac{1}{n\pi}\left\{ [x.\cos n\pi x]_0^1 - \int_0^1 \sin n\pi x\;dx + [\sin n\pi x]_1^2 \right\} =$$

$$= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}[\cos n\pi x]_0^1 + 0 = \frac{1}{n^2\pi^2}[(-1^n) - 1] =$$

$$pro \begin{cases} liche\; n{:}\; -\dfrac{2}{n^2\pi^2} \\ sude\; n{:}\;\; 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{2}{(2n-1)^2\pi^2}$$

$$b_n = \int_0^1 x.\sin(n\pi x)dx + \int_1^2 1.\sin(n\pi x)dx =$$

$$\left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin(n\pi x) & v = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x) \end{matrix} \right| = \left[-\frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^1 +$$

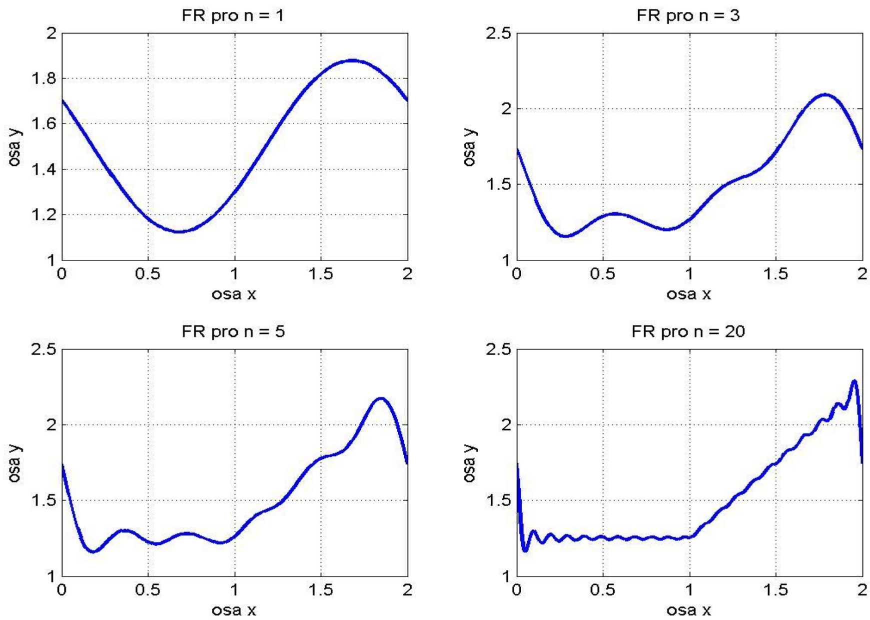
$$-\frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(\,n\pi x)dx - \frac{1}{n\pi}[\cos(n\pi x)]_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}[\cos(\,n\pi x)] + 0 - \frac{1}{n\pi}[1 - \cos(\,n\pi x)] = -\frac{1}{n\pi}$$

Hledaný rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu je:

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi^2}\ \cos(2n-1)\pi x - \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)$$

Graf částečných součtu Fourierovy řady pro různá n na intervalu $\langle 0{,}2\rangle$.

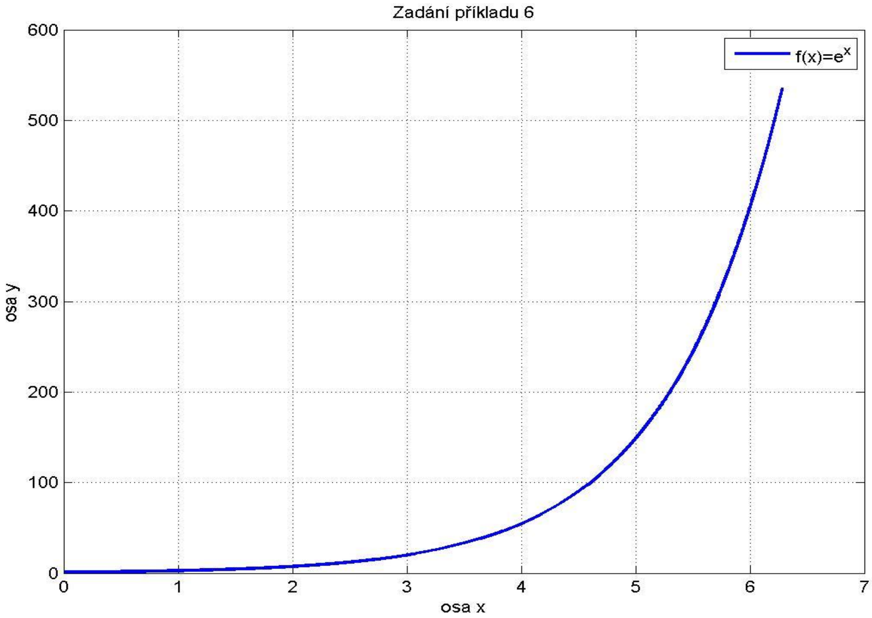


2-10 Př. 5 Částečný součet FŘ

2.6 Příklad 6

Nechť je dána periodická funkce f, která je na základním intervalu periodicity $\langle 0, 2\pi\rangle$ je dána vztahem $f(x) = e^x$. Rozviňte funkci $f(x)$ do Fourierovy řady na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Graf zadané funkce f na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.



2-11 Zadání př. 6

Řešení:

Výpočet koeficientů:

$$2l = 2\pi \Rightarrow l = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \, dx = \frac{1}{\pi}[e^x]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}[e^{2\pi} - e^0] = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cos nx \, dx = \begin{vmatrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos nx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{e^x}{n}\sin nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} e^x \sin nx \, dx\right\} = \begin{vmatrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin nx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{0 + \frac{1}{n^2}[e^x \cos nx]_0^{2\pi} - \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} e^x \cos nx \, dx\right\}$$

$$dosazení\ za\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cos nx \, dx \ \Rightarrow \ a_n\pi = \int_0^{2\pi} e^x \cos nx \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi}[e^x \cos nx]_0^{2\pi} - \frac{1}{n^2}\frac{\pi a_n}{\pi}$$

$$a_n + \frac{1}{n^2} a_n = \frac{1}{n^2\pi}[e^{2\pi} - 1]$$

$$a_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{[e^{2\pi} - 1]}{n^2\pi}$$

$$a_n = \frac{[e^{2\pi} - 1]}{n^2\pi} . \frac{n^2}{n^2 + 1} = \frac{[e^{2\pi} - 1]}{\pi(n^2 + 1)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \sin nx \, dx = \left| \begin{matrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin nx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{e^x}{n}\cos nx\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} e^x \cos nx \, dx\right\} = \left| \begin{matrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos nx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{e^x}{n}\cos nx\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\left\{\left[\frac{e^x}{n}\sin nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} e^x \sin nx \ dx\right\}\right\} =$$

$$dosazení \; za \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x . \sin nx \, dx \ \Rightarrow \ a_n\pi = \int_0^{2\pi} e^x \sin nx \, dx$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi n}[e^x \cos nx]_0^{2\pi} - \frac{1}{n^2}\frac{b_n\pi}{\pi}$$

$$b_n + \frac{1}{n^2} b_n = -\frac{1}{\pi n}[e^{\pi} - 1]$$

$$b_n \left(\frac{n^2 + 1}{n^2}\right) = -\frac{[e^{\pi} - 1]}{\pi n}$$

$$b_n = -\frac{[e^{\pi} - 1]}{\pi n}\frac{n^2}{n^2 + 1} = -\frac{n[e^{\pi} - 1]}{\pi(n^2 + 1)}$$

