

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní

Modelování úmrtnosti pro potřeby důchodového pojištění

Bc. Jana Mudrochová

Diplomová práce

2010

Univerzita Pardubice
Fakulta ekonomicko-správní
Ústav systémového inženýrství a informatiky
Akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Jana MUDROCHOVÁ**
Studijní program: **N6209 Systémové inženýrství a informatika**
Studijní obor: **Pojistné inženýrství**

Název tématu: **Modelování úmrtnosti pro potřeby důchodového pojištění**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Stárnutí obyvatelstva a jeho vliv na ekonomiku
Modelování úmrtnosti - délka života, míry úmrtnosti, intenzita úmrtnosti, zákony úmrtnosti.
Data pro výpočet charakteristik úmrtnosti. Úmrtnostní tabulky.
Konstrukce úmrtnostní tabulky.
Graduace (vyhlazování) úmrtnostních tabulek. Metody graduace.
Problémy konstrukce úmrtnostní tabulky pro vysoké věky.
Vyrovnání Gompertzovou-Makehamovou funkcí.
Graduace pomocí standardních tabulek.
Ukázka popsaných metod při využití tabulkového procesoru Excel a statistického programového balíku STATGRAPHICS Centurion XV.

Rozsah grafických prací:

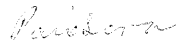
Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:


- [1] CIPRA, T.: Pojistná matematika - teorie a praxe. Praha: EKOPRESS, Vydání II, 2006.
- [2] FIALA, T.: Výpočty aktuárské demografie v tabulkovém procesoru. Praha: Vysoká škola ekonomická, 2005.
- [3] KOSCHIN, F.: Aktuárská demografie. Vysoká škola ekonomická v Praze, 2002.
- [4] SEKERKA, B. Matematické a statistické metody ve financování, cených papírech a pojišťovnictví. Praha: Profess Consulting, 2002
- [5] BENJAMIN, B. - POLLARD, S. H.: The Analysis of Mortality and other actuarial statistics. Institute of Actuaries, Scotland, London 1993
- [6] PACÁKOVÁ, V. - SIVAŠOVÁ, D.: Graduácia mier úmrtnosti v životných poisťovniach použitím štandardných tabuliek. Slovenská štatistika a demografia, 16. ročník, 1/2006.
- [7] SIVAŠOVÁ, D.: Aktuárska demografia v prostredí konkurenčného poistného trhu. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2008.

Vedoucí diplomové práce:

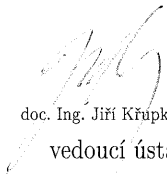

prof. RNDr. Viera Pacáková, Ph.D.
Ústav matematiky

Datum zadání diplomové práce: 5. října 2009

Termín odevzdání diplomové práce: 30. dubna 2010


doc. Ing. Renáta Myšková, Ph.D.
děkanka

L.S.


doc. Ing. Jiří Krúpka, Ph.D.
vedoucí ústavu

V Pardubicích dne 5. října 2009

SOUHRN

Tato diplomová práce nazvaná „Modelování úmrtnosti pro potřeby důchodového pojištění“ se zabývá stárnutím obyvatelstva, modelováním úmrtnosti, konstrukcí úmrtnostních tabulek a graduací těchto tabulek. Práce poskytuje přehled důležitých pojmů z oblasti úmrtnostních tabulek a metod graduace. Dále je v této práci cílem ukázat popsání metod graduace prostřednictvím tabulkového procesoru Excel a statistického programového balíku STATGRAPHICS Centurion XV.

KLÍČOVÁ SLOVA

modelování úmrtnosti, úmrtnostní tabulky, graduace úmrtnostních tabulek, Gompertz – Makeham, STATGRAPHICS Centurion XV.

ABSTRACT

This thesis called: „Modeling of mortality for Pension Insurance“ is aimed on ageing of population, modeling of mortality, structure of mortality (or life) tables and graduation of life tables. My aim is to provide overview of important notions from the area of mortality tables and methods of graduation. The thesis also describes using of graduation methods which are do in Excel and STATGRAPHICS Centurion XV.

KEYWORDS

modeling of mortality, mortality tables, graduation of mortality tables, Gompertz – Makeham, STATGRAPHICS Centurion XV.

Prohlašuji:

Tuto práci jsem vypracovala samostatně. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Pardubice má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst.1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Pardubice oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Pardubice.

V Pardubicích dne 21. 4. 2010

Jana Mudrochová

Poděkování:

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucí práce prof. RNDr. Vieri Pacákové, Ph.D. za odbornou pomoc při psaní diplomové práce, mojí rodině za podporu.

