UNIVERZITA PARDUBICE

FAKULTA EKONOMICKO – SPRÁVNÍ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2011 **Kateřina Kosová**

UNIVERZITA PARDUBICE
FAKULTA EKONOMICKO – SPRÁVNÍ

METODA S KONSTANTNÍHO ÚMORU A METODA KONSTANTNÍCH SPLÁTEK V MATEMATICE ÚVĚRŮ

KATEŘINA KOSOVÁ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
2011

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Akademický rok: **2010/2011**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Kateřina KOSOVÁ**
Osobní číslo:	**E08650**
Studijní program:	**B6208 Ekonomika a management**
Studijní obor:	**Management podniku - Management malých a středních podniků**
Název tématu:	**Metoda s konstantního úmoru a metoda konstantních splátek v matematice úvěrů**
Zadávající katedra:	**Ústav matematiky**

Zásady pro vypracování:

1. Stručný úvod do matematiky úvěrů
2. Metoda konstantního úvěru
3. Metoda konstantních splátek
4. Porovnání metod z různých hledisek pohledu

Rozsah grafických prací: –

Rozsah pracovní zprávy: **cca 30 stran**

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

[1] CIPRA, Tomáš. Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou. 1. vyd. Praha: HZ Edition, 1995. 320 s. ISBN 80-901918-0-0

[2] RADOVÁ, Jarmila. - DVOŘÁK, Petr. - MÁLEK, Jiří. Finanční matematika pro každého. 7. vyd. Praha: Grada Publishing, 2009. 296 s. ISBN 978-80-247-3291-6

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Ondřej Slavíček**
Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **30. června 2010**

Termín odevzdání bakalářské práce: **6. května 2011**

L.S.

doc. Ing. Renáta Myšková, Ph.D.
děkanka

doc. Ing. Marcela Kožená, Ph.D.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 4. srpna 2010

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na veškeré licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice ode mne oprávněna požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to až do okolností jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 23. dubna 2011.

Kateřina Kosová

Anotace:

Bakalářská práce se zabýva finanční matematikou, která se týká oblasti úvěrů a jejich splácením. Teoretická část uvádí základní pojmy týkající se úvěrů, úročení a dále se zabývá charakteristikou metod pro umoření dluhu, a to metodou konstantních splátek tak i metodou konstantního úmoru. V praktické části jsou poznatky o umořování dluhu aplikovány na příklad a oba způsoby umoření dluhu jsou porovnány.

Annotacion:

This thesis deals with the financial mathematics, which also covers credit and debt repayment. The theoretical part presents the basic concepts related to loan, interest and characterization of amortisation methods, which are the annuity repayment and the fixed principal loan repayment. In practical part the knowledge of amortization are applied to the specific example and both amortisation methods are compared.

Klíčová slova:

úvěr, úročení jednoduché, úročení složené, úroková míra, úmor, úrok, anuita, metoda splácení s konstantní anuitou, metoda splácení konstantním úmorem

Keywords:

loan, simple interest, compound interest, interest rate, principal payment, annuity, annuity repayment, fixed principal loan repayment

Poděkování

Vedoucím mé bakalářské práce byl pan Mgr. Ondřej Slavíček. Chtěla bych mu poděkovat za poskytnuté rady a především pak za ochotu a pomoc, kterou mi věnoval při zpracování této práce. Dále děkuji Ing. Haně Jonášové na jejichž přednáškách jsem se seznámila s využitím programu Microsoft Excel.

OBSAH

Úvod

Tato práce se zabývá problematikou úvěrů a tím jak úvěr umořit. V textu je uvedena teorie tak i důležité vzorce týkající se této tématiky. Cílem práce je seznámit s problematikou umořování úvěru a na konktétním příkladě porovnat dvě metody umořování dluhu tj. metodu konstatních splátek a metodu konstantního úmoru.

Práci jsem rozdělila do čtyř základních kapitol.

V první kapitole definuji základní pojmy, matematické vztahy a standardy, ve druhé kapitole popisuji metodu konstantního úmoru, ve třetí kapotole metodu konstantních splátek a v poslední čtvrté kapitole jsem zpracovala porovnání metody konstantního úmoru a konstantní splátky a ukázala jaký vliv má případné odložení splátek na splácení úvěrů.

V úvodu první kapitoly jsem pro lepší orientaci uvedla definici základních v práci používaných pojmů a stanovila standard pro jejich označení.

Dále v této kapitole definuji používaný matematický aparát, tj. především základní vztahy a rovnice pro aritmetickou a geometrickou řadu, které jsou důležité pro odvození vzorců pro výpočty jednotlivých parametrů jednoduchého (viz kapitola 1.3.3) a složeného (kapitola 1.3.4) úročení. Samostatně se zabývám definicí současné hodnoty, ze které jsem odvodila vzorec pro stanovení odúročitele (= diskontní faktor).

Kapitolu 1.3 věnuji problematice úročení, ve které popisuji typy úročení. Z hlediska způsobu úročení dělím úročení na jednoduché, složené nebo smíšené a z hlediska splatnosti úroku na polhůtní a předlhůtní. Protože předlhůtní úročení se v praxi vyskytuje minimálně, zaměřuji se ve své práci především na polhůtní způsob úročení. Samostatnou část této kapitoly věnuji popisu používaných standardů úročení.

V kapitole 1.4. se zabývám úrokovou mírou. Uvádím nejběžnější používané úrokové míry pro různá úrokovací období a jejich matematický vztah k základní, to je k roční úrokové míře. Vysvětluji, jaký mají v případě složeného úročení různá úrokovací období vliv na finanční efekty úročení. Z důvodu možnosti měření těchto efektů uvádím pojem efektivní úrokové míry, která je definována jako roční úroková míra, přinášející stejný úrokový efekt jako úroková míra připisovaná s vyšší četností. Pro úplnost uvádím i definici spojitého úročení, které se používá při výpočtech v oblasti kapitálových trhů. Na závěr této kapitoly se zabývám i vlivem inflace a zdanění na úrokovou míru. Z hlediska inflace rozlišuji reálnou a nominální úrokovou míru a ukazuji, jakým způsobem byla odvozena Fischerova rovnice, sloužící ke stanovení reálné úrokové míry. Z hlediska zdanění pak rozlišuji hrubou a čistou úrokovou míru a uvádím matematický vztah mezi nimi.

Kapitola 1.5. je věnována umořování dluhu. Definuji zde splátku jako součet úmoru dluhu a úroku dluhu a uvádím obvyklé metody umořování dluhu, to je metodu splácení najednou včetně úroků, metodu splácení najednou po výpovědi a metodu splácení pravidelnými platbami. Zmiňuji účetní a daňové důvody proč se sestavuje umořovací plán a definuji jeho obvyklou strukturu.

Ve druhé kapitole se podrobně zabývám metodou konstantního úmoru a odvozuji základní vztahy pro stanovení úmoru, úroku a zůstatku jistiny. Souhrnně jsem tyto vztahy sestavila do tabulky obecného umořovacího plánu pro metodu konstantního úmoru (viz tabulka č. 5).

Ve třetí kapitole se věnuji metodě konstantních splátek. Nejprve jsem odvodila vzorec pro stanovení konstantní splátky a následně vztahy pro stanovení úmoru, úroku a zůstatku jistiny. V tabulce č.6 jsem sestavila obecný umořovací plán pro metodu konstantní splátky. Pro úplnost jsem uvedla i výpočet úročení při metodě konstantní splátky a předem daném počtu splátek. Tato metoda se v praxi poměrně často používá v případech, kdy je dohodnuta splátka jako celé číslo (např. 1 000 Kč).

V poslední kapitole jsem provedla porovnání metod konstantního úmoru a konstantní splátky. Dále se zde zabývám vlivem odložení splátek na průběh splácení dluhu a vlivem odložení splátek na celkovou splatnou částku.

1 Stručný úvod do matematiky úvěrů

1.1 Definice základních pojmů

Úvodem definuji věcný obsah jednotlivých používaných pojmů. Pro lepší orientaci jsou tyto pojmy řazeny v abecedním pořadí.

Anuita = anuitní splátka (*a*)

konstantní splátka po stanovené období zahrnující platbu úmoru i úroku. V čase se mění pouze poměr úmoru a úroku. Viz vztah 3.1.4.

Diskontování

postup pomocí kterého zohledňujeme různou časovou hodnotu peněz tím, že přepočteme veškeré platby k jednomu časovému okamžiku. Tj. přepočítáváme budoucí hodnotu na současnou nebo naopak.

Doba splatnosti (n)

je doba, po kterou je zapůjčena jistina (D) a za kterou počítáme úrok *(u)*.

Jistina úvěru (*D*)

aktuální zůstatek úvěru. Jedná se o zapůjčenou částku sníženou o součet všech již provedených úmorů. Jistinu nesnižují žádné splátky úroků ani poplatků spojených s úvěrem. Používám dva pojmy, a to počáteční jistina (D_0) a zůstatek jistiny ke konci určitého období (D_n).

Odúročitel = diskontní faktor (*v*)

slouží ke stanovení vkladu (K_n), který získáme dnešním uložením vkladu (K_0) na období (n) let při roční úrokové míře (i). Odúročitel je převrácenou hodnotou úročitele. Viz vztah (1.2.9).

Úmor (M)

je částka jejíž splacením se snižuje výše jistiny.

Umořovatel

slouží ke stanovení velikosti anuitní splátky (a), kterou musíme pravidelně platit po období (n) let a při roční úrokové míře (i). Umořovatel je převrácenou hodnotou zásobitele. Viz vztah (3.1.4.).

<u>Úročitel = úrokovací faktor (1 + i)</u>

slouží ke stanovení vkladu ($\boldsymbol{K_0}$), který musíme uložit dnes abychom při jeho uložení na období (***n***) let a při roční úrokové míře (***i***) získali požadovaný vklad ($\boldsymbol{K_n}$). Úročitel je převrácenou hodnotou odúročitele. Viz vztah (1.3.8).

<u>Úrok (u)</u>

je z pohledu dlužníka cena za vypůjčení kapitálu. Ze strany věřitele se jedná o zisk, který požaduje za to, že po určitou dobu vzdává výnosu ze svých peněžních prostředků a že podstupuje značné riziko a nejistotu ([9], s. 3). Úrok se obvykle stanovuje jako procentuální část z jistiny (***D***) za časové období (***n***) let.

Výše úroku se uvádí v absolutní výši v měnových jednotkách (např. v Kč).

<u>Úroková míra (*i*)</u>

představuje cenu za úvěr a je vyjadřována v procentech jako poměr úroku (***u***) a jistiny (***D***) za určité období.

<u>Úvěr</u>

použití peněžní částky někoho jiného a to výměnou za příslib, že bude splácena (obvykle s úroky) později (Samuelson, Nordhouse, 1991, s. 982). Úvěry můžeme dělit podle různých kritérií – pro účel této práce má význam především dělení na úvěry krátkodobé (splatné do jednoho roku) a úvěry delší než rok, tj. úvěry střednědobé (splatné v rozmezí jednoho až čtyř let) a dlouhodobé (splatnost je delší než čtyři roky).

<u>Zásobitel</u>

slouží ke stanovení současné hodnoty pravidelných budoucích příjmů za období (***n***) let a při roční úrokové míře (***i***). Zásobitel je převrácenou hodnotou umořovatele. Viz vztah (3.1.3).

1.2 Použitý matematický aparát

V této kapitole uvádím základní vzorce a postupy, na které se budu v další části své práce odkazovat.

1.2.1 Aritmetická řada

Aritmetická posloupnost je každá posloupnost, ve které je rozdíl každých dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti konstantní. Tento rozdíl se nazývá diference (Bartsch, 1963, s. 77).

Pro každou aritmetickou řadu platí, že každý člen posloupnosti (kromě prvního členu a_1) lze vyjádřit jako aritmetický průměr sousedních členů posloupnosti.

Konečná aritmetická řada může být dle (Radová, Dvořák, Málek, 2009, s. 21) vyjádřena vztahem:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ldots + [a_1 + (n-1)d] \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

kde a_1 je první člen řady;
a_n je poslední, n-tý člen řady;
n je počet členů;
d je diference.