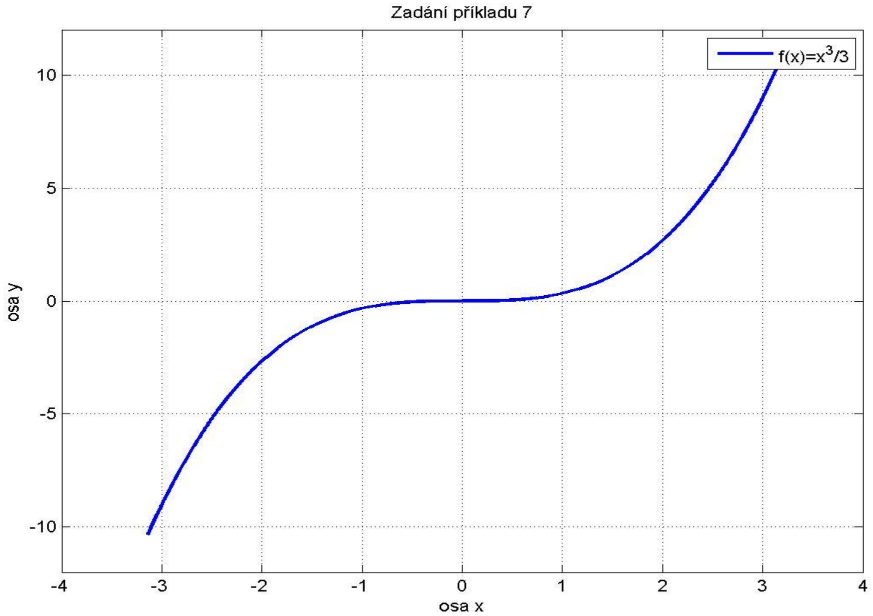
Hledaný rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu je:

$$f(x) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[e^{2\pi} - 1]}{\pi(n^2 - 1)}\cos nx - \frac{n[e^{\pi} - 1]}{\pi(n^2 + 1)}\sin nx$$

2.7 Příklad 7

Nechť je dána periodická funkce f, která je na základním intervalu periodicity $\langle -\pi, \pi \rangle$ dána vztahem $f(x) = \frac{x^3}{3}$. Rozviňte funkci $f(x)$ do Fourierovy řady na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Graf zadané funkce v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$



2-12 Zadání př. 7

Řešení:

Výpočet koeficientů:

$$2l = 2\pi \Rightarrow l = \pi$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3}{3} \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{x^3}{3} \sin nx \, dx = \begin{vmatrix} u = x^3 & u' = 3x^2 \\ v' = \sin nx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3\pi}\left\{\left[-\frac{x^3}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx\right\} = \begin{vmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos nx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3\pi}\left\{\left[-\frac{x^3}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{3}{n}\left\{\left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx\right\}\right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin nx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3\pi}\left\{\left[-\frac{x^3}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{3}{n}\left\{-\frac{2}{n}\left\{\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx \, dx\right\}\right\}\right\} =$$

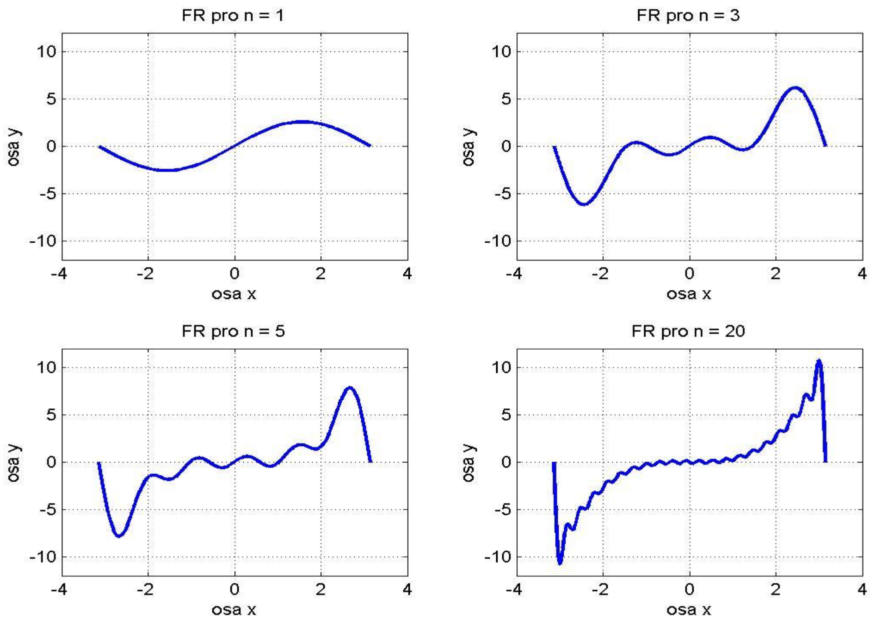
$$= -\frac{2}{3\pi n}[x^3 \cos nx]_0^\pi + \frac{12}{3\pi n^3}[x \cos nx]_0^\pi = -\frac{2}{3\pi n}[\pi^3 \cos n\pi] + \frac{12}{3\pi n^3}[\pi \cos n\pi] =$$

$$= -\frac{2\pi^2}{3n}(-1)^n + \frac{12}{3n^3}(-1)^n = (-1)^n . \left(\frac{12 - 2\pi^2 n^2}{3n^3}\right)$$

Hledaný rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu je:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \left(\frac{12 - 2\pi^2 n^2}{3n^3}\right) \sin \mathrm{nx}$$

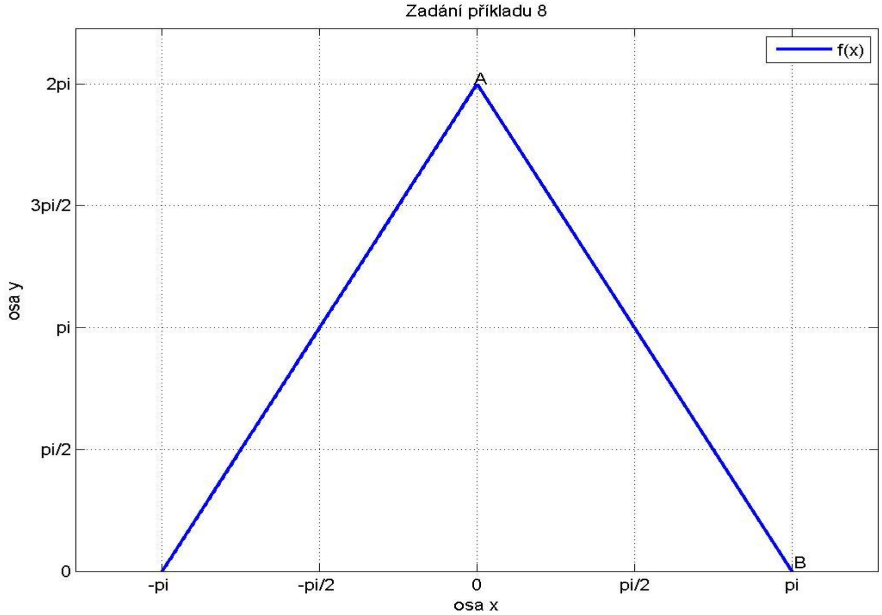
Graf částečných součtů Fourierovy řady pro různá n na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.



2-13 Př. 7 Částečný součet FŘ

2.8 Příklad 8

Nechť máme graficky zadanou periodickou funkci trojúhelníkového průběhu, viz. zadání příkladu 8. Sestavte obecnou rovnici graficky zadané funkce a rozviňte jí do Fourierovy řady na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.



2-14 Zadání př. 8

Řešení:

Sestavení rovnice:

Obecná rovnice přímky: $y = ax + c$

$$A = [0; 2\pi]\,, B = [\pi; 0]$$

Dvě rovnice o dvou neznámých:

$$\begin{matrix} 2\pi = a.0 + c \\ 0 = a.\pi + c \end{matrix} \Rightarrow a = -2\,, c = 2\pi$$

$$f(x) = \begin{matrix} -2x + 2\pi, x\epsilon < 0, \pi > \\ 2x + 2\pi, x\epsilon < -\pi, 0 > \end{matrix}$$

Výpočet koeficientů:

$$2l = 2\pi \Rightarrow l = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} 2 \int_0^\pi -2x + 2\pi \, dx = -\frac{2}{\pi}[x^2 - 2\pi x]_0^\pi = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} 2 \int_0^\pi (-2x + 2\pi) \cos nx \, dx = \left| \begin{matrix} u = x - \pi & u' = 1 \\ v' = \cos nx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2.(-2)}{\pi} \left\{ \left[\frac{x - \pi}{n} \sin nx \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx \, dx \right\} = -\frac{4}{\pi n^2} [\cos nx]_0^\pi =$$