OBSAH

1	ÚVOD	10
2	STÁRNUTÍ OBYVATELSTVA A JEHO VLIV NA EKONOMIKU	12
2.1	NEPRAVIDELNOSTI VĚKOVÉ STRUKTURY	13
2.2	INDIKÁTORY STÁRNUTÍ A DEFINICE HRANIC VĚKOVÝCH SKUPIN	14
2.3	DOSAVADNÍ VÝVOJ STÁRNUTÍ V ČESKÉ REPUBLICE (ČR)	14
2.4	PROGNÓZA DEMOGRAFICKÉHO STÁRNUTÍ V ČR DO ROKU 2050	16
2.5	PROBLÉMY STÁRNOUCÍ POPULACE	18
2.6	PŘÍJMY ZÁKLADNÍHO DŮCHODOVÉHO POJIŠTĚNÍ	19
2.7	VÝDAJE ZÁKLADNÍHO DŮCHODOVÉHO POJIŠTĚNÍ	20
3	MODELOVÁNÍ ÚMRTNOSTI	23
3.1	ÚMRTNOST (MORTALITA)	24
3.2	UKAZATELE ÚMRTNOSTI	25
3.3	UKAZATELE DÉLKY ŽIVOTA	27
3.4	ZÁKONY ÚMRTNOSTI	29
3.4.1	KONSTANTNÍ MÍRA ÚMRTNOSTI	29
3.4.2	MOIVRŮV ZÁKON ÚMRTNOSTI	29
3.4.3	GOMPERTZŮV ZÁKON ÚMRTNOSTI	30
3.4.4	MAKEHAMŮV ZÁKON ÚMRTNOSTI	30
3.4.5	WEIBULLŮV ZÁKON	30
4	ÚMRTNOSTNÍ TABULKY A JEJICH KONSTRUKCE	31
4.1	DATA PRO VÝPOČET CHARAKTERISTIK ÚMRTNOSTI	32
4.1.1	ZDROJE DAT PRO ČR, SR A PRO OSTATNÍ ZEMĚ EU	32
4.2	KONSTRUKCE ÚMRTNOSTNÍCH TABULEK	33
5	GRADUACE ÚMRTNOSTNÍCH TABULEK	37
5.1	OVĚŘOVÁNÍ PŘIJATELNOSTI GRADUACE	38
5.1.1	OVĚŘOVÁNÍ HLADKOSTI GRADUOVANÝCH ÚDAJŮ	39
5.1.2	TESTOVÁNÍ PŘESNOSTI GRADUOVANÝCH ÚDAJŮ.....	41

5.1.3	ZNAMÉNKOVÝ TEST	45
5.1.4	TEST KUMULATIVNÍCH ODCHYLEK	46
5.1.5	TEST ZMĚNY ZNAMÉNEK	46
5.1.6	STEVENSŮV TEST SESKUPENÍ ZNAMÉNEK	47
6	METODY GRADUACE A JEJICH APLIKACE.....	49
6.1	GRAFICKÁ METODA GRADUACE	49
6.2	ANALYTICKÉ METODY GRADUACE	50
6.2.1	METODA MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI.....	51
6.2.2	METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ	51
6.3	GRADUACE POUŽITÍM SPLÍNOVÉ METODY.....	52
6.4	GRADUACE POMOCÍ STANDARDNÍCH TABULEK.....	52
6.5	NEPARAMETRICKÉ METODY GRADUACE	53
6.5.1	VYROVNÁNÍ JEDNODUCHÝMI KLOUZAVÝMI PRŮMĚRY	54
6.5.2	WITTSTEINOVA METODA.....	57
6.5.3	SPENSEROVA METODA 15 BODOVÁ.....	57
6.5.4	SPENSEROVA METODA 21 BODOVÁ.....	59
6.5.5	HENDERSONOVA METODA.....	60
6.5.6	SCHÄRTLINGOVA 9 BODOVÁ METODA	61
7	KONSTRUKCE ÚMRTNOSTNÍ TABULKY PRO VYSOKÉ VĚKY	62
7.1	VYROVNÁNÍ VYŠŠÍCH VĚKŮ POMOCÍ GOMPERTZ-MAKEHAMOVY FUNKCE	63
7.2	POČÁTEČNÍ ODHAD PARAMETRŮ G-M FUNKCE	64
8	ZÁVĚR.....	66
9	POUŽITÁ LITERATURA	68