Pro další úvahy je důležité určení:

- libovolného k-tého členu aritmetické posloupnosti

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d. \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

- součtu prvních n členů aritmetické posloupnosti

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}. \qquad \textbf{(1.2.3)}$$

1.2.2 Geometrická řada

Geometrická posloupnost je každá posloupnost, ve které je podíl každých dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti konstantní. Tento podíl se nazývá kvocient (Bartsch, 1963, s. 80).

Konečná geometrická řada je dle (Radová, Dvořák, Málek, 2009, s. 21) vyjádřena tímto výrazem:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}, \qquad \textbf{(1.2.4)}$$

kde a_1 je první člen řady;

a_n je poslední, *n*-tý člen řady;

n je počet členů;

q je kvocient, který je roven podílu dvou po sobě jdoucích členů.

Pro další úvahy je důležité určení:

- libovolného k-tého členu geometrické posloupnosti

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}. \quad \textbf{(1.2.5)}$$

- součtu prvních n členů geometrické posloupnosti (pro q ≠1)

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad \textbf{(1.2.6)}$$

Pro každou geometrickou řadu dále platí, že absolutní hodnotu každého členu posloupnosti (kromě prvního členu a_1) je možné vyjádřit jako geometrický průměr z dvou sousedních členů posloupnosti. Tato vlastnost je vyjádřena vztahem:

$$a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}. \quad \textbf{(1.2.7)}$$

1.2.3 Současná hodnota

Současná hodnota je budoucí hodnota upravená o diskontní faktor.

Pro případ jednoduchého úročení je současná hodnota odvozena v kapitole 1.3.3, vztah 1.3.5.

Pro případ složeného úročení lze současnou hodnotu odvodit z (1.3.8) tak, že ze vzorce určíme K_0 a dostaneme

$$K_0 = K_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n}, \quad \textbf{(1.2.8)}$$

kde K_0 je současná hodnota kapitálu;

K_n je budoucího hodnota kapitálu;

i je roční úroková míra;

n je počet období/let.

Protože platí, že $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ a současně $1^n = 1$ můžeme výraz ve vzorci (1.2.8) upravit následovně:

$$\frac{1}{(1+i)^n} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^n = v^n, \tag{1.2.9}$$

kde v je ***odúročitel*** (diskontní faktor) a má následující podobu

$$v = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}. \tag{1.2.10}$$

Úpravou vzorce (1.2.8) s využitím vzorce (1.2.9) dostaneme:

$$K_0 = K_n \cdot v^n. \tag{1.2.11}$$

1.3 Úročení

1.3.1 Typy úročení

Úročení představuje způsob započítávání úroků k zapůjčené jistině.

Rozeznáváme dva základní typy úročení, a to:

- ***Jednoduché úročení*** - úroky nejsou připisovány k půjčenému kapitálu a dále se tudíž neúročí (Cipra, 1995, s. 9).
- ***Složené úročení*** - úroky se připisují k půjčenému kapitálu a spolu s ním se dále úročí (Cipra, 1995, s. 35).

Podrobněji se jednoduchým a složeným úročením zabývám v kapitolách 1.3.3 a 1.3.4.

Kromě výše uvedených typů úročení rozeznáváme též úročení smíšené, které je kombinací jednoduchého a složeného úročení. Princip tohoto úročení spočívá v tom, že první a poslední neúplný rok se úročí jednoduchým úročením. Zbytek lhůty se úročí složeným úročením (Cipra, 2006, s. 31).

Podle autorů (Radová, Dvořák, Málek, 2009, s. 27) se jednoduché i složené úročení dále dělí podle doby splatnosti úroku na:

- ***polhůtní (dekurzivní) -*** úroky se platí až na konci úrokovacího období.
- ***předlhůtní (anticipativní)*** - úroky se platí na začátku úrokového období. V tomto případě dlužník obdrží částku půjčky zmenšenou o úrokový výnos a na konci lhůty výpůjčky vrátí celou částku.

Vzhledem k tomu, že předlhůtní úročení se v praxi u úvěrů vyskytuje minimálně, nebudu se tímto způsobem úročení dále zabývat.

1.3.2 Standardy úročení

Podle Cipry (Cipra, 2006, s. 23-24) rozlišujeme několik standardů pro výpočet doby splatnosti. Nejčastěji se používají tyto standardy:

a) <u>Standard 30E/360</u>

Tento standard používá měsíce s 30 dny a roky s 360 dny. Pokud připadne počáteční nebo konečný termín na 31. den v měsíci, tak dojde k přepsání na 30. den tohoto měsíce. Tento standard se označuje také jako "německá metoda".

b) <u>Standard 30/360</u>

Obdoba pro standardu 30E/360 pouze s tím rozdílem, že pokud koncový termín připadne na 31. den měsíce, tak se přepíše na 1. den následujícího měsíce. Tato metoda se také někdy označuje jako 30A/360 nebo US-30/360.

c) <u>Standard act/360</u>

Používáme skutečný počet kalendářních dní v daném období, ale délka roku se počítá jako 360 dní. Někdy označuje jako „francouzská“ nebo „mezinárodní“ metoda.

d) <u>Standard act/365</u>

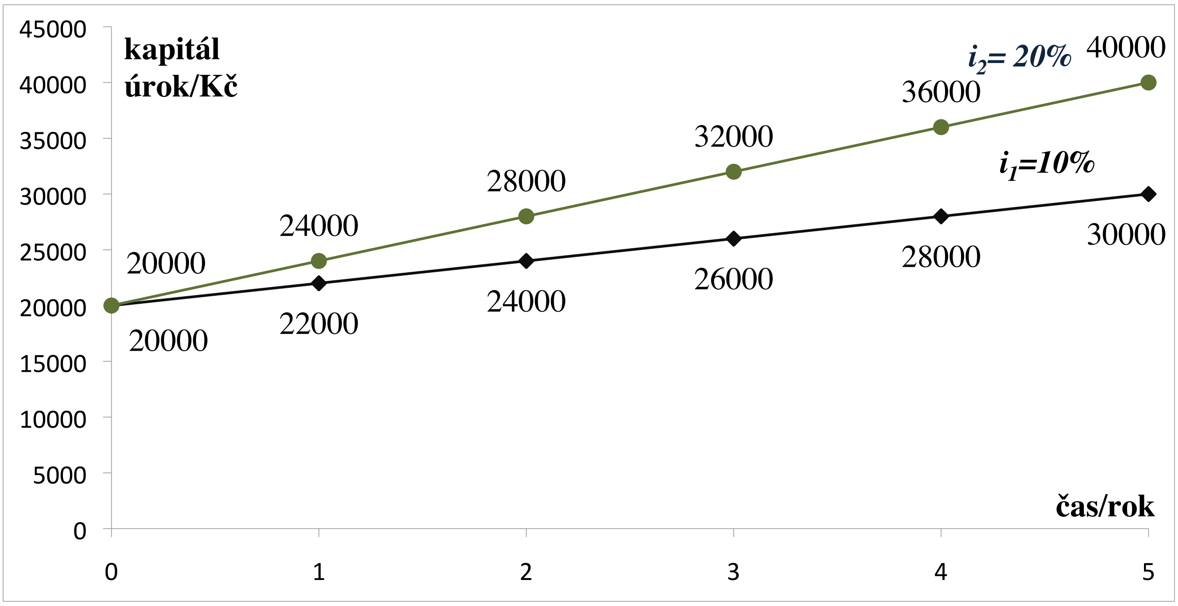
Pro tuto metodu uvažujeme skutečný počet kalendářních dní v daném období a skutečnou délku roku (365 dní). Tato metoda se také nazývá „anglická“ metoda.

1.3.3 Jednoduché úročení

Tento druh úročení se někdy označuje jako krátkodobé úročení, protože se používá především pro výpůjčky, které mají lhůtu splatnosti kratší než jeden rok a pro které není vhodné složené úročení (Macháček, 1996, s. 8).

U jednoduchého úročení se výše úroků stanovuje stále ze stejné částky. Platí, že vyplacené úroky se k původnímu kapitálu nepřipisují a ani se dále neúročí (Cipra, 2006, s. 21). Úroky tedy narůstají lineárně, protože se stále počítají ze stejného základu (viz obr. č. 1.).

Obr. č. 1. : Lineární nárůst kapitálu při jednoduchém úročení



Na obrázku je znázorněno jednoduché úročení původního kapitálu ve výši 20 000 Kč, při úrokové míře i_1 = *10% p.a.* a i_2 = *20% p.a.* po dobu 5 let. V obou případech narůstá úrok lineárně. Konktétně se jedná o nárůst 2 000 Kč každý rok při 10% úrokové míře a 4 000 Kč každý rok při 20% úrokové míře.

V tabulce jsou uvedeny hodnoty zůročeného kapitálu v jednotlivých letech, které zjistíme pomocí vzorce (1.3.4) :

Tabulka č. 1. : Zdrojová data k obr. č. 1.

ROK	10%	20%
0	20 000 Kč	20 000 Kč
1	22 000 Kč	24 000 Kč
2	24 000 Kč	28 000 Kč
3	26 000 Kč	32 000 Kč
4	28 000 Kč	36 000 Kč
5	30 000 Kč	40 000 Kč

Jednoduché úročení polhůtní

Budoucí (tj. zúročenou) částku K_n můžeme definovat jako

$$K_n = K_0 + u \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

kde K_0 je počáteční peněžní částka (kapitál);
u úrok.

Výše úroku se určí podle vzorce:

$$u = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{t}{360}, \tag{1.3.2}$$

kde K_0 je peněžní částka (kapitál);
p je roční úroková sazba uvedená v procentech;
t je doba splatnosti kapitálu ve dnech;
u úrok.

Současně platí, že

$i = \frac{p}{100}$ je úroková sazba vyjádřená v desetinném čísle;

$n = \frac{t}{360}$ je doba splatnosti udávaná v letech (Radová, Dvořák, Málek, 2009, s. 28).

Vzorec (1.3.2) můžeme upravit do následujícího tvaru:

$$u = K_0 \cdot i \cdot n. \tag{1.3.3}$$

Když známe úrok ***u***, můžeme stanovit budoucí hodnotu kapitálu $\boldsymbol{K_n}$, a to po dosazení vzorce (1.3.3) do vztahu (1.3.1) dostaneme

$$K_n = K_0 + u = K_0 + K_0 \cdot i \cdot n = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot n\right). \tag{1.3.4}$$

Ze vzorce (1.3.4) a (1.3.3)můžeme dále odvodit

- <u>Počáteční kapitál</u> $\boldsymbol{K_0}$

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + i \cdot n} = \frac{u}{i \cdot n}. \tag{1.3.5}$$

$\boldsymbol{K_0}$ je současnou hodnotou $\boldsymbol{K_n}$. Veličina $\frac{1}{1 + i \cdot n}$ se nazývá ***jednoduchý diskontní faktor.***

- <u>Doba splatnosti</u> ***n***

$$n = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot i} = \frac{u}{K_0 \cdot i}. \tag{1.3.6}$$