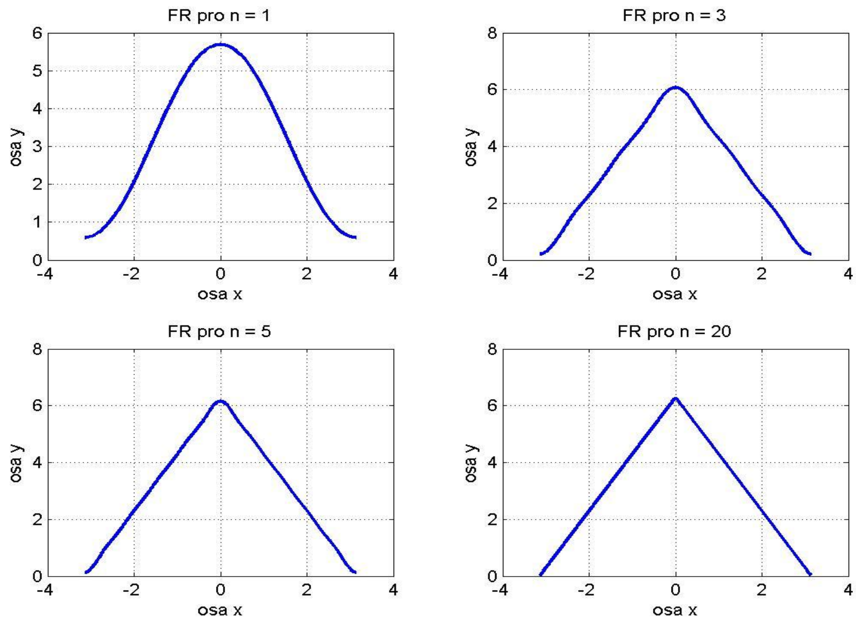
$$= -\frac{4}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] = pro \begin{cases} liche\ n: & \frac{8}{\pi n^2} \\ sude\ n: & 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{(2n-1)^2\pi}$$

$$b_n = 0$$

Hledaný rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu je:

$$f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2\pi} \cos(2n-1)x$$

Graf částečných součtů Fourierovy řady pro různá n na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

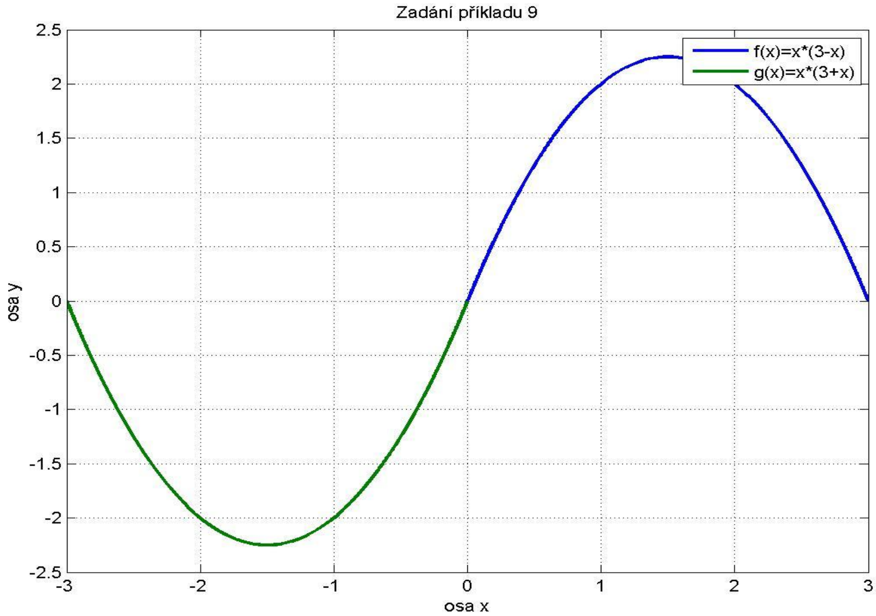


2-15 Př. 8 Částečný součet FŘ

2.9 Příklad 9

Nechť je dána funkce $f(x) = x.(3-x)$, která je definovaná na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$. Pro následující funkci (tj. její příslušné periodické prodloužení) určete předpis pro sinovou Fourierovu řadu funkce f na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$.

Graf funkce f na intervalu $\langle 0, 3\rangle$ a graf lichého rozšíření na intervalu $\langle -3, 0\rangle$.



2-16 Zadání př. 9

Řešení:

Výpočet koeficientů:

Liché periodické prodloužení, představuje dodefinovaní funkce $h(x) = x.(3 + x)$ na intervalu $\langle -3, 0\rangle$, se základním intervalem periodicity $\langle -3, 3\rangle$.

$$2l = 6 \Rightarrow l = 3$$

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{3} 2 \int_0^3 (3x - x^2) \sin \frac{n\pi x}{3}\ dx = \begin{vmatrix} u = 3x - x^2 & u' = 3 - 2x \\ v' = \sin \frac{n\pi x}{3} & v = -\frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3} \left\{ \left[-\frac{3(3x - x^2)}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \right]_0^3 + \frac{3}{n\pi} \int_0^3 (3 - 2x) \cos \frac{n\pi x}{3}\, dx \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 3 - 2x & u' = -2 \\ v' = \cos \frac{n\pi x}{3} & v = \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \end{vmatrix} =$$

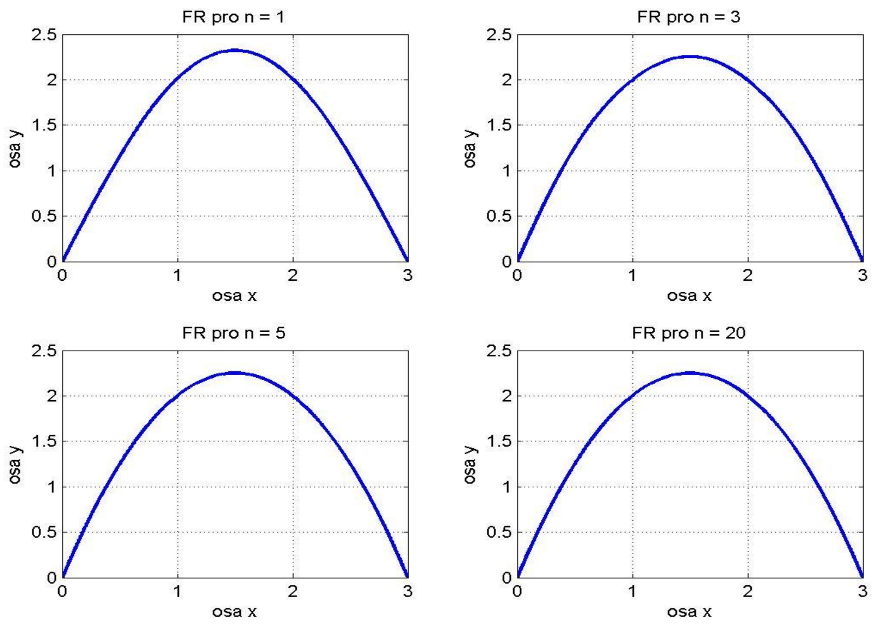
$$= \frac{2}{n\pi} \left\{ \left[\frac{3(3 - 2x\ )}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \right]_0^3 + \frac{6}{n\pi} \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3}\ dx \right\} = -\frac{36}{\pi^3 n^3} \left[\cos \frac{n\pi x}{3} \right]_0^3 =$$

$$= -\frac{36}{\pi^3 n^3}[(-1)^n - 1] \;\; pro \begin{cases} liche\ n: \dfrac{72}{\pi^3 n^3} \\ sude\ n: \;\; 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{72}{(2n-1)^3 \pi^3}$$

Hledaný rozvoj funkce f v sinovou Fourierovu řadu je:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{72}{(2n-1)^3 \pi^3} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{3}$$

Graf částečných součtů sinové Fourierovy řady pro různá n na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$.