SEZNAM OBRÁZKŮ

OBRÁZEK 1 - VĚKOVÁ PYRAMIDA [20]	12
OBRÁZEK 2 - VÝVOJ POMĚRU DŮCHODCŮ A PLÁTCŮ POJISTNÉHO [25]	21
OBRÁZEK 3 - VÝVOJ SALDA DŮCHODOVÉHO SYSTÉMU [25]	22
OBRÁZEK 4 - SPECIFICKÁ MÍRA ÚMRTNOSTI m_x , MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ]	26
OBRÁZEK 5 - SPECIFICKÁ MÍRA ÚMRTNOSTI m_x , MUŽI, SR 2006, STATGRAPHICS CENTURION XV [VLASTNÍ]....	26
OBRÁZEK 6 -UKÁZKA ÚMRTNOSTNÍ TABULKY, MUŽI, ČR 2003 [8].....	31
OBRÁZEK 7 - UKÁZKA HRUBÝCH POZOROVÁNÍ [14]	38
OBRÁZEK 8 - STŘEDNÍ HODNOTA A ODCHYLKA PRO Z_x , STATGRAPHICS CENTURION XV [VLASTNÍ]	43
OBRÁZEK 9 - HISTOGRAM ČETNOSTI PRO Z_x , STATGRAPHICS CENTURION XV [VLASTNÍ].....	43
OBRÁZEK 10 - VÝSLEDEK KOLMOGOROVA-SMIRNOVA TESTU, STATGRAPHICS CENTURION XV [VLASTNÍ]	43
OBRÁZEK 11 - χ^2 - TEST, STATGRAPHICS CENTURION XV [VLASTNÍ]	44
OBRÁZEK 12 - ZNAMÉNKOVÝ TEST PRO OVĚŘENÍ BINOMICKÉHO ROZDĚLENÍ, STATGRAPHICS CENTURION XV [VLASTNÍ].....	46
OBRÁZEK 13 - PROSTÝ KLOUZAVÝ PRŮMĚR DÉLKY 3, MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ]	54
OBRÁZEK 14 - PROSTÝ KLOUZAVÝ PRŮMĚR DÉLKY 3, MUŽI, SR 2006, STATGRAPHICS CENTURION XV [VLASTNÍ].....	55
OBRÁZEK 15 –VÁŽENÝ KLOUZAVÝ PRŮMĚR PRO 9 HODNOT, MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ]	56
OBRÁZEK 16 - VÁŽENÝ KLOUZAVÝ PRŮMĚR PRO 9 HODNOT, MUŽI, SR 2006, STATGRAPHICS CENTURION XV [VLASTNÍ].....	56
OBRÁZEK 17 - WITTSTEINOVA METODA, MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ]	57
OBRÁZEK 18 - SPENSEROVA METODA (15 BODOVÁ), MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ]	58
OBRÁZEK 19 - SPENSEROVA METODA (15 BODOVÁ), MUŽI, SR 2006, STATGRAPHICS CENTURION XV [VLASTNÍ]	58
OBRÁZEK 20 - SPENSEROVA METODA (21 BODOVÁ), MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ].....	59
OBRÁZEK 21 - SPENSEROVA METODA (21 BODOVÁ), MUŽI, SR 2006, STATGRAPHICS CENTURION XV [VLASTNÍ]	59
OBRÁZEK 22 - HENDERSONOVA METODA, MUŽI, SR 2006, STATGRAPHICS CENTURION XV [VLASTNÍ].....	61
OBRÁZEK 23 – GOMPERTZ-MAKEHAMOVA METODA, MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ].....	65

SEZNAM TABULEK

TABULKA 1-ROČNÍKY NAROZENÍ STARŠÍCH VĚKOVÝCH SKUPIN LETECH 2000, 2015, 2030, 2050 [22]	16
TABULKA 2 –PŘEDPOKLADY VÝVOJE PLODNOSTI, ÚMRTNOSTI A MIGRACE [21].....	17
TABULKA 3 - PRŮMĚRNÝ STAROBNÍ DŮCHOD V KČ V LETECH 1993-2009 [VLASTNÍ]	20
TABULKA 4 - VÝDAJE NA STAROBNÍ DŮCHODY V LETECH 1993 – 2009 [VLASTNÍ]	22
TABULKA 5 - STŘEDNÍ DÉLKA ŽIVOTA MUŽŮ V DŮCHODOVÉM VĚKU (VĚK NAD 65 LET) [23]	27
TABULKA 6 - UKÁZKA PRAVDĚPODOBNOSTI ÚMRTÍ, MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ]	34
TABULKA 7 - UKÁZKA PRAVDĚPODOBNOSTI DOŽITÍ, MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ]	34
TABULKA 8 - UKÁZKA POČTU ZEMŘELÝCH OSOB, MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ]	35
TABULKA 9 - UKÁZKA POČTU PROŽITÝCH LET, MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ].....	35
TABULKA 10 - UKÁZKA POČTU ZBYLÝCH LET, MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ]	35
TABULKA 11 – STŘEDNÍ DÉLKA ŽIVOTA, MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ]	36
TABULKA 12 - GRADUACE POMOCÍ FUNKCE KLOUZAVÝCH PRŮMĚRŮ PRO 3 HODNOTY, MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ].....	40
TABULKA 13 - VÝSLEDKY JEDNOTLIVÝCH FUNKCÍ GRADUACÍ	40
TABULKA 14 - UKÁZKA TESTOVÁNÍ PŘESNOSTI GRADUOVANÝCH ÚDAJŮ, MUŽI, SR 2006, MS EXCEL [VLASTNÍ]...	42
TABULKA 15 – HODNOTY ZNAMÉNKOVÉHO TESTU [VLASTNÍ].....	45
TABULKA 16 - HODNOTY STEVENSONOVA TESTU [VLASTNÍ]	48

1 Úvod

Předkládaná diplomová práce se zabývá modelováním úmrtnosti pro potřeby důchodového pojištění z pohledu pojišťovny.

Stárnutí obyvatelstva a jeho vliv na ekonomiku daného státu je v poslední době jedno z nejdiskutovanějších témat. Realizace základního zájmu České republiky, tj. udržitelný vývoj ekonomické (životní) úrovně a její konvergenční proces vůči členským státům Evropské unie (EU), bude v dlouhodobém časovém horizontu rozhodujícím způsobem ovlivňována stárnutím věkové struktury obyvatelstva. Jeho průběh bude ovlivňovat vývoj základních faktorů ekonomické (životní) úrovně také v ostatních členských státech EU [16].