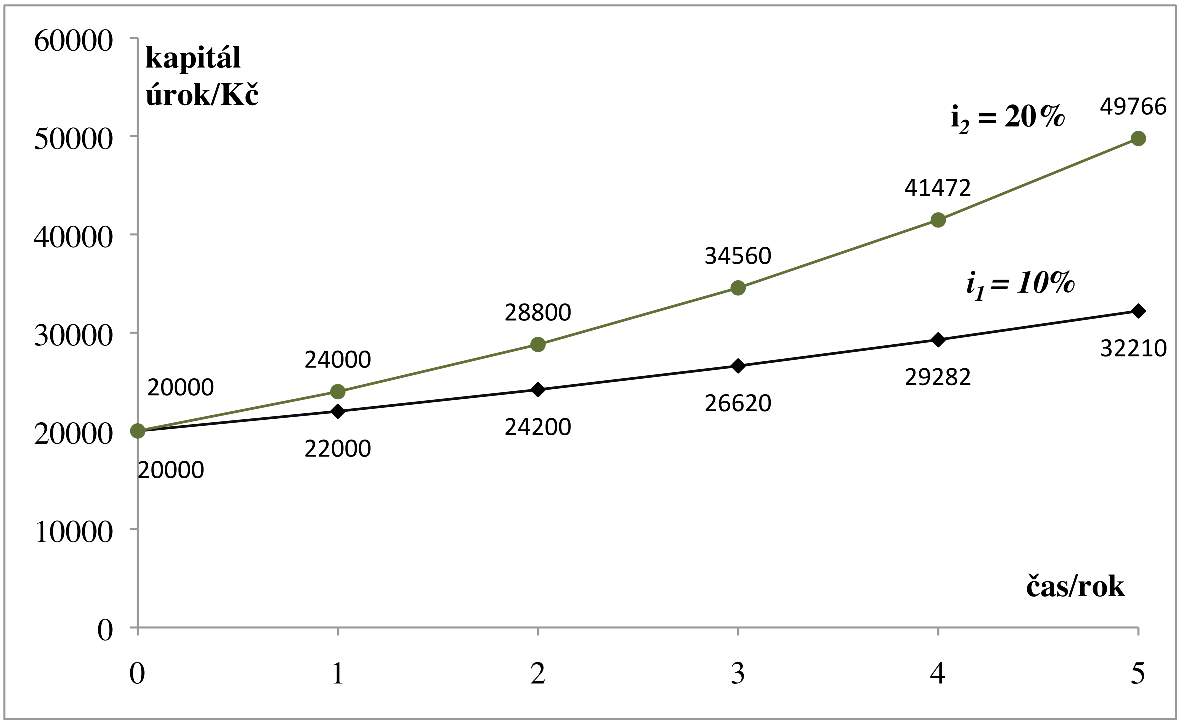
- Úrokovou míru **i**

$$i = \frac{K_n + K_0}{K_0 \cdot n} = \frac{u}{K_0 \cdot n}. \qquad \textbf{(1.3.7)}$$

1.3.4 Složené úročení

Složené úročení je založeno na principu, že vyplacené úroky se připočítávají k původnímu kapitálu a v následném úrokovém období se úrok vypočítá z původní částky zvýšené o úrok z předchozího úrokovacího období (Radová, Dvořák, Málek, 2009, s. 46). Tento způsob vede k tomu, že úročený kapitál narůstá exponenciálně (viz obr. č. 2.).

Obr. č. 2. : Složené úročení – exponenciální nárust kapitálu



Na obrázku je znázorněn celkový růst kapitálu v závislosti na době splatnosti *n* a úrokové míře *i*. Při složeném úročení kapitálu K_0 = 20 000Kč a úrokové sazbě i_1 = 10% a i_2 = 20% po dobu 5 let, bude úrok narůstat exponenciálně.

V níže uvedené tabulce jsou zaznamenány údaje týkající se jednotlivých let, ve kterých dochází k úročení kapitálu podle vzorce (1.3.8.) :

Tabulka č. 2. : Zdrojová data k obr. č. 2.

Rok	10%	20%
0	20 000 Kč	20 000 Kč
1	22 000 Kč	24 000 Kč
2	24 200 Kč	28 800 Kč
3	26 620 Kč	34 560 Kč
4	29 282 Kč	41 472 Kč
5	32 210 Kč	49 766 Kč

Tento druh úročení se též někdy označuje jako úročení dlouhodobé, protože se používá pro dobu splatnosti delší než jeden rok.

<u>Složené úročení polhůtní</u>

V polhůtním složeném úročení se úrok připočítává ke kapitálu koncem úrokovacího období.

Jako výchozí informaci o postupu výpočtu stavu kapitálu ke konci jednotlivých let při složeném úročení uvádím následující tabulku.

Tabulka č. 3. : Stav kapitálu na konci období při složeném polhůtním úročení

Rok	Stav kapitálu na konci roku
1	$K_1 = K_0 \cdot (1+i)$
2	$K_2 = K_0 \cdot (1+i)^2$
3	$K_3 = K_0 \cdot (1+i)^3$
:	**:**
n	$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$

(Zdroj: RADOVÁ, J, DVOŘÁK, P, MÁLEK, J. Finanční matematika pro každého: 7. aktualizované vydání. s. 46)

Porovnáme-li řadu hodnot K_n uvedenou v tabulce pro jednotlivé roky zjistíme, že je shodná s pravou stranou rovnice (1.2.4). Jedná se tedy o geometrickou řadu s členem $\mathbf{a_1 = K_0}$ a s kvocientem **q = 1+i.**

Můžeme tedy využít vzorec pro stanovení n-tého členu geometrické řady (1.2.5) a potom platí

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n, \qquad \textbf{(1.3.8)}$$

kde K_n představuje výši kapitálu na konci n-tého roku;
K_0 je původní kapitál;
i je úroková sazba;
n doba splatnosti kapitálu.

Faktor *(1+i)* se nazývá ***úročitel*** (= úrokovací faktor) (Radová, Dvořák, Málek, 2009, s. 47). Ze vzorce (1.3.8) můžeme dále odvodit

- Doba splatnosti ***n***,
  stanovíme logaritmovánín vzorce (1.3.8)

  $\ln(K_n) = \ln(K_0) + n \cdot \ln(1+i)$,

  odtud dostáváme

  $$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1+i)}. \qquad \textbf{(1.3.9)}$$

- Výpočet úrokové sazby ***i***,
  provedeme odmocněním celé rovnice (1.3.8) a dostaneme

  $$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1. \qquad \textbf{(1.3.10)}$$

- Výše úroku ***u***
  úrok stanovíme jako rozdíl $\boldsymbol{K_n}$ a $\boldsymbol{K_o}$ a za $\boldsymbol{K_n}$ dosadíme vztah (1.3.8)

  $$u = K_n - K_o = K_0 \cdot (1+i)^n - K_0 = K_0\,[(1+i)^n - 1]. \qquad \textbf{(1.3.11)}$$

1.4 Úroková míra

1.4.1 Efektivní úroková míra

Úrokovou míru nejčastěji uvádíme za roční období. Pokud chceme zdůraznit, že se jedná o roční úrok, přidáme zkratku ***p.a.***

V praxi se však používají i jiné úrokové míry než roční. V následující tabulce jsou uvedeny možné délky úročení a jejich zkratky:

Tabulka č. 4. : Úrokové míry pro různá úrokovací období

Období	Zkratka	Název	Počet splátek za rok
Rok	**p.a.**	**Per annum**	**1**
Pololetí	**p.s.**	**Per semestre**	**2**
Čtvrtletí	**p.q.**	**Per quartale**	**4**
Měsíc	**p.m.**	**Per mensem**	**12**
Týden	**p.sept**	**Per septimanam**	**52**
Den	**p.d.**	**Per diem**	**365**

(Zdroj: SEKERKA, B., JINDROVÁ, P. Finanční a pojistná matematika, s. 13)

Úrokovou míru $\boldsymbol{i_m}$ pro období kratší než rok můžeme vypočíst jako podíl roční úrokové míry $\boldsymbol{i_r}$ a počtu úrokových období $\boldsymbol{m}$ během roku, tj. pro pololetí $i_r / 2$, čtvrtletí $i_r / 4$ a měsíc $i_r / 12$.

Počet úrokovacích období je roven součinu počtu let $\boldsymbol{n}$ a počtu úrokových období během roku $\boldsymbol{m}$. Například pro úvěr se splatností 4 roky a čtvrtletní úročení bude počet úrokových období roven součinu $\boldsymbol{m} \,.\, \boldsymbol{n}$, tj. 16.

Při složeném úročení záleží na četnosti připisování úroku, protože při něm dochází k úročení úroků. To znamená, že připisují-li se úroky např. měsíčně (p.m.) bude při stejné úrokové míře celkový roční úrok vyšší než při ročním (p.a.). připisování úroků.

Aby bylo možné porovnat výsledný finanční efekt při různé četnosti připisování úroku používá se tak zvaná efektivní úroková míra, což je taková roční úroková míra, která přinese stejný úrokový efekt jako úroková míra připisovaná s vyšší četností. Lze ji tedy definovat následovně:

$$1 + i_{ef} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m . \tag{1.4.1}$$

Po úpravách vzorce (1.4.1) dostaneme vzorec pro stanovení efektivní úrokové sazby

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1, \qquad \textbf{(1.4.2)}$$

kde i_{ef} je efektivní úroková míra;

i je roční úroková sazba;

m je počet úrokových období.

1.4.2 Spojité úročení

V případě, kdy by se počet úrokovacích období blížil k nekonečnu (tj. délka úrokovacího období se blíží k nule) jedná se o spojité úročení a efektivní úroková míra se v tomto případě nazývá úroková intenzita (Radová, Dvořák, Málek, 2009, s. 70).

Pro stanovení úrokové intenzity platí:

$$1 + i_e = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m . \qquad \textbf{(1.4.3)}$$

kde i_e je úroková intenzita;

i je roční úroková míra;

m je počet úrokových období.

Mezi úrokovou intenzitou a úrokovou mírou podle (Radová, Dvořák, Málek, 2009, s. 71) platí tedy tento vztah:

$$i_e = e^i - 1. \qquad \textbf{(1.4.4)}$$

Spojité úročení je velmi důležité v oblasti kapitálových trhů, kde se využívá k ohodnocování kapitálových investic nebo cenných papírů.

1.4.3 Nominální a reálná úroková míra

Nominální úroková míra je vždy mezi věřitelem a dlužníkem smluvně sjednaná a je uvedena v úvěrových smlouvách, uvedena na cenných papírech nebo jinak zobrazena v dokumentu (Bohanesová, 2006, s. 40). Výše úroku se stanovuje z nominální hodnoty daného finančního instrumentu.

Samotná nominální úroková míra nám však neudává reálný výnos. Ten získáme po zohlednění míry inflace a po výpočtu tak zvané reálné úrokové míry.

Reálná úroková míra je tedy nominální úroková míra očištěná o míru inflace (Borkovec, Ptáček, Tomek, 2001, s. 15).

Reálnou úrokovou míru můžeme získat dvěma způsoby

- úročením nominální úrokovou mírou a následným diskontováním mírou inflace, tj.:

$$K_r = K_0 \cdot \left(1 + i_n\right) \cdot \frac{1}{1 + i_i}, \tag{1.4.5}$$

kde K_r je reálná výše kapitálu po uplynutí úrokového období;

K_0 je výše kapitálu na počátku úrokového období;

i_n je nominální úroková míra;

i_i je míra inflace.

- úročením počátečního kapitálu reálnou úrokovou mírou

$$K_r = K_0 \cdot \left(1 + i_r\right), \tag{1.4.6}$$

kde i_r je reálná úroková míra.

Porovnáním (1.4.5) a (1.4.6) dostáváme

$$K_0 \cdot \left(1 + i_n\right) \cdot \frac{1}{1 + i_i} = K_0 \cdot \left(1 + i_r\right).$$

Po vykrácení K_0 a vynásobením $1 + i_i$ dostáváme

$$(1 + i_n) = (1 + i_r) \cdot (1 + i_i)$$

a odtud

$$i_n = i_r + i_i + i_r \cdot i_i. \tag{1.4.7}$$

Vzhledem k tomu, že především v obdobích s nízkou inflací je součin $\boldsymbol{i_r \cdot i_i}$ relativně velmi malý, může se zanedbat a potom dostaneme pro vyjádření vztahu mezi nominální a reálnou úrokovou mírou vztah

$$i_r = i_n - i_i. \tag{1.4.8}$$

Tato rovnice pro výpočet reálné úrokové míry je známa jako Fischerova rovnice.

1.4.4 Hrubá a čistá úroková míra

V případě, že uvažujeme se zdaněním je nutné stanovit vztah mezi úrokovou mírou hrubou (tj. před zdaněním) a čistou (tj. po zdanění).

Jedná se o jednoduchý vztah, ve kterém zohledníme sazbu daně z příjmu a dostaneme:

$$i_c = i_h \cdot \left(1 - i_{dp}\right), \tag{1.4.9}$$

kde i_c je čistá nominální úroková sazba;

i_h je hrubá nominální úroková sazba;

i_{dp} je sazba daně z příjmu.