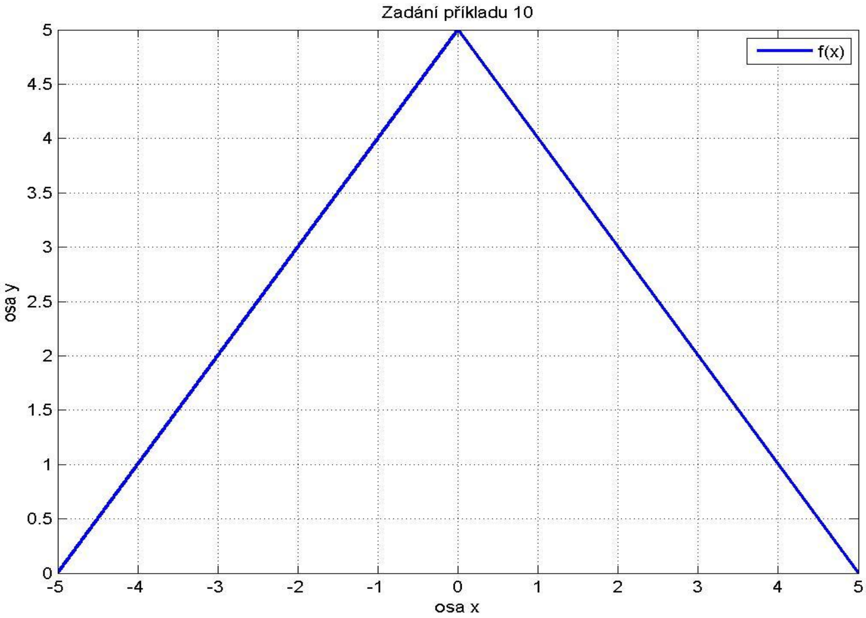


2-17 Př. 9 Částečný součet FŘ

2.10 Příklad 10

Nechť je dána periodická funkce f, která je na základním intervalu periodicity $\langle -5, 5 \rangle$ je dána vztahem $f(x) = 5 - |x|$. Napište rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu na intervalu $\langle -5, 5 \rangle$.

Graf funkce f na intervalu$\langle -5, 5\rangle$.



2-18 Zadání př. 10

Řešení:

Výpočet koeficientů:

Předpis funkce $f(x) = \begin{cases} 5 - x, x\epsilon \langle 0, 5\rangle \\ 5 + x, x\epsilon \langle -5, 0\rangle \end{cases}$

$$2l = 10 \Rightarrow l = 5$$

$$a_0 = \frac{1}{5} 2 \int_0^5 (5 - x) dx = \frac{2}{5}\left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_0^5 = 5$$

$$a_n = \frac{2}{5}\int_0^5 (5 - x) \cos\frac{n\pi x}{5}\ dx = \left| \begin{matrix} u = 5 - x & u' = -1 \\ v' = \cos\frac{n\pi x}{5} & v = \frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5} \end{matrix} \right| =$$

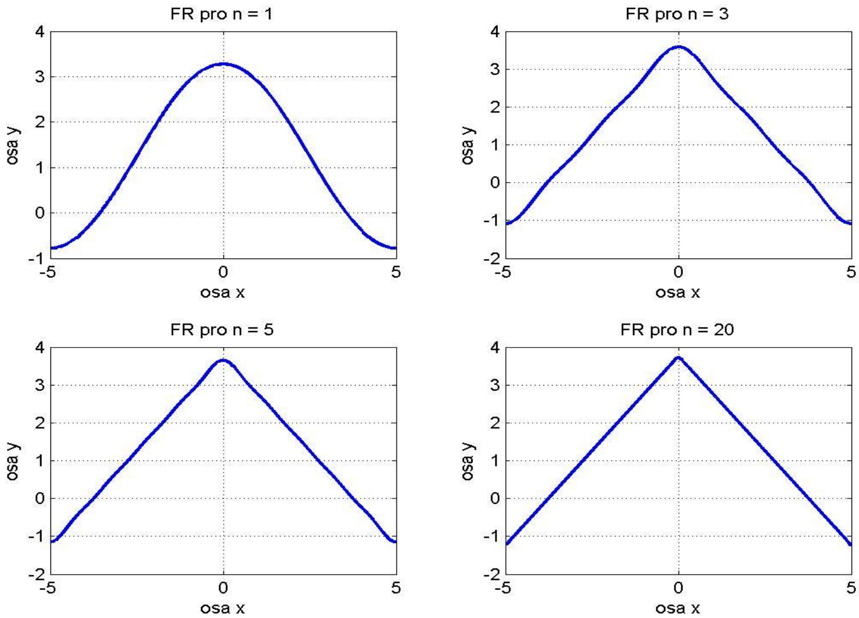
$$= \frac{2}{5}\left\{\left[-\frac{5(5 - x)}{n\pi}\right]_0^5 + \frac{5}{n\pi}\int_0^5 \sin\frac{n\pi x}{5}\ dx\right\} = \frac{2}{5}\left\{-\frac{25}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{5}\right]_0^5\right\} =$$

$$= -\frac{10}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1]\ pro \begin{cases} liche\ n: \frac{20}{\pi^2 n^2} \\ sude\ n:\ \ 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{20}{(2n - 1)^2\pi^2}$$

Hledaný rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu je:

$$f(x) = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{(2n-1)^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{5}$$

Graf částečných součtů Fourierovy řady pro různá n na intervalu $\langle -5, 5 \rangle$.

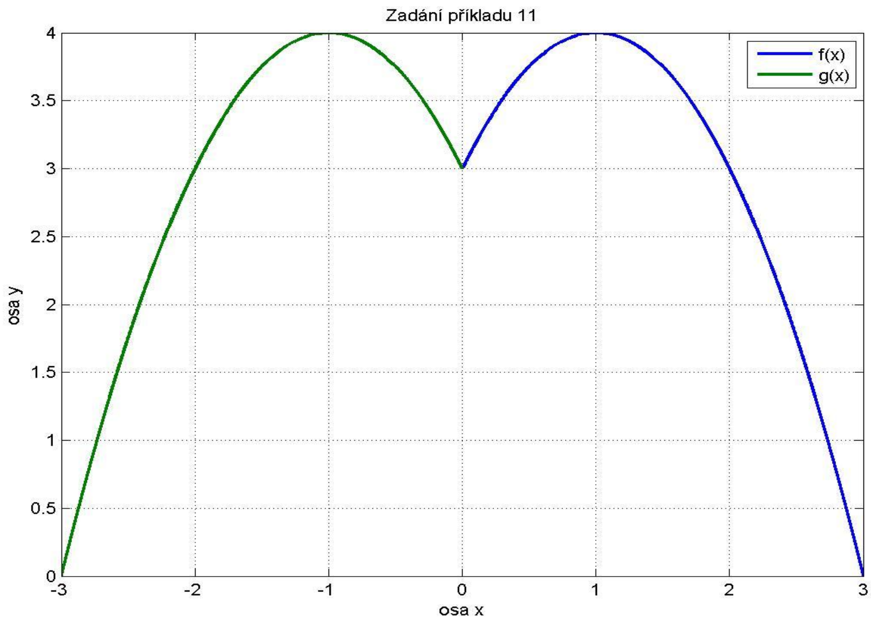


2-19 Př. 10 Částečný součet FŘ

2.11 Příklad 11

Nechť je dána funkce $f(x) = 4 - (x - 1^2)$, která je definovaná na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$. Pro následující funkci (tj. její příslušné periodické prodloužení) určete předpis pro kosinovou Fourierovu řadu funkce f na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$.

Graf funkce f na intervalu$\langle 0,3\rangle$ a graf sudého rozšíření na intervalu $\langle -3,0\rangle$.



2-20Zadání př. 11

Řešení:

Napište rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu.

Sudé periodické prodloužení, představuje dodefinovaní funkce $h(x) = 4 - (x+1)^2$ na intervalu $\langle -3,0\rangle$, se základním intervalem periodicity $\langle -3,3\rangle$.