Cílem této diplomové práce je modelování úmrtnosti pro potřeby důchodového pojištění, popis konstrukce úmrtnostních tabulek a graduace těchto úmrtnostních tabulek uvedenými metodami.

V první části se práce zabývá popisem a vysvětlením stárnutí obyvatelstva a jeho vliv na ekonomiku v České Republice (ČR), nepravidelností věkové struktury. Je zde popsán dosavadní vývoj stárnutí populace a prognóza demografického stárnutí do roku 2050. Část je zaměřena na stárnutí obyvatelstva a jeho vliv na budoucí český důchodový systém, saldo důchodového systému, příjmy a výdaje důchodového pojištění.

V další části dochází k popisu základních pojmů pro modelování úmrtnosti, jimiž jsou úmrtnost, ukazatelé úmrtnosti, délka života, míry a intenzity úmrtnosti a zákony úmrtnosti.

V následující části se práce zabývá popisem dat potřebných pro výpočet charakteristik úmrtnosti a zdroji dat pro konstrukci úmrtnostních tabulek v České republice (ČR), Slovenské republice (SR) a celé Evropské unii (EU).

Práce dále popisuje náležitosti úmrtnostních tabulek, způsob konstrukce úmrtnostní tabulky s ukázkou aplikace pro data Muži, SR 2006. Je v ní uveden nejen popis jednotlivých částí úmrtnostních tabulek, ale i výklad vzorců, potřebných pro sestavení těchto tabulek.

V páté části je vysvětlena graduace, tedy způsob vyhlazování úmrtnostních tabulek a metody ověření přijatelnosti (hladkosti a přesnosti) graduace.

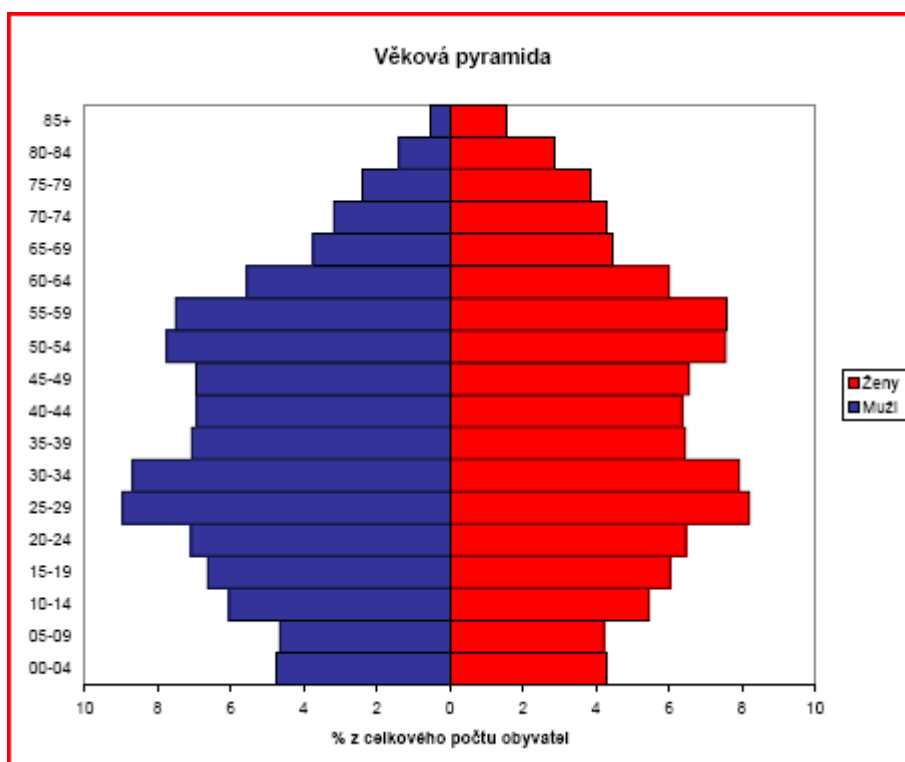
Další část práce je zaměřená na popis metod graduace úmrtnostních tabulek, na praktické ukázky jednotlivých metod při využití tabulkového procesoru Excel a statistického programového balíku STATGRAPHICS Centurion XV.

V závěrečné části je popsána problematika konstrukce úmrtnostních tabulek pro vysoké věky, čím je myšleno důchodové věky nad 65 let. Využívá se zde vyrovnání úmrtnostní tabulky pomocí Gompertz-Makehamovy metody graduace.

2 Stárnutí obyvatelstva a jeho vliv na ekonomiku

Ve vyspělých zemích začínají nabývat strukturální změny obyvatelstva na mnohem větším významu než má vývoj jeho samotného počtu. Podstatné změny věkového složení obyvatelstva ve směru prohlubujícího se demografického stárnutí se stávají stále významnějším faktorem ovlivňujícím další sféry vývoje společnosti a ekonomiky daného státu. Proces stárnutí se stává nejvíce sledovaným demografickým procesem, který vyžaduje politickou a institucionální adaptaci na tuto historicky zcela novou situaci [18].