1.4.5 Reálná čistá úroková míra

Podle Cipry (Cipra, 2006, s. 36) se reálná čistá úroková míra určí tímto vztahem:

$$i_r^c = \frac{i \cdot \left(1 - i_{dp}\right) - i_i}{1 + i_i},$$

kde i je nominální úroková míra;

i_r^c je reálná čistá úroková míra;

i_{dp} je sazba daně z příjmu;

i_i je míra inflace.

Realná čistá úroková míra nám udává výši úroku po zdanění a po odečtení inflace.

1.5 Umořování

1.5.1. Úmor a umořování dluhu

Umořování dluhu představuje splácení dluhu (půjčky, úvěru) podle umořovacího plánu, který je schválen věřitelem i dlužníkem (Bohanesová, 2006, s. 37). K umořování dluhu dochází placením splátek (= anuit). Každá splátka se skládá ze dvou složek, a to z úmoru dluhu a úroku z dluhu.

Tedy platí, že:

Splátka = úmor dluhu + úrok z dluhu.

Úmor z dluhu postupně snižuje dlužnou částku a úmor je tedy část dluhu samotného (Cipra, 1995, s. 80).

Úrok z dluhu se počítá z nesplacené dlužné částky (jistiny), tj. jako součin nesplacené jistiny a příslušné úrokové míry. Z tohoto důvodu se s postupným snižováním nesplacené jistiny (tj. zbývající dlužné částky) snižuje i úrok z dluhu. Pro úrok z dluhu tedy platí, že při snižování dlužné částky klesá i výše úroku z dluhu.

1.5.2. Způsoby umořování dluhu

Podle autorů (Radová, Dvořák, Málek, 2009, s. 127-128) rozeznáváme několik způsobů jak umořovat dluh. Mezi nejčastěji používané patří následující způsoby:

- ***Splácení najednou včetně úroků:***
  splácení dlužné částky najednou včetně úroku se obvykle využívá pro úvěry s krátkou dobou splatnosti.
  Pro stanovení splatné částky po uplynutí doby splatnosti využijeme poznatku o budoucí hodnotě (peněz). Výši částky získáme z dlužné částky na základě dohodnuté doby splatnosti a úrokové sazby.
- ***Splácení najednou po výpovědi:***
  splácení najednou po výpovědi je typické pro úvěry, které jsou sjednány na dobu neurčitou. Úroky z úvěru jsou vždy placeny ve lhůtách jejich splatnosti. Dochází tedy ke splácení úroků v pravidelných intervalech z jistiny dluhu. Zapůjčená částka je splacena až na závěr.
- ***Splácení pravidelnými platbami:***
  jedním z nejčastějších typů splácení úvěru je umořování pravidelnými platbami. Tento typ splácení se využívá pro umoření střednědobých nebo dlouhodobých úvěrů. Podle charakteru plateb rozlišujeme umořování konstantní anuitou nebo umořování konstantním úmorem. Při umořování konstantní anuitou jsou platby stále stejné. Platí, že z časti platby se hradí úmor úvěru a z druhé části jsou placeny úroky. Pokud platby nejsou stejné, tak hovoříme o metodě s konstantním úmorem. V tomto případě je stále stejná výše úmoru a výše placeného úroku se mění.

1.5.3. Umořovací plán

Umořovací plán neboli splátkový kalendář je přehled všech splátek, úroků, poplatků a zůstatků dluhu ke stanoveným termínům. Obvykle tento plán sestavuje věřitel a plán musí být vždy předem projednán a odsouhlasen věřitelem a dlužníkem.

Umořovací plán nám musí mimo jiné umožnit

- správně zaúčtovat jednotlivé složky dluhu – nestačí tedy uvádět pouze splátku, ale musí být rozdělena na úmor (vykazuje se v rozvaze) a úrok (vykazuje se ve výkazu zisků a ztrát). Zaúčtovat je třeba i aktuální zůstatek dluhu.
- splnit povinnosti vyplývající ze zákona o daních z příjmu. Úmor dluhu je placen ze zisku. Úroky jsou zahrnuty v nákladech a jsou ve většině případů daňově uznatelné.

V umořovacím plánu podle (Bohanesová, 2006, s. 37) musíme pro každé období uvést následující položky:

- výše splátek,
- výše úroku z úvěru,
- výše úmoru,
- zůstatková výše dluhu.

2 Metoda konstantního úmoru

Pro tuto metodu je charakteristická stále stejná (= konstantní) výše úmoru po celou dobu splatnosti. Princip metody spočívá v tom, že jistina s v každém splátkovém období sníží o stejnou částku, tj. o úmor. Úrok z dlužné částky je proměnný a dopočítává se ze zůstatku jistiny (Radová, Dvořák, Málek, 2009, s. 140). Výsledkem tohoto postupu je nestejná splátka.

Umořování úvěru nestejnými splátkami patří k nejrozšířenějšímu způsobu splácení běžných úvěrů.

2.1 Stanovení konstantního úmoru

Pro sestavení umořovacího plánu musíme stanovit výši úmoru, úroku a zůstatku jistiny ke konci každého úrokovacího období.

Níže uvedené vztahy jsou odvozeny za předpokladu, že počáteční jistina $\boldsymbol{D_0}$, je splatná po dobu $\boldsymbol{n}$ let při roční úrokové míře $\boldsymbol{i}$ a polhůtním úročení. Rok $\boldsymbol{r}$ je libovolný rok v intervalu 1 až n. Vlastní konstantní úmor je označen jako $\frac{D_0}{n}$.

Stanovení úmoru

Protože úmory **M** jsou u této metody konstantní, platí

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_n = \frac{D_0}{n}. \tag{2.1.1}$$

Původní stav úvěru (= počáteční jistinu) získáme pomocí vztahu:

$$D_0 = n \cdot \frac{D_0}{n}, \tag{2.1.2}$$

Stanovení úroku

Rok 1

V prvním roce můžeme vypočíst úrok dle vzorce (1.3.3) pro jednoduché úročení. Za $\boldsymbol{D_0}$ dosadíme dle (2.1.2) a n = 1. Potom dostaneme:

$$u_1 = D_0 \cdot i = n\frac{D_0}{n} \cdot i. \tag{2.1.3}$$

Rok r

Pro obecný rok ***r*** budeme úrok stanovovat jako součin jistiny ke konci předcházejícího období a úrokové míry.

$$u_r = (n - r + 1) \cdot \frac{D_0}{n} \cdot i. \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

Úmor a úroková míra jsou pro daný případ konstanty. Jediné co se mění, je počet let do splacení úvěru. Jedná se tedy o aritmetickou řadu definovanou vztahem (1.2.1). Diference této řady je dána rozdílem, dvou po sobě jdoucích úrokových plateb (Radová, Dvořák, Málek, 2009, s. 141), např.:

$$u_1 - u_2 = n \cdot \frac{D_0}{n} \cdot i - (n - 1) \cdot \frac{D_0}{n} \cdot i = \frac{D_0}{n} \cdot i. \qquad \textbf{(2.1.5)}$$

Protože je úmor konstantní tvoří i splátky aritmetickou řadu s diferencí $d = \frac{D_0}{n} \cdot i$.

Stanovení zůstatku jistiny

Zůstatek můžeme stanovit jako počet zbývajících splátek úmorů.

Rok 1

na konci prvního roku stanovíme zůstatek jistiny dle vztahu

$$D_1 = (n - 1) \cdot \frac{D_0}{n}. \qquad \textbf{(2.1.6)}$$

Rok r

Pro obecný rok r můžeme napsat obdobný vztah jako pro (2.1.6), tj.

$$D_r = (n - r) \cdot \frac{D_0}{n}. \qquad \textbf{(2.1.7)}$$

2.2 Umořovací plán při konstantním úmoru

Dle vztahů odvozených v předcházející kapitole můžeme vyplnit obecnou tabulku pro umořovací plán.

Tabulka č. 5. : Umořovací plán pro konstantní úmor

Období	Splátka	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0				$\frac{D_0}{n} \cdot n$
1	$\frac{D_0}{n} \cdot \left(n \cdot i + 1\right)$	$n \cdot \frac{D_0}{n} \cdot i$	$\frac{D_0}{n}$	$\frac{D_0}{n} \cdot (n-1)$
2	$\frac{D_0}{n} \cdot \left[\left(n-1\right) \cdot i + 1\right]$	$(n-1) \cdot \frac{D_0}{n} \cdot i$	$\frac{D_0}{n}$	$\frac{D_0}{n} \cdot (n-2)$
:	**:**	**:**	**:**	**:**
r	$\frac{D_0}{n} \cdot \left[\left(n-r+1\right) \cdot i + 1\right]$	$(n-r+1) \cdot \frac{D_0}{n} \cdot i$	$\frac{D_0}{n}$	$\frac{D_0}{n} \cdot (n-r)$
r+1	$\frac{D_0}{n} \cdot \left[\left(n-r\right) \cdot i + 1\right]$	$(n-r) \cdot \frac{D_0}{n} \cdot i$	$\frac{D_0}{n}$	$\frac{D_0}{n} \cdot (n-r-1)$
:	**:**	**:**	:	**:**
n-1	$\frac{D_0}{n} \cdot \left(2 \cdot i + 1\right)$	$2 \cdot \frac{D_0}{n} \cdot i$	$\frac{D_0}{n}$	$\frac{D_0}{n}$
n	$\frac{D_0}{n} \cdot \left(i + 1\right)$	$\frac{D_0}{n} \cdot i$	$\frac{D_0}{n}$	**-**
CELKEM	$\mathbf{D_0 \cdot \left(n+1\right) \cdot \frac{i}{2} + 1}$	$\mathbf{(n+1) \cdot \frac{D_0}{2} \cdot i}$	$\mathbf{\frac{D_0}{n} \cdot n}$	**-**

(Zdroj: RADOVÁ, J, DVOŘÁK, P, MÁLEK, J. Finanční matematika pro každého : 7. aktualizované vydání. s. 141)

V posledním řádku tabulky jdou uvedny vzorce pomocí kterých určíme celkovou částku, kterou musíme zaplatit za celkovou dobu splatnosti. Tedy kolik zaplatíme celkem na splátkách, na úrocích a úmoru za dobu n .

Pokud jsi půjčíme částku 1 000 000 Kč na dobu 10 let při neměnné úrokové sazbě 8% p.a., tak pomocí vzorců z posleního řádku tabulky č. 3. zjistíme, že za dobu 10 let zaplatíme celkem 1 440 000Kč na splátkách, 440 000 přijde na úroky z úvěru a 1 000 000Kč na úmoru dluhu.

3 Metoda konstantních splátek

Umořování dluhu pomocí metody konstantních splátek se využívá především v hypotečním bankovnictví.

3.1 Stanovení konstantní splátky

Pro metodu konstantních splátek je charakteristická stále stejná výše splátek v daném období. Konstantní splátka se skládá ze splátky jistiny a úroku (Cipra, 1995, s. 80) a platí tedy:

$$a = M + u \,, \tag{3.1.1}$$

kde a je konstantní splátka = anuita;
M je úmor;
u je úrok.

Předpokládejme, že úročení je polhůtní a úrokové období je roční.

Vyjdeme-li z předpokladu, že diskontovaný součet všech anuit se musí rovnat počáteční hodnotě úvěru můžeme definovat vztah:

$$D_0 = a \cdot v + a \cdot v^2 + ... + a \cdot v^n , \tag{3.1.2}$$

kde D_0 je počáteční výše úvěru;
v je odúročitel (= diskontní faktor) ;
a je anuita.

Pravá strana rovnice je totožná s pravou stranou rovnice (1.2.4) a jedná se proto o geometrickou řadu s kvocientem q = v. Součet geometrické řady můžeme provést dle vzorce (1.2.6) a dostaneme:

$$D_0 = a \cdot \frac{1 - v^n}{i} , \tag{3.1.3}$$

kde D_0 je počáteční výše úvěru;
v je odúročitel (= diskontní faktor);
a je anuita;
i je roční úroková sazba.

Výraz $\frac{1 - v^n}{i}$ v rovnici (3.1.3) se nazývá ***polhůtní zásobitel*** a označuje se a_n^i .