Úprava zadané funkce: $4 - (x-1)^2 = -x^2 + 2x + 3$

$$2l = 6 \Rightarrow l = 3$$

$$a_0 = \frac{1}{3} 2 \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \frac{2}{3}\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_0^3 = \frac{2}{3}[-9 + 9 + 9] = 6$$

$$a_n = \frac{1}{3} 2 \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)\cos\frac{n\pi x}{3}\, dx = \begin{vmatrix} u = -x^2 + 2x + 3 \; u' = -2(x-1) \\ v' = \cos\frac{n\pi x}{3} \; v = \frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\left[\frac{3(-x^2 + 2x + 3)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3 + \frac{6}{n\pi}\int_0^3 (x-1)\sin\frac{n\pi x}{3} \mathrm{d}x\right\} =$$

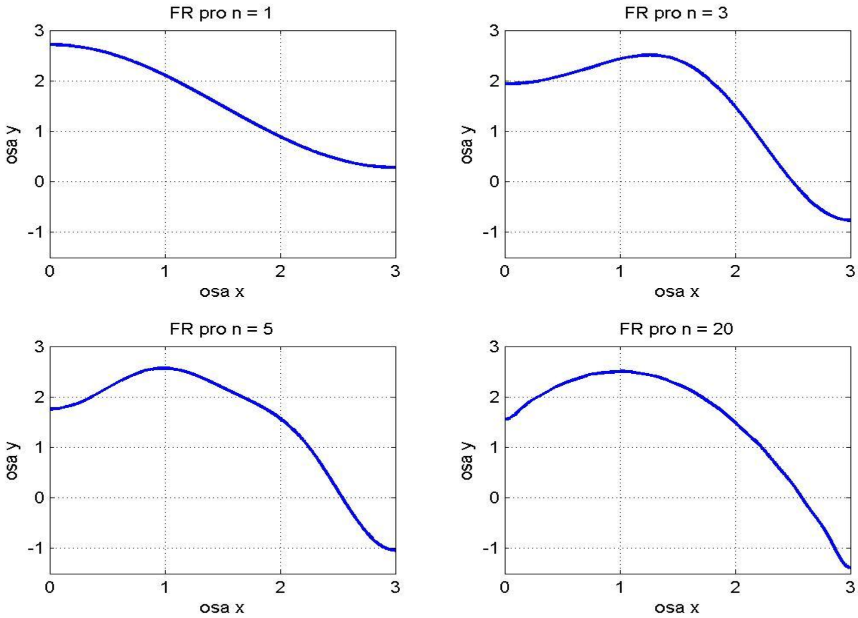
$$= \begin{vmatrix} u = x - 1 \quad u' = 1 \\ v' = \sin\frac{n\pi x}{3} \; v = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left\{\left[\frac{-3(x-1)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3 + \frac{3}{n\pi}\int_0^3 \cos\frac{n\pi x}{3} dx\right\} = -\frac{12}{n^2\pi^2}[2(-1)^n + 1]$$

Hledaný rozvoj funkce f v kosinovou Fourierovu řadu je:

$$f(x) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{12}{n^2\pi^2}[2(-1)^n + 1]\cos\frac{n\pi x}{3}$$

Graf částečných součtu Fourierovy řady pro různá n na intervalu $\langle 0, 3\rangle$.

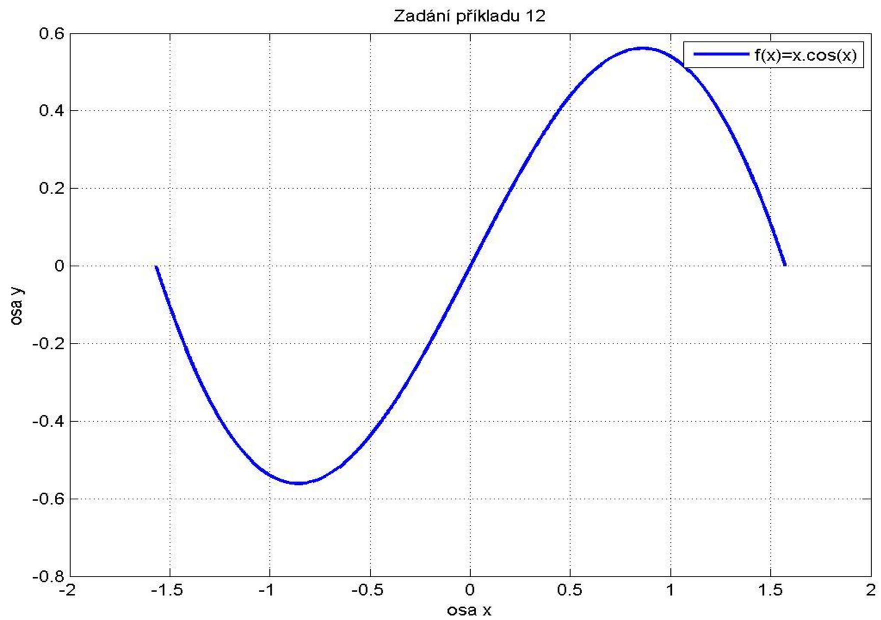


2-21 Př. 11 Částečný součet FŘ

2.12 Příklad 12

Nechť je dána periodická funkce f, která je na základním intervalu periodicity $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ dána vztahem $f(x) = x.\cos x$. Napište rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Graf funkce f na intervalu$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.



2-22 Zadání př. 12

Řešení:

Výpočet koeficientů:

Funkce $f(x) = x.\cos x$ definována na symetrickém intervalu $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$, na kterém je daná funkce lichá, protože jde o součin liché a sudé funkce.

Použité vzorce:

$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b \qquad \cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$$

$$\sin a.\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

$$2l = \pi \Rightarrow l = \frac{\pi}{2}$$

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos x.\sin 2nx \, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\frac{1}{2} [sin(2n+1)x + sin(2n-1)x] \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ x.sin(2n+1)x + x.sin(2n+1)x \} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x \quad u' = 1 \\ v' = sin(2n+1)x \; v = -\frac{1}{2n+1} cos(2n+1)x \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} u = x \quad u' = 1 \\ v' = sin(2n-1)x \; v = -\frac{1}{2n-1} cos(2n-1)x \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{2n+1} [x.cos(2n+1)x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2n+1)x\, dx + \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2n-1} [x.cos(2n-1)x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2n-1)x\, dx \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{2(2n+1)} \left[\pi. cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{1}{(2n+1)^2} \left[\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right] + \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2(2n-1)} \left[\pi. cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{1}{(2n-1)^2} \left[\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{\pi}{2(2n+1)} \left[\cos n\pi . \cos\frac{\pi}{2} - \sin n\pi . \sin\frac{\pi}{2} \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{(2n+1)^2} \left[\sin n\pi . cos\frac{\pi}{2} + \cos n\pi . sin\frac{\pi}{2} \right] - \frac{\pi}{2(2n+1)} \left[\cos n\pi . \cos\frac{\pi}{2} + \sin n\pi . \sin\frac{\pi}{2} \right] +$$

$$\left. + \frac{1}{(2n-1)^2} \left[\sin n\pi . cos\frac{\pi}{2} - \cos n\pi . sin\frac{\pi}{2} \right] \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{(2n+1)^2} [0 + (-1)^n] + \frac{1}{(2n-1)^2} [0 - (-1)^n] \right\} =$$

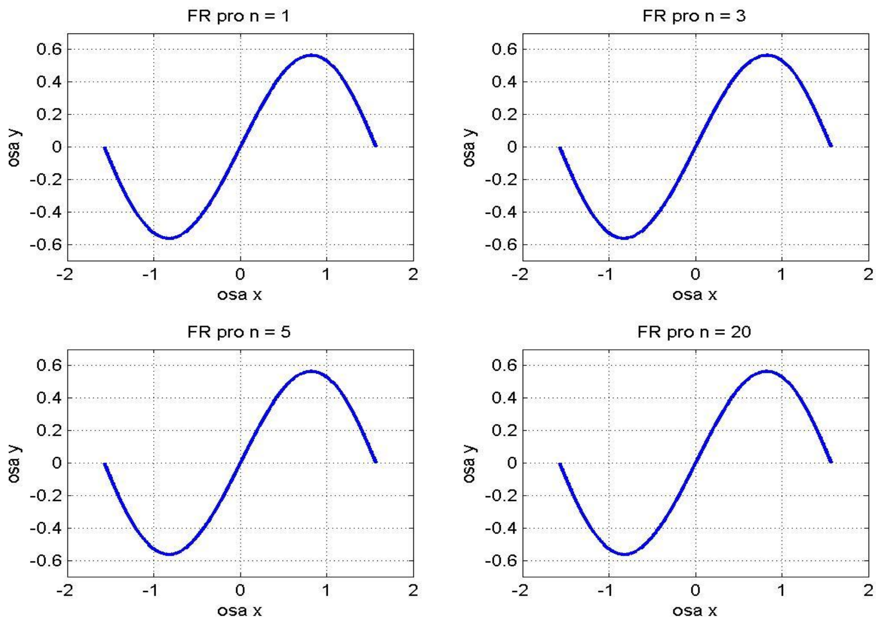
$$= \frac{2}{\pi} \left\{ -(-1)^n \left\{ \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right\} = (-1)^{n+1} \left\{ \frac{8n}{16n^4 - 8n^2 + 1} \right\} \right\} =$$

$$= \frac{16}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}.n}{16n^4 - 8n^2 + 1}$$