Populační stárnutí je charakterizováno takovými změnami věkové struktury obyvatelstva, kdy obyvatelstvo starších věkových skupin roste početně rychleji než zbytek populace a jeho podíl tak v populaci vzrůstá. Toto může nastávat buď zpomalením růstu počtu mladších věkových kategorií vlivem klesající plodnosti a porodnosti, proto tuto formu populačního stárnutí nazývají demografové „stárnutím ze spodu věkové pyramidy“ (nebo též „fertility dominated aging“). Druhou možností je zrychlení početního růstu kategorií staršího věku v důsledku poklesu úmrtnosti koncentrovaného zejména do staršího věku – takové stárnutí nazýváno „stárnutí na vrcholu věkové pyramidy“ (nebo „mortality dominated aging“). Obě tyto formy se neobjevují v historickém vývoji jednotlivých populací současně a mají i rozdílné socio-ekonomické důsledky [19].



Obrázek 1 - Věková pyramida [20]

Populační stárnutí je důsledkem procesu demografického přechodu, kdy dochází k zásadním změnám v obou základních demografických procesech, které determinují věkovou strukturu ke snižování úrovně úmrtnosti vedoucímu k prodlužování střední délky života k hranici 75 let a postupnému poklesu plodnosti na úroveň kolem hranice prosté reprodukce (jedno, maximálně dvě děti na jednu ženu během reprodukčního období). V jeho průběhu a zejména po jeho ukončení se stále více lidí dožívá vyššího věku vlivem zlepšování úmrtnosti ve všech věkových kategoriích a jejich relativní váha v populaci roste důsledkem snižujícího se počtu dětí. Věková struktura postupně ztrácí svůj charakter pyramidy, který charakterizuje populace před demografickým přechodem. Podíl dětské složky v populaci klesá, zatímco podíly obyvatelstva v produktivním věku a seniorů rostou. Tato forma stárnutí ze spodu věkové pyramidy dominovala v Evropě a dalších vyspělých regionech světa v průběhu 20. století.

Vývoj stárnutí konkrétní populace nebo celého regionu je současně vedle dlouhodobých zákonitých trendů ovlivňován krátkodobými výkyvy ve všech třech základních determinantech věkové struktury – plodnosti, úmrtnosti a migrace, které mohou stárnutí dočasně urychlit, zbrzdit, nebo dokonce zastavit [19].

2.1 Nepravidelnosti věkové struktury

Současné věkové struktury většiny evropských populací jsou značně nepravidelné, odrážející vliv událostí z průběhu celého 20. století. Tyto události formovaly počty narozených dětí v jednotlivých kalendářních letech – generace, jejichž další početnost byla ovlivňována intenzitou úmrtnosti a migracemi. Nepravidelnosti v početnosti generací ovlivnily a dále budou ovlivňovat i postup populačního stárnutí. Vliv obou světových válek a hospodářské krize třicátých let, kdy byla porodnost nízká, a poválečných kompenzačních natalitních vln se projevuje u většiny evropských populací [22].

Pro Českou republiku je to dále vzestup porodnosti již od počátku 40. let v době nacistické okupace, pokles porodnosti na počátku 60. let související s legalizací umělého přerušování těhotenství, její mírné oživení v polovině 60. let v důsledku přijetí pro populačních opatření a opětovný pokles na konci tohoto období odrážející společensko-ekonomickou krizi. Velmi významně se ve věkové struktuře české populace projevuje prudký vzrůst porodnosti v první polovině 70. let (generace 1974 a 1975 jsou početně nejsilnějšími v celé populaci) a její současný hluboký pokles od poloviny 90. let. Uvedené výkyvy porodnosti byly ve většině případů i sekundárními dopady vývoje počtů narozených o generaci dříve, které ovlivnily počet potenciálních matek v daném období. V 90. letech vliv vnějších podmínek pro reprodukci byl

mnohem silnější než působení vzestupu počtu potenciálních matek pocházejících z natalitní vlny 70. let a k sekundární vlně zvýšené porodnosti nedošlo [22].

2.2 Indikátory stárnutí a definice hranic věkových skupin

Z definice populačního stárnutí je zřejmé, že jeho hlavními indikátory jsou změny podílu tří hlavních populačních skupin v celkové populaci, zejména podílu seniorů.

Dále jsou používány indexy porovnávající hlavní populační skupiny navzájem [16]:

- **Index stáří** – poměr počtu seniorů a dětské složky populace (protože stárnutí se především odráží v početních změnách těchto skupin).
- **Indexy ekonomického zatížení** – poměry počtů osob v předproduktivním nebo poproduktivním věku a počtu osob v produktivním věku (jako výchozího hodnocení pro možné socio-ekonomické dopady stárnutí).
- **Statistické indikátory** – průměrný věk, věkový medián (protože věková struktura je statistickým rozložením osob podle jednotek věku nebo pětiletých skupin).