Zásobitel je definován v kapitole 1 a slouží k výpočtu pravidelného důchodu. Při stejné D_0 a ostatních parametrech se však musí pravidelný konstantní důchod věřitele rovnat pravidelným konstantním splátkám dlužníka. Proto můžeme zásobitele využít i v případě úvěrů.

Z rovnice (3.1.3) můžeme určit ***anuitu***

$$a = D_0 \cdot \frac{i}{1 - v^n}, \qquad \textbf{(3.1.4)}$$

kde význam jednotlivých prvků je stejný jako u (3.1.3).

Výraz $\frac{i}{1 - v^n}$ v rovnici (3.1.4) se nazývá ***umořovatel***.

Umořovatel udává polhůtní anuitu nutnou k tomu, aby se zaplatil jednotkový úvěr za dané období $\boldsymbol{n}$ a při dané roční úrokové míře $\boldsymbol{i}$. Umořovatel je převrácenou hodnotou zásobitele.

3.2 Umořovací plán pro metodu s konstantními splátkami

Struktura umořovacího plánu je popsána v kapitole 1.5. Vyplývá z ní, že pro jeho sestavení musíme určit nejenom anuitu, ale také výši úmoru, úroku a zůstatku jistiny ke konci každého úrokovacího období.

Níže uvedené vztahy jsou odvozeny za předpokladu, že počáteční jistina D_0, je splatná po dobu $\boldsymbol{n}$ let při roční úrokové míře $\boldsymbol{i}$ a polhůtním úročení. Rok $\boldsymbol{r}$ je libovolný rok v intervalu 1 až n.

<u>Stanovení úroku</u>

<u>Rok1</u>

jedná se vlastně o jednoduché úročení a lze využít vztah (1.3.3), do kterého dosadíme za D_0 dle (3.1.3) a dostaneme:

$$U_1 = D_0 \cdot i = a \cdot \left(1 - v^n\right). \qquad \textbf{(3.1.5)}$$

<u>Rok r</u>

pro obecný rok $\boldsymbol{r}$ můžeme napsat obdobný vztah jako pro (3.1.5), tj.

$$U_r = D_{r-1} \cdot i = a \cdot \left(1 - v^{n-(r-1)}\right). \qquad \textbf{(3.1.6)}$$

<u>Stanovení úmoru</u>

<u>Rok 1</u>

s využitím (3.1.1) a (3.1.5) lze určit

$$M_1 = a - U_1 = a - a \cdot \left(1 - v^n\right) = a \cdot v^n. \tag{3.1.7}$$

Rok r

pro obecný rok ***r*** můžeme napsat obdobný vztah jako pro (3.1.7), tj.

$$M_r = a - U_r = a - a \cdot \left(1 - v^{n-(r-1)}\right) = a \cdot v^{n-(r-1)}. \tag{3.1.8}$$

Stanovení zůstatku jistiny

Rok 1

stav jistiny na konci prvního roku bude roven počátečnímu stavu jistiny $\boldsymbol{D_0}$ sníženého o zaplacený úmor $\boldsymbol{M_1}$, za který dosadíme dle (3.1.7)

$$D_1 = D_0 - M_1 = D_0 - a \cdot v^n. \tag{3.1.9}$$

Hodnotu $\boldsymbol{D_1}$ můžeme také definovat jako součet současných hodnot *n-1* splátek. Potom můžeme použít polhůtní zásobitel pro *n-1* období, tj.

$$D_1 = a \cdot a^i_{n-1}. \tag{3.1.10}$$

Rok r

pro obecný rok ***r*** můžeme napsat obdobný vztah jako pro (3.1.10), tj.

$$D_r = a \cdot a^i_{n-r}. \tag{3.1.11}$$

Dle výše uvedených vztahů můžeme vyplnit obecnou tabulku pro umořovací plán.

Tabulka č. 6. : Umořovací plán pro konstantní splátku

Období (r)	**Anuita (a)**	**Úrok (u_r)**	**Úmor (M_r)**	**Zůstatek (D_r)**
0				
1	a	$a \cdot \left(1-v^{n}\right)$	$a \cdot v^{n}$	$a \cdot a_{n-1}^{i}$
2	a	$a \cdot \left(1-v^{n-1}\right)$	$a \cdot v^{n-1}$	$a \cdot a_{n-2}^{i}$
:	:	:	:	:
r	a	$a \cdot \left(1-v^{n-(r-1)}\right)$	$a \cdot v^{n-(r-1)}$	$a \cdot a_{n-r}^{i}$
r+1	a	$a \cdot \left(1-v^{n-r}\right)$	$a \cdot v^{n-r}$	$a \cdot a_{n-(n+1)}^{i}$
:	:	:	:	:
n-1	a	$a \cdot \left(1-v^{2}\right)$	$a \cdot v^{2}$	$a \cdot a_{1}^{i}$
n	a	$a \cdot \left(1-v\ \right)$	$a \cdot v$	-
CELKEM	$\boldsymbol{n \cdot a}$	$\boldsymbol{n \cdot a - a \cdot a_{n}^{i}}$	$\boldsymbol{a \cdot a_{n}^{i} = D_0}$	**-**

(Zdroj: RADOVÁ, J, DVOŘÁK, P, MÁLEK, J. Finanční matematika pro každého : 7. aktualizované vydání., s. 132)

Protože jednotlivé úmory $\mathbf{M_r}$ tvoří geometrickou posloupnost s koeficientem q = v je možné výši úmoru v roce ***r+1*** spočítat vynásobením výše úmoru v roce ***r*** úročitelem (1+i). Z toho vyplývá, že při i >0 se výše úmoru v čase zvyšuje.

Tedy platí:

$$M_{r+1} = M_r \cdot \left(1+i\right), \tag{3.1.12}$$

kde M_r úmor v období r;

M_{r+1} je úmor v období r+1;

i roční úroková sazba (většinou nominální úroková sazba).

Minimální výše splátky

Ze vzorce (3.3.1) můžeme odvodit i minimální výši anuitní splátky. Pro funkci y = ln x platí, že x > 0. Potom musí platit, že

$$\left(1-\frac{D_0 \cdot i}{a}\right) > 0 \qquad \textbf{(3.1.13)}$$

a po úpravách dostaneme vztah pro stanovení minimální anuity ve tvaru

$$a > D_0 \cdot i. \qquad \textbf{(3.1.14)}$$

Anuita tedy musí být větší než je úrok z počáteční jistiny D_0 v prvním úrokovacím období.

3.3 Úročení předem daným počtem splátek při konstantní anuitě

V praxi často nastává případ, kdy se předem dohodne výše anuitní splátky. Obvykle se stanoví celé číslo (např. 1 000 Kč měsíčně), které budeme po určitou dobu pravidelně splácet (Bohanesová, 2006, s. 77).

V tomto případě známe počáteční výši úvěru $\boldsymbol{D_0}$, roční úrokovou míru $\boldsymbol{i}$ a výši anuitní splátky $\boldsymbol{a}$. Našim úkolem je stanovit dobu splatnosti $\boldsymbol{n}$,

Pro stanovení $\boldsymbol{n}$ vyjdeme ze vzorce (3.1.3), ze kterého logaritmováním dostaneme

$$n = \frac{\ln\left(1-\frac{D_0 \cdot i}{a}\right)}{\ln v}, \qquad \textbf{(3.3.1)}$$

Kde n je doba splatnosti;

D_0 je výše úvěru;

i je úroková sazba (roční);

a je anuita (předem stanovená);

v je diskontní faktor.

Pokud je doba splatnosti $\boldsymbol{n}$ celé číslo můžeme postupovat stejným způsobem jako při umořování konstantními splátkami, které je popsáno v předcházející kapitole.

Ve většině případů však doba splatnosti $\boldsymbol{n}$ není celé číslo. Potom stojíme před problémem jak vypočítat poslední splátku.

Postupujeme tak, že určíme nejbližší nižší přirozené číslo (tj. celé a kladné) $\boldsymbol{n_0}$, předcházející vypočtenému číslu $\boldsymbol{n}$. Úvěr potom splácíme $\boldsymbol{n_0}$ splátkami ve výši $\boldsymbol{a}$ a poslední splátkou ***b*** ve výši anuity $\boldsymbol{a_o}$, přičemž platí, že $a_0 < a$ (Radová, Dvořák, Málek, 2009, s. 136).

Za těchto předpokladů pro výpočet počáteční hodnoty úvěru platí vztah:

$$D_0 = a \cdot \frac{1 - v^{n_0}}{i} + b \cdot v^{n_0 + 1}. \qquad \textbf{(3.3.2)}$$

Po aritmetických úpravách získáme vzorec pro poslední splátku úvěru *b*:

$$b = \left(D_0 - a \cdot \frac{1 - v^{n_0}}{i} \right) \cdot \frac{1}{v^{n_0 + 1}} = \left(D_0 - a \cdot \frac{1 - v^{n_0}}{i} \right) \cdot (1 + i)^{n_0 + 1}, \qquad \textbf{(3.3.3)}$$

kde b je výše poslední splátky;

D_0 je výše dluhu;

a je anuita (konstantní);

v je diskontní faktor;

n_0 je doba splatnosti jako celé přirozené číslo;

i je roční úroková sazba .

Poslední splátka se stejně jako všechny ostatní anuitní splátky musí skládat z úmoru a úroku.

Stanovení úmoru poslední částky

nesplacená jistina má po n_0 – té splátce hodnotu ***b . v*** a poslední výše úmoru se tedy musí rovnat této hodnotě. Platí:

$$M_{n_0 + 1} = b \cdot v. \qquad \textbf{(3.3.4)}$$

Stanovení úroku z poslední splátky

poslední výše úroku se vypočte jako jednoduchý úrok z nesplacené jistiny po n_0 – té splátce, tj. z ***b . v*** (viz 3.3.4). Platí tedy:

$$u_{n_0 + 1} = b \cdot v \cdot i. \qquad \textbf{(3.3.5)}$$

Umořovací plán

Umořovací plán pro úročení předem daným počtem splátek je uveden v tabulce č. 7.

Tabulka č. 7. Umořovací plán pro předem daný počet anuitních splátek

Období (n)	Anuita (a)	Úrok (U_r)	Úmor (M_r)	Zůstatek dluhu
1	a	$a \cdot \left(1 - v^n\right)$	$a \cdot v^n$	
2	a	$a \cdot \left(1 - v^{n-1}\right)$	$a \cdot v^{n-1}$	$a \cdot a_{n-1}^i$
3	a	$a \cdot \left(1 - v^{n-2}\right)$	$a \cdot \left(1 - v^{n-2}\right)$	$a \cdot a_{n-2}^i$
:	:	:	:	:
n	a	$a \cdot \left(1 - v^2\right)$	$a \cdot v^2$	$a \cdot a_1^i$
n_0	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b \cdot v \cdot i}$	$\boldsymbol{b \cdot v}$	**-**

4 Porovnání metod

4.1 Zvolená metoda pro porovnání

Z důvodu porovnání obou metod jsem v Microsoft Excel vytvořila program, který mi umožňuje sestavit pro každou metodu splácení kompletní umořovací plán. Program je vytvořen tak, aby bylo možné libovolně měnit vstupní parametry, to je výši jistiny, dobu splatnosti v letech, počet splátek za rok a roční úrokovou míru p.a.
Program jsem nastavila tak, aby umožňoval použít až 40 splátkových období. Není ale problém vložením dalších řádků tabulky rozšířit počet splátkových období na libovolný vyšší počet.

Pro výpočet umořovacího plánu u metody konstantního úmoru jsem použila vzorce uvedené v tabulce č. 5. Pro metodu konstantní splátky jsem použila standardní funkce programu Excel, a to pro výpočet splátky funkci „Platba“ a pro výpočet úroku funkci „Platba.úrok“. Úmor je stanoven jako rozdíl mezi splátkou a úrokem. Ověřila jsem si, že tyto funkce dávají stejné výsledky jako vzorce uvedené v tabulce č. 6.

Výstup excelové tabulky je uveden v příloze č.1.