Hledaný rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu je:

$$f(x) = \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}.n}{(16n^4 - 8n^2 + 1)} \sin 2nx$$

Graf částečných součtů Fourierovy řady pro různá n na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

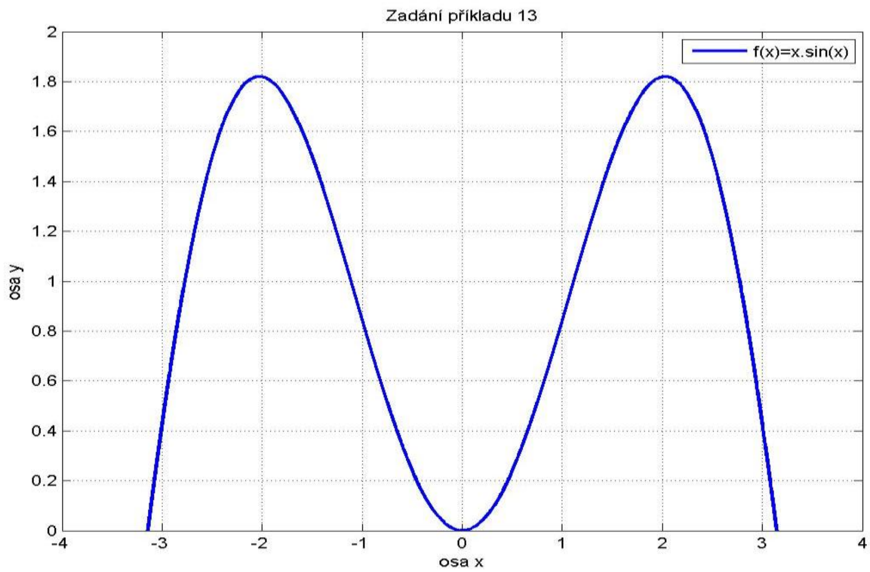


2-23 Př. 12 Částečný součet FŘ

2.13 Příklad 13

Nechť je dána periodická funkce f, která je na základním intervalu periodicity $\langle -\pi, \pi \rangle$ dána vztahem $f(x) = x.\sin x$. Napište rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Graf funkce f na intervalu$\langle -\pi, \pi \rangle$.



2-24 Zadání př. 13

Řešení:

Výpočet koeficientů:

Funkce $f(x) = x.\sin x$ je definovaná na symetrickém intervalu $< -\pi, \pi >$, na kterém je funkce sudá, protože jde o součin dvou lichých funkcí.

Použité vzorce:

$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b \qquad \cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$$

$$\sin a.\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

$$2l = 2\pi \Rightarrow l = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} 2 \int_0^{\pi} x.\sin \mathrm{x}\, \mathrm{dx} = \begin{vmatrix} \mathrm{u = x} & \mathrm{u' = 1} \\ \mathrm{v' = \sin x} & \mathrm{v = -\cos x} \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}\left\{[-x.\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \;dx\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}[-\pi.-1] = 2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} 2 \int_0^{\pi} x.\sin x.\cos nx\; dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\frac{1}{2}[\sin(1+n)x + \sin(1-n)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{\mathrm{x}.\sin(1+n)x + x.\sin(1-n)x\}\, \mathrm{dx} =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = sin(1+n)x & v = -\frac{1}{1+n} cos(1+n)x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = sin(1-n)x & v = -\frac{1}{1-n} cos(1-n)x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{1}{1+n}[x.cos(1+n)x]_0^{\pi} + \frac{1}{1+n}\int_0^{\pi} cos(1+n)x\; dx + \right.$$

$$\left. -\frac{1}{1-n}[x.cos(1-n)x]_0^{\pi} + \frac{1}{1-n}\int_0^{\pi} cos(1-n)x\; dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{1+n}[cos(\pi + n\pi)] + \frac{1}{(1+n)^2}[\sin(\pi + n\pi)] + \right.$$

$$\left. -\frac{\pi}{1-n}[cos(\pi - n\pi)] + \frac{1}{(1-n)^2}[\sin(\pi - n\pi)]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{1+n}[\cos\pi.\cos n\pi - \sin\pi.\sin n\pi] + \right.$$

$$+ \frac{1}{(1+n)^2}[\sin\pi.\cos n\pi + \cos\pi.\sin n\pi] - \frac{\pi}{1-n}[\cos\pi.\cos n\pi + \sin\pi.\sin n\pi] +$$

$$+\frac{1}{(1-n)^2}[\sin\pi.\cos n\pi - \cos\pi.\sin n\pi]\Big\} =$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big\{-\frac{\pi}{1+n}[-1.(-1)^n] - \frac{\pi}{1-n}[-1.(-1)^n]\Big\} = (-1)^n\left[\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1-n}\right] =$$

$$= (-1)^n\frac{2}{1-n^2}$$

Protože při dosazení za $a_n = 1$, dostáváme výraz typu $\frac{1}{0} = \infty$.

Výpočet integrálu a_n pro $n = 1$.

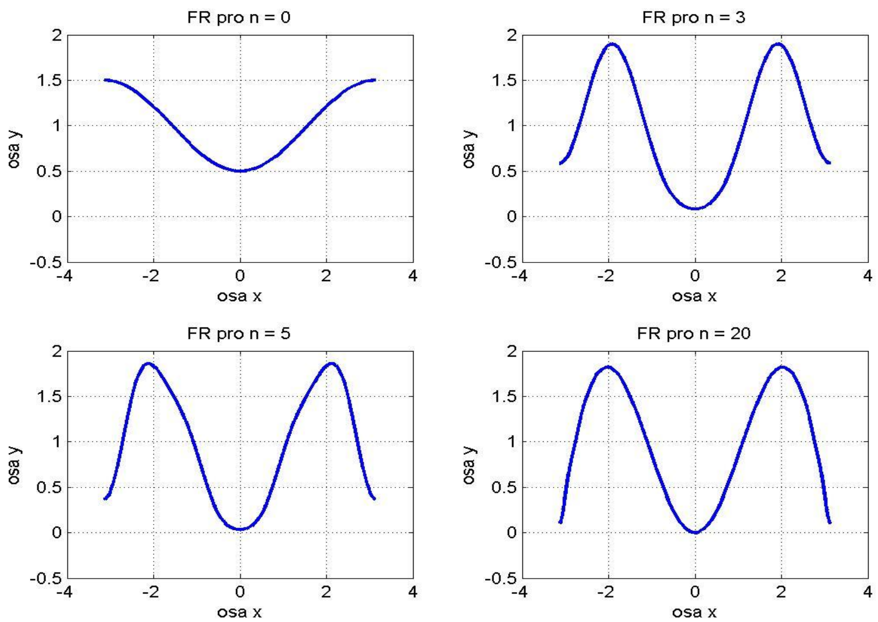
$$a_1 = \frac{1}{\pi}2\int_0^\pi x.\sin x\,.\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}x\,.\sin 2x = \left|\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin 2x & v = -\frac{1}{2}\cos 2x\end{matrix}\right| =$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{x}{2}\cos 2x\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}\right] = -\frac{1}{2}$$

Hledaný rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu je:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-n^2}\cos \mathrm{nx}$$

Graf částečných součtů Fourierovy řady pro různá n na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$.