Zatímco konstrukce uvedených indikátorů je jednoduchá, vymezení hranice stáří chronologickým věkem, které je nutné pro mezinárodní a časová srovnání, se vyvíjelo. Donedávna Organizace spojených národů (OSN) používala hranici 60 let. Československá statistika užívala vymezení poproduktivního věku 60 let pro muže a 55 let pro ženy. V současné době je nejčastěji pro vymezení seniorské populace užívána hranice 65 let a klasifikace hlavních populačních skupin: 0–14, 15–64, 65+. Někteří autoři, zejména američtí, používají v případě výpočtu indexů zatíženosti kategorizaci 0–19, 20–64, 65+ ve snaze podat poněkud realističtější obraz, reflektující fakt, že ve věku 15–19 je ekonomická aktivita ve vyspělých zemích téměř zanedbatelná [16].

2.3 Dosavadní vývoj stárnutí v České republice (ČR)

Přestože stárnutí věkové struktury české populace se v souvislosti s ukončením demografického přechodu na našem území započalo již v meziválečném období, jeho další vývoj po druhé světové válce byl pomalý a zdaleka nebyl plynulý. Byl poznamenán uvedenými výkyvy ve velikosti jednotlivých generací. V 50. letech byl brzděn na spodu věkové pyramidy vlnou vysoké poválečné natality i příznivým vývojem kojenecké a dětské úmrtnosti [22]. Léta 60. byla obdobím intenzivnějšího stárnutí. Natalitní vlna ze 70. let opět rozšířila bázi věkové pyramidy a postup stárnutí v dalších letech opět zpomalila. Odrazilo se to i v dočasném mírném

snížení celkových charakteristik věkového složení jako je průměrný věk a věkový medián. K tomu v 80. letech přispíval i vývoj na vrcholu věkové pyramidy, kde se promítal vliv extrémně málo početných generací narozených během 1. světové války, jejichž příslušníci přesáhli věk 65 let, a vliv zhoršující se úmrtnosti ve středním a vyšším věku, především u mužů. Počet obyvatelstva staršího 65 let tak dočasně i poklesl, což se projevilo také ve snížení jeho relativního zastoupení v populaci v průběhu 80. let. Celkově lze říci, že věková struktura v poválečném období do počátku 90. let byla příznivá: děti do 15 let tvořily více než pětinu populace a podíl obyvatelstva v produktivním věku přesahoval 60%, zatímco podíl staršího obyvatelstva rostl pouze mírně. Ve struktuře závislých osob převažovaly děti do 15 let nad obyvateli staršími 65 let [22].

Populační stárnutí v 90. letech mělo poněkud zvláštní průběh. Měřeno relativním zastoupením osob ve věku nad 65 let stárnutí postupovalo velmi mírným tempem, a teprve ve druhé polovině 90. let dosáhl podíl seniorů ve věku nad 65 let opět stejné úrovně jako na přelomu 70. a 80. let, kdy byl doposud nejvyšší (13,5 % – r. 1980).

Intenzivní stárnutí však probíhalo především ze spodu věkové pyramidy poklesem podílu dětí v populaci. Zde se uplatnily dva vlivy. Především byl ukončen přesun početně silných generací z baby-boomu 70. let z dětské kategorie do skupiny obyvatelstva v produktivním věku, které byly nahrazovány početně slábnoucími generacemi narozených v následujících letech. Ve druhé polovině 90. let souvisely pokračující úbytky dětí se poklesem porodnosti ve skocích v polovině 90. let, kterým se začal vytvářet další nový zářez ve věkovém složení. Při stagnaci celkového počtu obyvatelstva se tak podíl této věkové skupiny v obyvatelstvu prudce snížil z 21 % na 15 %, historicky dosud nejnižší zaznamenanou hodnotu. K příznivým změnám došlo u kategorie osob ve věku ekonomické aktivity. Jejich počty se v průběhu 90. let zvyšovaly, i když se snižujícím tempem, a podíl v populaci vzrůstal. Stabilizace počtu v posledních dvou letech však naznačuje, že šlo o dočasný stav [22].

Vzhledem k početní nevyrovnanosti generací dosahujících v průběhu posledních 15 let věku nad 65 let se počet obyvatelstva v poproduktivním věku měnil pouze omezeně; již 8 let se pohybuje nad 1,4 mil. osob a podíl této věkové kategorie se stabilizoval na 14 % populace. Stagnaci početního vývoje staršího obyvatelstva ovlivnila i vysoká intenzita úmrtnosti od středního věku v letech 70. a 80., naopak příznivý vývoj úmrtnosti ve středním a vyšším věku po roce 1990 se začíná projevovat jako faktor přispívající k početnímu růstu seniorů. Podíl osob starších 80 let byl jak v rámci skupiny obyvatelstva v poproduktivním věku, tak v rámci celé populace díky generačnímu posunu osob narozených v době 1. světové války i předchozí vysoké úrovni úmrtnosti relativně nízký. Nyní je v populaci 308 tisíc osmdesátníků,

což představuje 21 % ze všech osob ve věku nad 65 let a 3 % z celkového počtu obyvatelstva. Z hlediska ekonomické zátěže obyvatelstva v produktivním věku bylo posledních 15 let ještě příznivějších než předchozí období. Počet závislých osob připadajících na 100 osob ve věku ekonomické aktivity se snížil v jejich průběhu z 51 na 41. Podstatnou měrou se na tom podílel trvalý pokles počtu dětí do 15 let [22].