Pro lepší přehlednost jsem zvolila i grafickou formu porovnání. Pro grafy uvedené v následujících kapitolách je použit následující příklad:

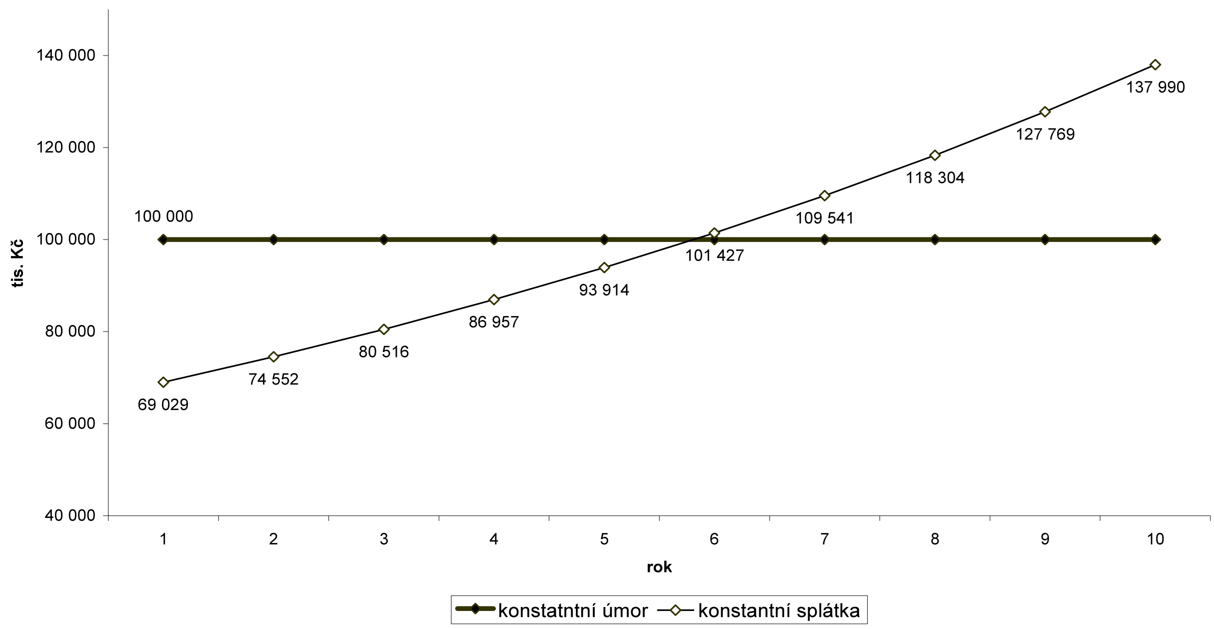
Máme půjčku ve výši 1 000 000 Kč, která má být umořena ročními splátkami během 10 let při úrokové míře 8% p.a., s následujícími vstupními parametry:

Jistina	1 000 000	Kč
Doba splatnosti	10	let
Počet splátek za rok	1	
Úroková míra	8%	p.a.

Umořovací plány pro obě metody jsou uvedeny v příloze č. 1. a příloze č. 2.

4.2 Porovnání úmorů

Graf č.1 - porovnání úmorů pro jednotlivé metody splácení



Pro obě metody platí, že součet úmorů za dobu splatnosti je stejný, tj. 1 000 000 Kč. Výše úmoru ovlivňuje hodnotu zůstatku jistiny a výši úroků – podrobněji viz následující kapitoly.

Metoda konstantního úmoru

z definice (viz vzorec 2.1.1.) vyplývá, že úmor je po celé období konstantní. V tomto konkrétním případě 100 000 Kč.

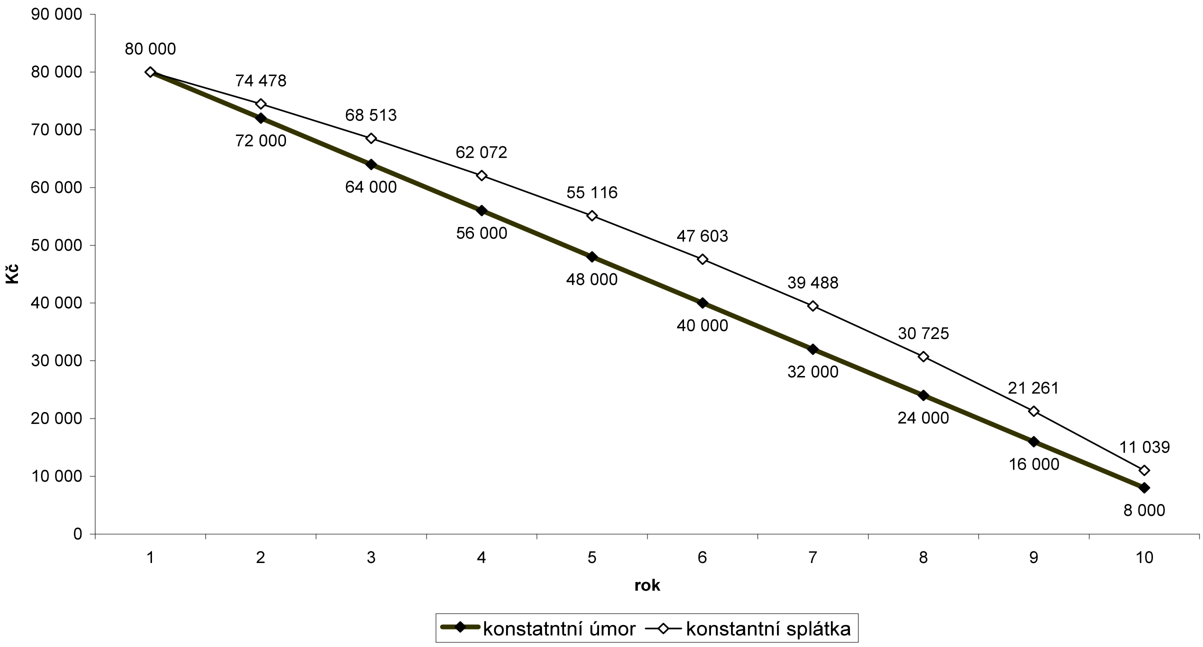
Metoda konstantní splátky

Z grafu je patrné, že se splátky postupně zvyšují, a to dle vztahu (3.1.12) o výši úročitele (1+i), tj. v našem případě o 1,08. V definovaném případě je první splátka ve srovnání se splátkou vypočtenou metodou konstantního úmoru nižší o 31%, poslední pak vyšší o 38%. Úmory se vyrovnávají v šestém splátkovém období.

Výpočet úmoru definuje vzorec 3.1.8. Jedinou proměnnou v tomto vzorci je v našem případě splátkové období ***r*** a jedná se tedy o exponenciální funkci.

4.3 Porovnání úroků

Graf č.2 - porovnání úroků pro jednotlivé metody splácení



Metoda konstantního úmoru

k výpočtu úroku použijeme vztah (2.1.4). Úrok k jednomu úmoru (tj. diference aritmetické řady) činí v našem případě 8 000 Kč a v každém dalším splátkovém období se úrok o tuto částku snižuje. Vzhledem k tomu, že v počátečních splátkových obdobích je úmor u této metody vyšší než u metody konstantní splátky, snižuje se rychleji zůstatek jistiny a úroky jsou proto nižší ve srovnání s metodou konstantní splátky.

Metoda konstantní splátky

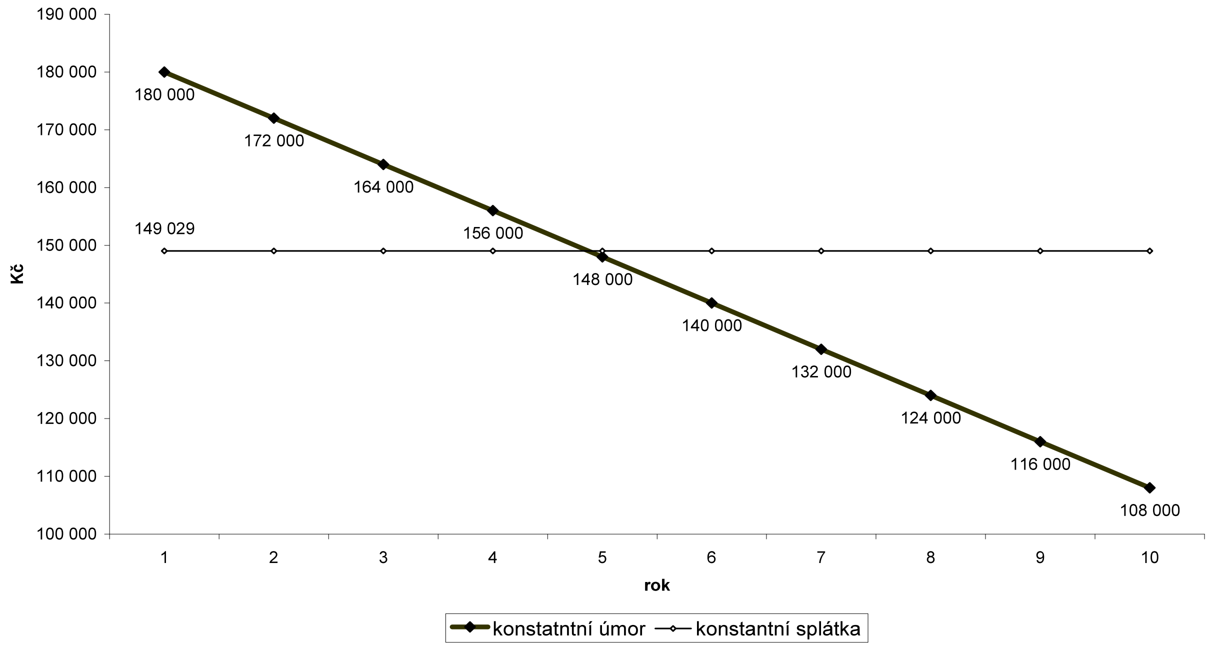
úrok je vypočten dle vzorce 3.1.6. Z grafu je patrné, že pouze v prvním splátkovém období jsou úroky stejné u obou metod splácení. V dalších letech je vždy vyšší úrok u metody konstantní splátky.

V uvedeném případě činí úroky za všechna splátková období celkem u metody konstantního úmoru 440 000 Kč. U metody konstantní splátky činí úroky 490 295 Kč a jsou tedy o 11,4% vyšší než u metody s konstantním úmorem.

Protože úroky jsou ve většině případů daňově uznatelné je třeba tuto skutečnost brát do úvahy při posuzování daňového efektu a jeho dopadu na reálné platby úroků. Zejména je to důležité v obdobích, kdy očekáváme změnu výše sazby daně z příjmu.

4.4 Porovnání splátek

Graf č.3 - porovnání splátek pro jednotlivé metody splácení



Metoda konstantního úmoru

splátka je součtem úmoru a úroku. Protože úmor je konstantní, snižují se splátky lineárně se stejnou diferencí jako úroky. Vzhledem k výrazně vyššímu úmoru u této metody splácení je v počátečních splátkových obdobích splátka výrazně vyšší. Výše splátek se vyrovná v pátém splátkovém období.