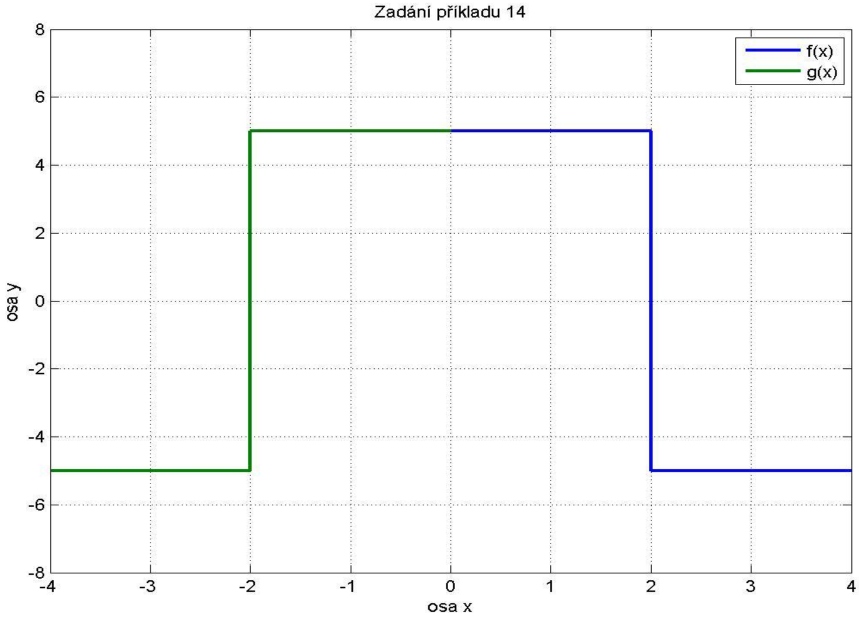


2-25 Př. 13 Částečný součet FŘ

2.14 Příklad 14

Nechť je dána funkce $f(x) = \begin{cases} 5 \ x \in \langle 0\,, 2) \\ -5 \ x \in \ (2\,, 4\rangle \end{cases}$, která je definovaná na intervalu $\langle 0, 4\rangle$. Pro následující funkci (tj. její příslušné periodické prodloužení) určete předpis pro kosinovou Fourierovu řadu na intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

Graf zadané funkce na intervalu $\langle 0,4\rangle$ a graf sudého rozšíření na intervalu $\langle -4, 0\rangle$.



2-26 Zadání př. 14

Řešení:

Výpočet koeficientů:

Sudé periodické prodloužení, představuje dodefinovaní funkce $g(x) = \begin{cases} 5 \ x \in (-2\,, 0\rangle \\ -5 \ x \in (-2\,, -4\rangle \end{cases}$ na intervalu $\langle -4, 0\rangle$ a funkce f bude periodická na intervalu periodicity $\langle -4, 4\rangle$.

$$2l = 8 \Rightarrow l = 4$$

$$a_0 = \frac{1}{4} 2 \left\{ \int_0^2 5dx - \int_2^4 5\,dx \right\} = \frac{1}{2} \left([5x]_0^2 - [5x]_2^4 \right) = [10 - (20 - 10)] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{4} 2 \left\{ \int_0^2 5 \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx - \int_2^4 5 \ \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{20}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \right]_0^2 - \frac{20}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \right]_2^4 \right\} =$$

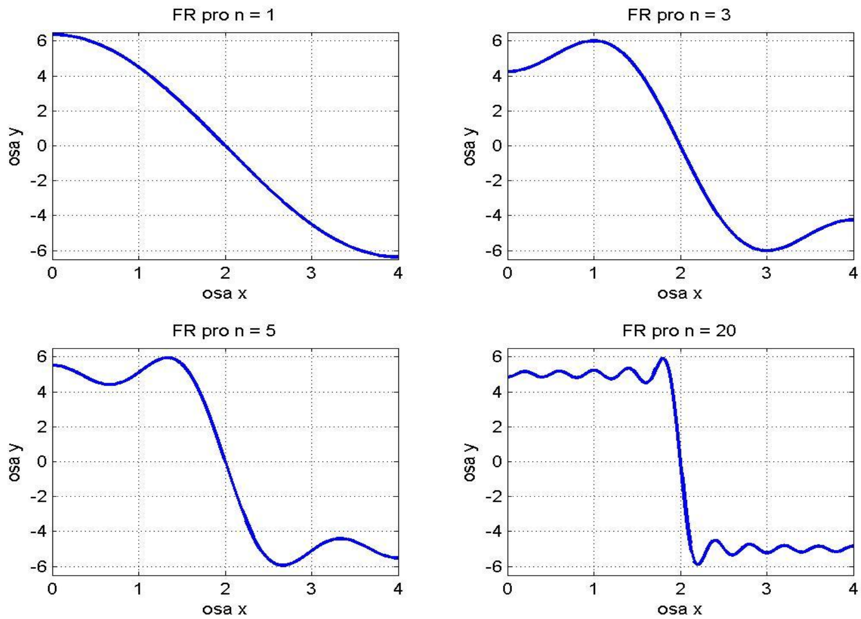
$$= \frac{10}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0 - \left(0 - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right] = \frac{10}{n\pi}\left(2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$b_n = 0$$

Hledaný rozvoj funkce f v kosinovou Fourierovu řadu je:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\pi}\left(2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\cos\frac{n\pi x}{4}$$

Graf částečných součtů kosinové Fourierovy řady pro různá n na intervalu $\langle 0,4\rangle$.



2-27 Př. 1 Částečný součet kosinové FŘ

2.15 Příklad 15

Bez počítání Fourierových koeficientů najděte předpis Fourierovu řadu pro následující funkce na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$.

a) $f(x) = \sin 2x \,.\cos 3x$

$$= \sin 2x\,.\cos(2x + x) = \sin\ 2x(\cos 2x.\cos x - \sin 2x.\sin x) =$$

$$= (\sin 2x\,.\cos 2x).\cos x - \sin 2x\,.\sin 2x\,.\sin x =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 4x - 0)\cos x - \sin x\,.sin^2\,2x =$$

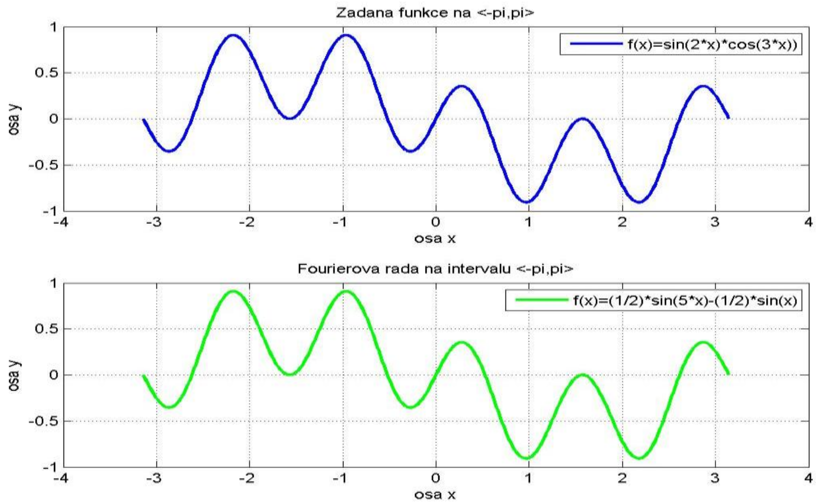
$$= \frac{1}{2}\sin 4x\,.\cos x - \sin x\,.\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 4x\,.\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin x\,.\cos 4x =$$

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{2}[\sin(4x+x)+\sin(4x-x)]-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}[\sin(x+4x)+\sin(x-4x)]=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 5x-\frac{1}{2}\sin x$$

$$b_1=-\frac{1}{2};b_5=\frac{1}{2}$$



2-28 15 a) Zadaná funkce a FŘ

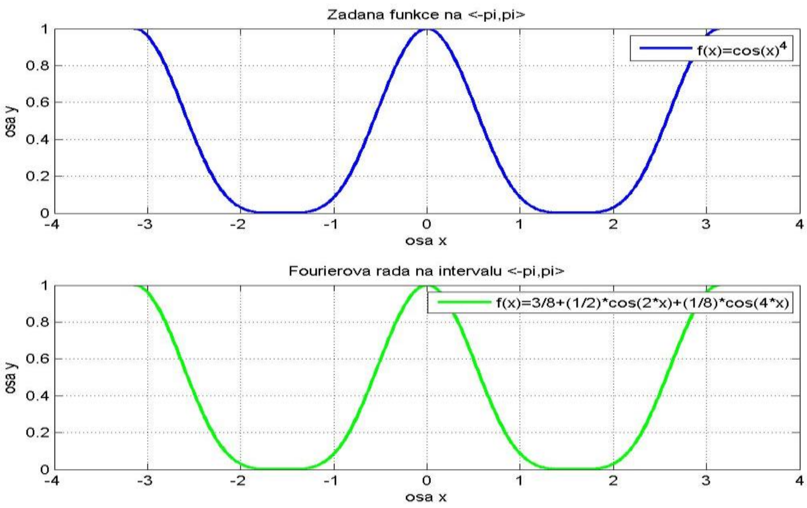
b) $f(x)=cos^4x$

$$=cos^2x.cos^2x=\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+2.\frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}=$$

$$=\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\ cos^2 2x)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$$a_0=\frac{3}{8};\ a_2=\frac{1}{2};\ a_4=\frac{1}{8}$$