Pokračující stárnutí po roce 1990 charakterizuje růst průměrného věku (36,3–39,8) a věkového mediánu (35,4–38,7) o více jak 3 roky, což představuje podstatný posun, a zvláště indexu stáří, kdy se v současnosti počet seniorů nad 65 let věku již blíží počtu dětí do 15-ti let. (V případě porovnání počtu dětí a osob nad 60 let již k této převaze dochází od roku 1997) [22].

2.4 Prognóza demografického stárnutí v ČR do roku 2050

Vývoj v posledních několika letech předznamenává, že stojíme na prahu velkých nezadržitelných změn věkové struktury. Charakter současné věkové struktury sám o sobě v sobě skrývá značný potenciál pro intenzivní stárnutí. Její vliv bude sice v průběhu projektovaných pěti desetiletí pomalu slábnout, ale je nutné si uvědomit, že ještě v roce 2050 bude polovina populace tvořena generacemi přítomnými v populaci v roce 2000 [21].

Tabulka 1-Ročníky narození starších věkových skupin letech 2000, 2015, 2030, 2050 [22]

Věková skupina	2000	2015	2030	2050
50-64	1936-1950	1951-1965	1966-1980	1986-2000
65-79	1921-1935	1936-1950	1951-1965	1971-1985
65+	(1900)-1935	(1915)-1950	(1930)-1965	(1950)-1985
80+	(1900)-1920	(1915)-1935	(1930)-1950	(1950)-1970

Počet starších osob bude tak v rozhodující míře záviset na dalším vývoji úmrtnosti. Rostoucí naděje dožití bude zvyšovat počty i podíly seniorů i velmi staré populace. Jejich podíl v celkové populaci bude dále záviset i na vývoji plodnosti a následně velikosti dětské populace – její opětový vzestup bude působit proti zužování základny věkové pyramidy a zpomalovat proces stárnutí. Třetím komponentem budoucího populačního vývoje je zahraniční migrace. Její pozitivní saldo bude stárnutí zpomalovat, neboť migranti jsou většinou osoby v produktivním věku. Avšak, pokud by měla charakter časově migrační vlny, mohla by po určitém čase, až imigranti zestárnou, naopak proces stárnutí urychlit [22].

Předpoklady vývoje plodnosti, úmrtnosti a migrace, na nichž je založena střední, nejpravděpodobnější, varianta populační projekce Českého statistického úřadu (ČSÚ) z roku 2004, jsou uvedeny v následující tabulce č. 2.

Tabulka 2 –Předpoklady vývoje plodnosti, úmrtnosti a migrace [21]

Rok	Úhrnná úmrtnost	Naděje dožití		Saldo migrace
		Muži	Ženy	
2002	1,17	72,1	78,5	12290
2005	1,23	72,4	78,8	25000
2010	1,3	73,1	79,4	25000
2020	1,45	74,5	80,7	25000
2030	1,6	76	83,9	25000
2040	1,61	77,5	83,2	25000
2050	1,62	78,9	84,5	25000

Do budoucna se bude stárnutí české populace dále prohlubovat. Hranici 65 let postupně překročí osoby z početně silných válečných a poválečných ročníků. Vzestup jejich počtu bude umocňován předpokládaným snižováním úmrtnosti. Podíl seniorů se bude zvyšovat na úkor snižování podílu osob v produktivním věku.

Rostoucí počty obyvatel ve vyšším věku budou znamenat silné ekonomické zatížení obyvatel v produktivním věku, jejichž počty se budou snižovat. Složení ekonomicky závislých osob se začne zásadně měnit. Budou mezi nimi převažovat osoby v důchodovém věku, což ovlivní výši výdajů na sociální a zdravotní péči (pro tyto účely byla použita klasifikace hlavních věkových skupin 0–19, 20–64, 65+).

Počet obyvatel v produktivním věku bude nejen klesat, ale i stárnout. Přesunem silných generací baby-boomu ze 70. let do věku nad 50 let začne po roce 2020 ubývat mladších lidí v produktivním věku a podíl 50-64-letých v celkovém počtu obyvatelstva v ekonomicky aktivním věku vzroste nad 40 % [22].

Nejrychleji poroste počet obyvatel nejstarších věkových skupin, osob, které představují skupinu se zvýšenými požadavky na rodinnou, sociální a zdravotní péči. U mladších seniorů lze očekávat, že budou zdravější a budou se zapojovat do života společnosti.

Z vývoje vztahu počtu velmi starých na 100 osob ve věku 50–64 let, který v generačním smyslu vztahuje staré rodiče k jejich potomkům, lze usuzovat, že potenciál rodinné péče se

bude zmenšovat. Někdy se tento index vztahuje pouze na ženy jako tradiční pečovatelky, v tomto případě dosahují indexy dvojnásobných hodnot.

Evropská unie nedávno označila stárnutí populace za výzvu. V rámci diskuse o opatřeních na podporu hospodářského růstu, zvýšení zaměstnanost a sociálního začlenění byla často zmiňována také otázka nízké zaměstnanosti starších pracovníků.