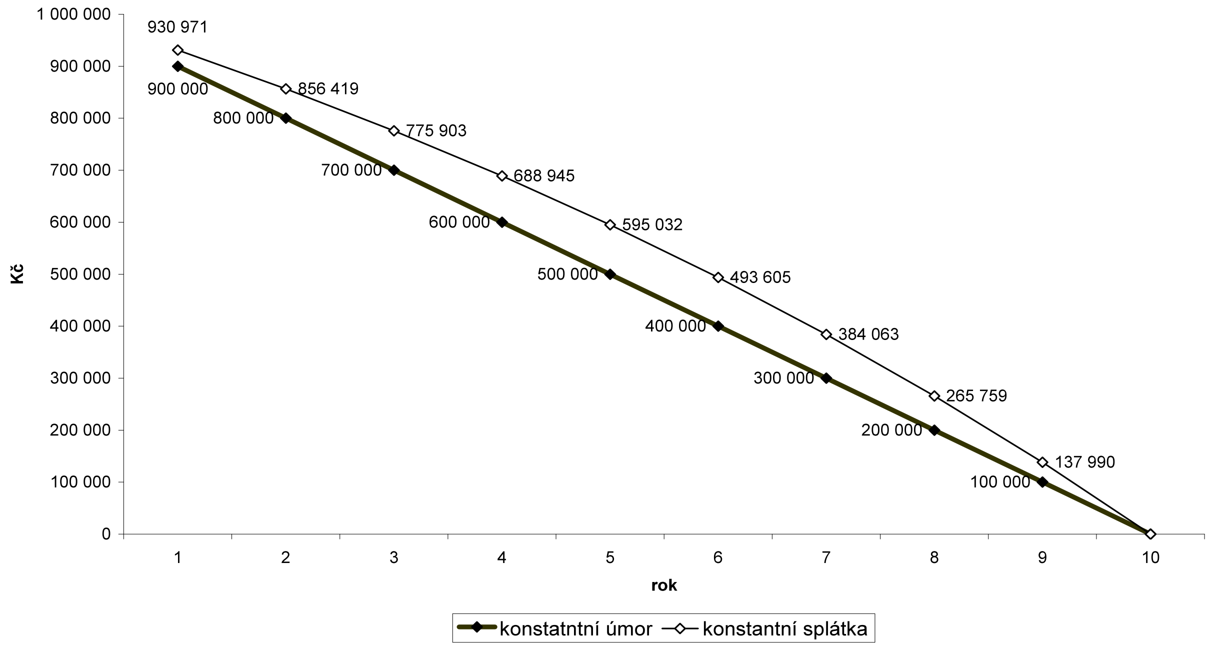
Metoda konstantní splátky

z definice vyplývá (viz vzorec 3.1.4.), že splátka je po celé období konstantní. V tomto konkrétním případě činí splátka po celou dobu splácení částku 149 029 Kč.

Protože součet úmorů za všechna splátková období je u obou metod stejný, je rozdíl celkových splátek dán rozdílem celkových úroků za všechna splátková období u obou metod, který činí 50 295 Kč. Vzhledem k tomu, že splátky celkem činí u metody konstantního úmoru 1 440 000 Kč a u metody konstantní splátky 1 490 295 Kč jsou celkové splátky u metody konstantních splátek vyšší o 3,5%.

4.5 Porovnání zůstatků jistiny

Graf č.4 - porovnání zůstatků pro jednotlivé metody splácení



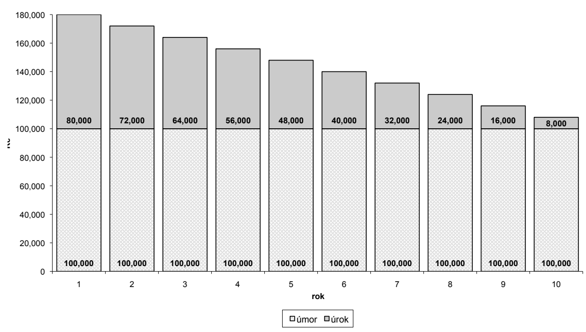
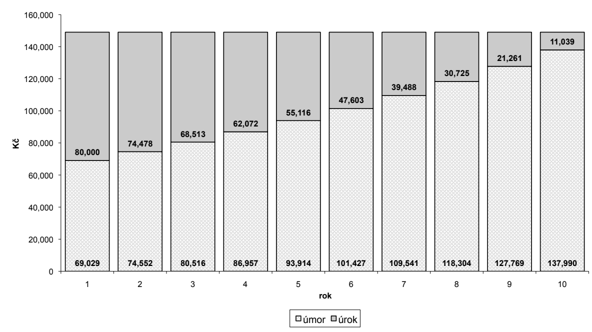
<u>Metoda konstantního úmoru</u>

Vzhledem k tomu, že úmor je konstantní snižuje se zůstatek jistiny lineárně, a to vždy o hodnotu úmoru.

<u>Metoda konstantní splátky</u>

Zůstatek jistiny je po celé období vyšší, což je dáno nižší výší splátek úmoru v počátečním období splatnosti (viz kapitola 4.2). V první polovině splatnosti se zvyšuje rozdíl oproti jistině vypočtené dle metody konstantního úmoru, maximální je tento rozdíl v polovině doby splatnosti, kdy v našem případě činí 19%.

4.6 Celkové porovnání

<table>
<tr><th>Metoda konstantního úmoru</th><th>Metoda konstantní splátky</th></tr>
<tr><td>Graf č.5 - Metoda konstantního úmoru
</td><td>Graf č.6 - Metoda konstantní splátky (149 029,49 Kč)
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Úmor (viz kapitola 4.2)</td></tr>
<tr><td>• Úmor je po celou dobu konstantní
• Součet úmorů je u obou metod stejný a rovná se počáteční jistině</td><td>• Výše úmoru se v jednotlivých splátkových obdobích pravidelně zvyšuje dle vztahu (3.1.12)
• Součet úmorů je u obou metod stejný a rovná se počáteční jistině</td></tr>
<tr><td colspan="2">Úrok (viz kapitola 4.3.)</td></tr>
<tr><td>• Úroky v jednotlivých úrokovacích obdobích lineárně klesají dle vztahu 2.1.5, tj. dle aritmetické řady s diferencí $\frac{D_0}{n} \cdot i$
• V prvním úrokovacím období jsou stejné jako u metody konstantní splátky
• V dalších úrokovacích obdobích jsou vždy nižší než u metody konstantní splátky</td><td>• Úroky jsou nelineární a snižují se dle vztahu 3.1.6
• V prvním úrokovacím období jsou stejné jako u metody konstantního úmoru
• S výjimkou prvního úrokovacího období jsou vždy vyšší než u metody konstantního úmoru
• V definovaném případě jsou celkové úroky za všechna úrokovací období vyšší o 11,4%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Splátka (viz kapitola 4.4.)</td></tr>
<tr><td>• Splátka v jednotlivých splátkových obdobích lineárně klesá a pokles je dán rozdílem úroků ve dvou po sobě jdoucích</td><td>• Splátka je po celou dobu konstantní</td></tr>
</table>

obdobích tj. $\frac{D_0}{n}$ • Celkový součet splátek je nižší o 3,5%	• Celkový počet splátek je vyšší o 3,5% • Z podnikatelského hlediska může být výhodou konstantní splátka a nižší splátky v počátečních obdobích.
Zůstatek jistiny (viz kapitola 4.5.)	
• Jistina klesá lineárně, a to o výši úmoru • Jistina klesá rychleji a po celé splátkové období je nižší než u metody konstantní splátky.	• Zůstatek jistiny není lineární • V první polovině splatnosti se zvyšuje rozdíl oproti jistině vypočtené dle metody konstantního úmoru a maximální je tento rozdíl v polovině doby splatnosti

4.7 Odklad splátek úvěru

Banky a jiní poskytovatelé úvěru občas inzerují možnost odkladu splácení úvěrů a tuto možnost prezentují jako jednu z výhod poskytovaného úvěru. Některé banky (např. Česká spořitelna, a.s.) umožňují odklad celé splátky, jiné banky (např. Komerční banka, a.s.) povolují pouze odklad splátky jistiny a trvají na splácení úroků.

Možnost odkladu splátek bývá někdy sjednána již ve smlouvě a obvykle je podmíněna vznikem nějaké mimořádné situace, například ztrátou zaměstnání nebo dlouhodobou pracovní neschopností. Podmínky odkladu musí vždy klient individuálně dohodnout s bankou (musí být sepsán dodatek smlouvy) a povolení odkladu je téměř vždy spojeno s mimořádným poplatkem, který například u hypoték dosahuje částky do 2 000 Kč (Boušová, 2006). Odklad splátek obvykle nebývá dlouhý – u hypoték nepřesahuje 3, maximálně však 6 splátek.

Vzhledem k nutnosti individuálního projednání je obtížné v nabídkách bank dohledat vliv případného odkladu splácení na vlastní výši splátek a na celkovou splacenou částku. Na webových stránkách bank se mi podařilo dohled tyto obecné (tj. bez uvedení dopadu na splátku) možnosti řešení:

- jednorázová úhrada;
- rozpuštění nesplacených splátek v budoucích splátkách;
- ponecháním původní výše splátky a prodloužením doby splatnosti.

V další části neuvažuji s jednorázovou úhradou a sestavila jsem splátkové kalendáře pro poslední dvě uvedené možnosti, a to samostatně pro odložení splácení úmoru a pro odložení celé splátky.

Pro vlastní výpočet jsem použila stejný příklad jako v kapitole 4.1. a dále předpokládám, že úvěr je splácen *metodou konstantní splátky* a že odloženy budou dvě splátky, konkrétně pátá a šestá splátka. Neuvažuji žádné mimořádné poplatky spojené s odkladem splácení. Úroková sazba se při odkladu splácení nemění.

4.7.1 Odložení splácení úmoru

V tomto případě banka umožní pouze odklad splácení úmoru, ale trvá na splácení úroků. Tato situace je poměrně jednoduchá. V době přerušení splátek stanovím nesplacenou jistinu a z ní vypočtu dle pravidel pro jednoduché úročení (viz vzorec 1.3.2) úrok. Po ukončení odkladu pokračujeme ve splácení původní splátky a prodloužíme dobu splacení o počet odložených splátek.

Splátkový kalendář bude následující:

- První čtyři splátky budou stejné jako v kapitole 4.4 – tj. každá ve výši 149 029 Kč. Stejná bude i struktura splátky, tj. úmor a úrok.
- Po splacení čtvrté splátky bude nesplacená jistina ve výši 688 945 Kč. Z této částky vypočtu dle vzorce 1.3.2 úrok připadající na odloženou splátku. V tomto případě tedy 688 945 · 8% p.a, tj. 55 116 Kč.
- V pátém a šestém splátkovém období uhradím pouze výše vypočtený úrok (tj 2 · 55 116 Kč).
- Počínaje sedmým splátkovým obdobím splácím opět původní splátku ve výši 149 029 Kč.
- Poslední splátku uhradím ve dvanáctém splátkovém období.

Oproti původnímu splátkovému kalendáři zaplatím v tomto případě více o 110 231 Kč (= součet úroků zaplacených v pátém a šestém splátkovém období), což je o 7,4% více.

Umořovací plán pro tento případ je uveden v příloze č. 3.

4.7.2 Odložení celé splátky

V tomto případě bude situace složitější. Vzhledem k tomu, že neplatím ani úroky, budu muset tyto úroky uhradit v budoucnosti a to:

- jejich jednorázovou splátkou v dohodnutém termínu
- jejich rozpuštěním do budoucích splátek.

V dalším uvažuji pouze možnost rozpuštění do budoucích splátek.

Přitom budoucí splátku mohu vypočítat:

a. v případě, že budu chtít dodržet původní dobu splatnosti jako anuitní splátku ze zůstatku nesplacené jistiny po splacení poslední splátky před odložením zvýšenou o nezaplacené úroky.

b. v případě, že budu chtít dodržet původní výši splátky výpočtem počtu splátek, které potřebuji k úhradě zůstatku nesplacené jistiny po splacení poslední splátky zvýšené o nezaplacené úroky (viz kapitola 3.3).

a) <u>Splátkový kalendář bude následující</u>:

- První čtyři splátky budou stejné jako v kapitole 4.4 – tj. každá ve výši 149 029 Kč. Stejná bude i struktura splátky, tj. úmor a úrok.
- Po splacení čtvrté splátky bude nesplacená jistina ve výši 688 945 Kč. Z této částky vypočtu dle vzorce 1.3.2 úrok připadající na odloženou splátku, nebudu jej platit, ale přičtu jej k jistině.
- Na počátku sedmého splátkového období bude nesplacená jistina zvýšená o nesplacené úroky v době odkladu 688 945 + 2 · 55 116 = 799 177 Kč.
- Pro dodržení původní doby splatnosti mi zbývají čtyři splátky. Dle vzorce 3.1.4 určím anuitní splátku pro D_0 = 799 177 Kč, n = 4 a i = 8% p.a., tj. 241 288 Kč.
- Poslední splátku uhradím v desátém splátkovém období.