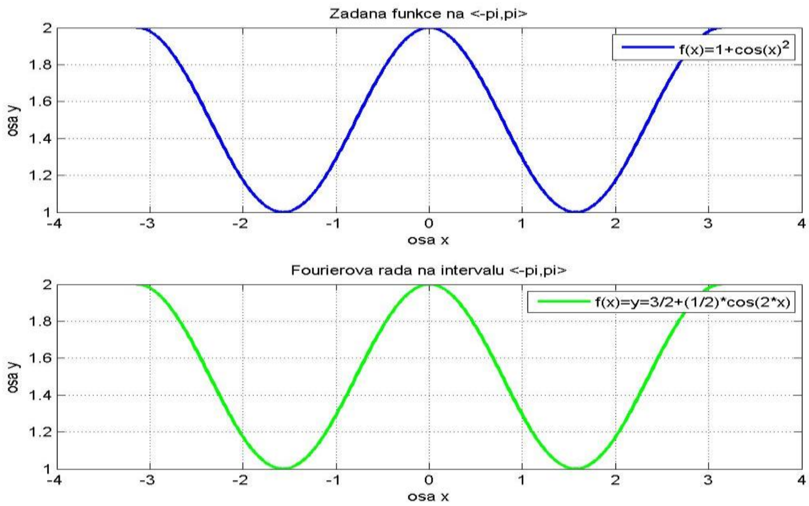


2-29 15 b) Zadaná funkce a FŘ

c) $f(x) = 1 + cos^2 x$

$$= 1 + \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$a_0 = \frac{3}{2};\ a_2 = \frac{1}{2}$$



2-30 15 c) Zadaná funkce a FŘ

Použité vzorce:

$$sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin a \,.\, \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

$$\sin a \,.\, \cos b + \sin b \,.\, \cos a = \sin\,(a + b)$$

Závěr

Vypracovaná bakalářská práce shrnuje základní poznatky o teorii Fourierových řad. Částečně je práce zaměřená na aplikaci a praktické využití Fourierových řad při analýze periodických signálu, což je jedna ze stěžejních využití při studiu na fakultě elektrotechniky. V rozsahu bakalářské práce nebylo možné zabývat se všemi oblastmi, ve kterých se Fourierovy řady využívají. Pozornost byla kladena na použití Fourierovy řady, jako transformace mezi časovou a frekvenční oblastí.

Nejvýznamnější částí práce je ovšem vypracovaná sbírka příkladů s postupem řešení rozvíjení periodických funkcí ve Fourierovu řadu. Sbírka obsahuje celkem patnáct úloh, ve kterých je zadaná funkce rozvíjena ve Fourierovu řadu, dále příklady neperiodických funkci, z nichž můžeme periodickým prodloužením nalézt periodickou funkci, kterou rozvíjíme ve Fourierovu řadu, která může být buď sinová, nebo kosinová. To závisí na způsobu periodického prodloužení funkce. Na závěr sbírky jsou uvedeny rozvoje funkcí bez počítání koeficientu Fourierovy řady. Dané funkce rozkládáme pomocí základních goniometrických vztahů.

Celkovým výsledkem bakalářské práce je výukový text, který by měl mít za úkol pomoci studentům při studiu této látky.

Literatura

Brno, Ústav matematiky FSI VUT. Fourierovy řady. *MATEMATIKA online.* [Online] [Citace: 18. Květen 2012.] http://mathonline.fme.vutbr.cz/Fourierovy-rady/sc-73-sr-1-a-60/default.aspx.

doc.Ing. František Vejražka, CSc. 1992. *Signály a soustavy.* [Online] 1992. [Citace: 3. Květen 2012.] http://home.zcu.cz/~ostember/Signaly_a_soustavy.pdf.

Fajkus, Marcel. 2009. Bakalařská Práce. *Modulace signálů a jejich vliv na spektrum signálu.* [Online] 2009. [Citace: 8. Červen 2012.] http://www.modulace.ic.cz/.

Ing. Zdeněk Němec, PhD. IS/STAG . *Studijní materialy pro KMT.* [Online] [Citace: 20. Červen 2012.] https://portal.upce.cz/portal/moje-studium/materialy.html.

J. Brabec, B. Hrůza. 1986. *Matematická analýza II.* Bratislava : SNTL, 1986.

2009. KMA.zcu.cz. *Fourierovy řady.* [Online] 2009. [Citace: 25. 5 2012.] http://analyza.kma.zcu.cz/PREDMETY/M2_MA2/zaznamy/MA2_03_Fourierovy_rady.pdf.

Seibert, J. 1997. *Matematika III.* Pardubice : Univerzita pardubice, 1997. ISBN 987-80-7194-930-5.

Příloha A – Zdrojový kód příkladů v MATLABU

Příklad komplexní FŘ.

```
N = 11;
wo = pi;
c0 = 0;
t = -3:0.01:3;
figure(1)

% komplexní Fourierova rada
y = c0*ones(size(t));
for n = -N:2:N,
  cn = 2/(j*n*wo);
  y = y + cn*exp(j*n*wo*t);
end
plot(t,yce,'LineWidth',2);
grid;
xlabel('cas t')
ylabel('s(t)');
ttle = ('Částečný součet Fourierovy řady pro N=11');
title(ttle);

% Oboustranné amplitudové spektrum komplexní Fourierovy rady

figure(2)
subplot(2,1,1)
stem(0,c0,'LineWidth',2);
for n = -N:2:N,
cn = 2/(j*n*wo);
stem(n,abs(cn),'LineWidth',2)
end
xlim([-11 11]);
xlabel('n')
ylabel('koeficient |c_n|')
ttle =('Oboustranné amplitudové spektrum');
title(ttle);

% Fázové Spektrum komplexní Fourierovy rady

subplot(2,1,2)
stem(0,angle(c0),'LineWidth',2);
for n = -N:2:N,
  cn = 2/(j*n*wo);
  stem(n,angle(cn),'LineWidth',2);
end
set(gca,'YTick',[-pi/2,0,pi/2])
set(gca,'YTickLabel',{'- pi/2','0','pi/2'})
ylim([-pi/2 pi/2]);
xlim([-11 11]);
xlabel('n')
ylabel('arg c_n')
ttle = ('Oboustranné fázové spektrum');
title(ttle);
```

Příklad trigonometrické FŘ.

```
% Fourierova rada pro n = 20
t=(-pi:0.01:pi);
a0=1;
soucet=a0/2*ones(size(t));
N=20;
for i=1:N
    an(i)=sin(i*(pi/2))/(i*(pi/2));
    bn(i)=0;
    soucet = soucet + an(i)*cos(i*t);
end
figure(1);
plot(t,soucet,'LineWidth',2);
grid;
ylim([-0.5 1.5]);
xlim([-3 3]);
xlabel('cas t');
ylabel('s(t)');
title('Částečný součet Fourierovy řady pro n = 20');

%  Amplitudové spektrum trigonometrické Fourierovy rady

figure(2)
subplot(2,1,1)
stem(0,a0,'LineWidth',2);
hold
for i = 1:N
   an(i)=sin(i*(pi/2))/(i*(pi/2));
   bn(i)=0;
   An(i)=((an(i)^2)+(bn(i)^2))^(1/2);
  stem(i,abs(An(i)),'LineWidth',2)
end
xlabel('n')
ylabel('koeficient A_n')
ttle =('Amplitudové spektrum');
title(ttle);
hold

% Fázové Spektrum trigonometrické Fourierovy rady

subplot(2,1,2)
stem(0,angle(a0/2),'LineWidth',2);
for i = 1:N,
  an(i)=sin(i*(pi/2))/(i*(pi/2));
  bn(i)=0;
  stem(i,angle(an(i)),'LineWidth',2);
end
set(gca,'YTick',[0,pi])
set(gca,'YTickLabel',{'0','pi'})
xlabel('n')
ylabel('faze \phi_n')
ttle = ('Fázové spektrum');
title(ttle);
```