Ve srovnání s původním splátkovým kalendářem zaplatím v tomto případě více o 70 975 Kč, což je o 4,8% více. Celkové úroky jsou v této variantě oproti původnímu splátkovému kalendáři nižší o 39 256 Kč, což je dáno zahrnutím nesplacených úroků do jistiny.

Umořovací plán pro odložení splátky při dodržení původní doby splatnosti je uveden v příloze č. 4.

b) Splátkový kalendář bude následující:

- První čtyři splátky budou stejné jako v kapitole 4.4 – tj. každá ve výši 149 029 Kč. Stejná bude i struktura splátky, tj. úmor a úrok.
- Po splacení čtvrté splátky bude nesplacená jistina ve výši 688 945 Kč. Z této částky vypočtu dle vzorce 1.3.2 úrok připadající na odloženou splátku, nebudu jej platit, ale přičtu jej k jistině.
- Na počátku sedmého splátkového období bude nesplacená jistina zvýšená o nesplacené úroky v době odkladu 688 945 + 2 · 55 116 = 799 177 Kč.
- Při ponechání původní výše splátky stanovím počet splátek a dle kapitoly 3.3, resp. vzorců vzorce 3.3.1 a 3.3.3. Bude nutné splatit sedm splátek v původní výši 149 029 Kč a poslední osmou splátku ve výši b = 43 079 Kč.
- Poslední splátku uhradím ve čtrnáctém splátkovém období.

Ve srovnání s původním splátkovým kalendářem zaplatím v tomto případě více o 192 108 Kč, což je o 12,9% více.

Umořovací plán pro odložení celé splátky podle variaty B je uveden v příloze č. 5.

Závěr

Ve své práci jsem porovnala metody splácení konstantním úmorem a konstantní splátkou. Odvodila jsem vztahy pro výpočet jednotlivých ukazatelů dluhu (tj. splátky, úroku, úmoru a zůstatku jistiny) a sestavila obecný splátkový kalendář pro obě metody splácení.

Hlavním závěrem porovnání metod je, že výše celkových úroků a následně splátek je vyšší u metody konstantní splátky.

Porovnala jsem obě metody i grafickou formou a vysvětlila odlišnosti ve vývoji jednotlivých ukazatelů dluhu v průběhu splátkového období. I když je moje práce zaměřena na „matematické" porovnání metod, snažila jsem se v závěru poukázat i na skutečnosti, které je vhodné zvažovat při rozhodování o způsobu splácení úvěrů, a to z pohledu daňových nebo podnikatelských. Z tohoto pohledu poskytuje metoda konstantní splátky určité výhody, ke kterým řadím samotnou konstantní výši splátky a především její nižší výši v počátečním období splácení a dále odlišný průběh úroků a následně daně z příjmu.

Vlastní rozhodnutí o volbě způsobu splácení je tedy nutné optimalizovat s ohledem na předmět financování, na očekávaný průběh příjmů a vývoj sazby daně z příjmu. Základem je však samozřejmě podrobná znalost fungování obou metod.

Věřím, že moje práce umožní čtenáři uvědomit si rozdíly obou metod a využít je úspěšně v praxi.

Finanční matematice bych se chtěla věnovat i v budoucnosti, protože bych ráda pracovala v některé finanční instituci nebo ve finančním útvaru podniku. Proto považuji za velmi přínosné, že jsem se v touto problematikou mohla zabývat ve své práci.

Seznam použité literatury

[1] RADOVÁ, Jarmila; DVOŘÁK, Petr; MÁLEK, Jiří. Finanční matematika pro každého : 7. aktualizované vydání. Praha : Grada Publishing, 2009. 296 s. ISBN 978-80-247-3291-6.

[2] CIPRA, Tomáš. Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou. 1. Praha : Edice HZ, 1995. 320 s. ISBN 80-901918-0-0.

[3] MACHÁČEK, Otakar. Finanční a pojistná matematika : 2. doplněné vydání. Praha : Prospektrum, 2001. 216 s. ISBN 80-7175-104-9.

[4] SEKERKA, J; JINDROVÁ, Petr. Finanční a pojistná matematika. 1. Pardubice : Univerzita Pardubice, 2005. 174 s. ISBN 80-7194-810-1.

[5] CIPRA, Tomáš. Finanční a pojistné vzorce. Praha : Grada Publishing, 2006 . 376 s. ISBN 80-247-1633-X.

[6] BARTSCH, Hans-Jochen. Matematické vzorce. Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1963. 577 s. ISBN 04-010-63.

[7] SAMUELSON, P. A.; NORDHAUS, W. D. Ekonomie. 1. Praha : Nakladatelství Svoboda, 1991. 1011 s. ISBN 80-205-0192-4.

[8] BOHANESOVÁ, Eva. Finanční matematika I [online]. Olomouc : Univerzita Palackého, 2006 [cit. 2011-03-22]. Dostupné z WWW: <http://www.upol.cz/fileadmin/user_upload/knihovna/Skripta_FF/finan.pdf>. ISBN 80-244-1294-2.

[9] BORKOVEC, Petr ; PTÁČEK, Roman; TOMAN, Petr. ZÁKLADY FINANČNÍ MATEMATIKY [online]. Znojmo : Hh, 2001 [cit. 2011-03-22]. Dostupné z WWW: <http://svse.sweb.cz/materialy/skripta_fm.pdf>.

[10] BOUŠOVÁ, Kateřina. Penize.cz [online]. 2006 [cit. 2011-04-10]. Jak odložit splátku úvěru?. Dostupné z WWW: <http://www.penize.cz/17887-jak-odlozit-splatku-uveru>.

Seznam použitých symbolů

a	je anuita = konstantní splátka
a_1	je první člen řady
a_n^i	je polhůtní zásobitel
a_n	je poslední, *n*-tý člen řady
b	je výše poslední splátky
D_0	je počáteční jistina (=úvěr)
D_n	je zůstatek jistiny na konci období n
d	je diference aritmetické řady
i	je roční úroková míra
i_c	je čistá nominální úroková sazba
i_{dp}	je sazba daně z příjmu
i_{ef}	je efektivní úroková míra
i_h	je hrubá nominální úroková sazba
i_i	je míra inflace
i_n	je nominální úroková míra
i_r	je reálná úroková míra
K_0	je současná hodnota kapitálu
K_n	je budoucího hodnota kapitálu
n	je u řad počet členů
	v ostatních případech počet období / let
n_0	je doba splatnosti jako celé přirozené číslo
M_n	úmor v roce n
m	je počet úrokových období (kratším než rok)
p	je roční úroková sazba uvedená v procentech
q	je kvocient geometrické řady
r	je období v intervalu *1* až *n*
t	je doba splatnosti kapitálu ve dnech
u	je úrok
v	je diskontní faktor

Seznam tabulek

Seznam obrázků

Seznam grafů

Seznam příloh

Přílohy

Příloha č. 1. - Umořovací plán pro metodu konstantního úmoru

Období	Počáteční zůstatek (Kč)	Splátka (Kč)	Úrok (Kč)	Úmor (Kč)	Konečný zůstatek (Kč)
1	1 000 000	180 000	80 000	100 000	900 000
2	900 000	172 000	72 000	100 000	800 000
3	800 000	164 000	64 000	100 000	700 000
4	700 000	156 000	56 000	100 000	600 000
5	600 000	148 000	48 000	100 000	500 000
6	500 000	140 000	40 000	100 000	400 000
7	400 000	132 000	32 000	100 000	300 000
8	300 000	124 000	24 000	100 000	200 000
9	200 000	116 000	16 000	100 000	100 000
10	100 000	108 000	8 000	100 000	0
Celkem	x	1 440 000	440 000	1 000 000	x

Příloha č. 2. - Umořovací plán pro metodu konstantních splátek

Období	PZ (Kč)	Splátka (Kč)	Úrok (Kč)	Úmor (Kč)	KZ (Kč)
1	1 000 000	149 029.49	80 000.00	69 029.49	930 970.51
2	930 970.51	149 029.49	74 477.64	74 551.85	856 418.66
3	856 418.66	149 029.49	68 513.49	80 516.00	775 902.67
4	775 902.67	149 029.49	62 072.21	86 957.28	688 945.39
5	688 945.39	149 029.49	55 115.63	93 913.86	595 031.54
6	595 031.54	149 029.49	47 602.52	101 426.97	493 604.57
7	493 604.57	149 029.49	39 488.37	109 541.12	384 063.45
8	384 063.45	149 029.49	30 725.08	118 304.41	265 759.03
9	265 759.03	149 029.49	21 260.72	127 768.77	137 990.27
10	137 990.27	149 029.49	11 039.22	137 990.27	0.00
Celkem	x	1 490 294.89	490 294.89	1 000 000	x

Příloha č. 3. - Odložené splátky - odložení splácení úmoru

Období	PZ (Kč)	Splátka (Kč)	Úrok (Kč)	Úmor (Kč)	KZ (Kč)
1	1 000 000.00	149 029.49	80 000.00	69 029.49	930 970.51
2	930 970.51	149 029.49	74 477.64	74 551.85	856 418.66
3	856 418.66	149 029.49	68 513.49	80 516.00	775 902.67
4	775 902.67	149 029.49	62 072.21	86 957.28	688 945.39
5	688 945.39	55 115.63	55 115.63	0.00	688 945.39
6	688 945.39	55 115.63	55 115.63	0.00	688 945.39
7	688 945.39	149 029.49	55 115.63	93 913.86	595 031.54
8	595 031.54	149 029.49	47 602.52	101 426.97	493 604.57
9	493 604.57	149 029.49	39 488.37	109 541.12	384 063.45
10	384 063.45	149 029.49	30 725.08	118 304.41	265 759.03
11	265 759.03	149 029.49	21 260.72	127 768.77	137 990.27
12	137 990.27	149 029.49	11 039.22	137 990.27	0.00
Celkem	x	1 600 526.15	600 526.15	1 000 000.00	x

Příloha č. 4. - Odložené splátky - odložení celé splátky (varianta A)

Období	PZ (Kč)	Splátka (Kč)	Úrok (Kč)	Úmor (Kč)	KZ (Kč)
1	1 000 000	149 029.49	80 000.00	69 029.49	930 970.51
2	930 970.51	149 029.49	74 477.64	74 551.85	856 418.66
3	856 418.66	149 029.49	68 513.49	80 516.00	775 902.67
4	775 902.67	149 029.49	62 072.21	86 957.28	688 945.39
5	688 945.39	0.00	0.00	0.00	744 061.02
6	744 061.02	0.00	0.00	0.00	799 176.66
7	799 176.66	241 288.06	63 934.13	177 353.93	621 822.73
8	621 822.73	241 288.06	49 745.82	191 542.24	430 280.49
9	430 280.49	241 288.06	34 422.44	206 865.62	223 414.87
10	223 414.87	241 288.06	17 873.19	223 414.87	0.00
Celkem	x	1 561 270.19	451 038.93	1 110 231.26	x

Příloha č. 5. - Odložené splátky - odložení celé splátky (varianta B)

Období	PZ (Kč)	Splátka (Kč)	Úrok (Kč)	Úmor (Kč)	KZ (Kč)
1	1 000 000	149 029.49	80,000.00	69 029.49	930 970.51
2	930 970.51	149 029.49	74,477.64	74 551.85	856 418.66
3	856 418.66	149 029.49	68,513.49	80 516.00	775 902.67
4	775 902.67	149 029.49	62,072.21	86 957.28	688 945.39
5	688 945.39	0.00	0.00	0.00	744 061.02
6	744 061.02	0.00	0.00	0.00	799 176.66
7	799 176.66	149 029.49	63 934.13	85 095.36	714 081.30
8	714 081.30	149 029.49	57 126.50	91 902.98	622 178.31
9	622 178.31	149 029.49	49 774.27	99 255.22	522 923.09
10	522 923.09	149 029.49	41 833.85	107 195.64	415 727.45
11	415 727.45	149 029.49	33 258.20	115 771.29	299 956.16
12	299 956.16	149,029.49	23 996.49	125 033.00	174 923.16
13	174 923.16	149,029.49	13 993.85	135 035.64	39 887.52
14	39 887.52	43,078.53	3 191.00	39 887.52	0.00
Celkem	x	1,682,402.90	572 171.64	1 110 231.26	x