V roce 2001 byla zaměstnanost osob ve věkové kategorii 50–65 let v EU na úrovni pouhých 38,8 %. Rada ministrů v rámci své strategie pro řešení zaměstnanosti a růstu dohodnuté v Lisabonu v březnu 2000 stanovila za cíl zvýšit jak zaměstnanost různých věkových skupin, tak skutečný věk odchodu z trhu práce [22].

2.5 Problémy stárnoucí populace

V této kapitole se zaměřím na problémy související se stárnutím populace, jejichž zajištění v drtivé většině leží na bedrech produktivní generace. Nejčastěji je diskutována reforma důchodového systému. Jelikož je systém většinou financován prostřednictvím systému veřejných rozpočtů, u nichž je produktivní generace stranou zdrojů a poproduktivní generace stranou výdajů, lze očekávat v důsledku nadcházejících demografických změn značné komplikace. A nejde jenom o zajištění finančních toků, velice důležitou roli hraje i velikost budoucí poptávky po zdravotních a sociálních službách.

Nutnost budoucích úprav důchodového systému vyplývá z demografických predikcí. Podíl dětí (0-14 let) na celkové populaci klesl z 20 % na začátku 90 let na 15,6 % v současnosti. Tento pokles bude pokračovat na úroveň cca 13 % v roce 2030. Podíl osob starších 60/65 let na celkové populaci bude naopak stoupat z dnešních 19/14 % postupně na 23/15 % (v roce 2010) a dále na 29/23 % (v roce 2030) a 38/31 % (v roce 2050). Projekce dále počítají s asi o 6 let vyšší nadějí dožití mužů a žen v roce 2050 oproti dnešnímu stavu. Demografický index závislosti (podíl starších 65 let k populaci 15-64) se bude zvyšovat z hodnoty 19,7 % postupně na 22 % (v roce 2010), 35 % (v roce 2030) a 55 % (v roce 2050) [23].

Významným opatřením pro udržitelnost důchodového systému je zvyšování zaměstnanosti obecně a zejména pak starších osob. To je možné docílit využíváním práce na částečný úvazek kombinovaný s důchodem, flexibilnější pracovní dobou a důrazem na aktivní politiku zaměstnanosti (např. rekvalifikace, poradenství) a nikoliv preferováním a navyšováním peněžních dávek. Zaměstnanost osob ve věku 55-64 let se v současné době pohybuje nad průměrem EU. Existuje však rozdíl mezi zaměstnaností mužů a žen (ve věkové skupině 55-64 let je zaměstnanost žen ve srovnání s muži přibližně poloviční). Nezaměstnanost osob

ve věku 55-64 let (4,4 %) je vzhledem k nezaměstnanosti osob ve věku 25-54 let (7 %) relativně malá.

Přiměřenost příjmů důchodců je v ČR zabezpečena povinnou účastí v jednotném základním důchodovém pojištění v době ekonomické aktivity a volným přístupem k dobrovolným (státem podporovaným) soukromým důchodovým systémům. V současné době pobírá důchod ze základního důchodového pojištění více než 99 % obyvatel ve věku vyšším, než je zákonná věková hranice pro nárok na starobní důchod [23].

Dlouhodobým záměrem je udržet celkovou míru náhrady předdůchodových příjmů z důchodových systémů s tím, že dojde s velkou pravděpodobností k poklesu této náhrady ze základního důchodového pojištění, který by měl být vyrovnán rostoucí mírou náhrady ze soukromých důchodových systémů.

Dynamičnost českého základního důchodového pojištění a přiměřenost důchodů je dána každoroční aktualizací skutečně dosažených příjmů, z nichž se vychází při výpočtu důchodu v závislosti na obecném mzdovém vývoji. Mezi opatření, která umožňují důchodcům udržet si přiměřenou životní úroveň, patří možnost zvyšovat si důchod výdělečnou činností po vzniku nároku, která má v českém právním řádu dlouholetou tradici.

Systém základního důchodového pojištění je financován průběžným způsobem, výdaje na důchody v daném období jsou hrazeny z příjmů z pojistného vybraného v tomto období [23].

2.6 Příjmy základního důchodového pojištění

Na základní důchodové pojištění platí pojistné zaměstnanci, zaměstnavatelé a OSVČ. Výše pojistného je stanovena jednotnou procentní sazbou (28 %; z toho zaměstnavatelé 21,5 %, zaměstnanci 6,5 %) z vyměřovacího základu, který tvoří započitatelné příjmy před jejich zdaněním.

Vývoj příjmů sociálního pojištění je ovlivněn zejména vývojem počtu plátců pojistného a průměrnou platbou připadající na jednoho pojištěnce [24]. Dalším faktorem ovlivňujícím výši příjmů základního důchodového pojištění je úspěšnost výběru pojistného. Pojistné je příjmem státního rozpočtu a vybírá ho stát prostřednictvím územních pracovišť ČSSZ. Za celé období od zavedení pojistného na sociální zabezpečení v roce 1993 činí podíl plateb (inkasa) k předpisům pojistného (včetně pokut a penále) v průměru 97,5 %. Výběr pojistného ve vztahu k předpisu pojistného (úspěšnost výběru) má přitom výrazně se zlepšující tendenci, takže se v současné době blíží úrovni 100 % [24].

2.7 Výdaje základního důchodového pojištění

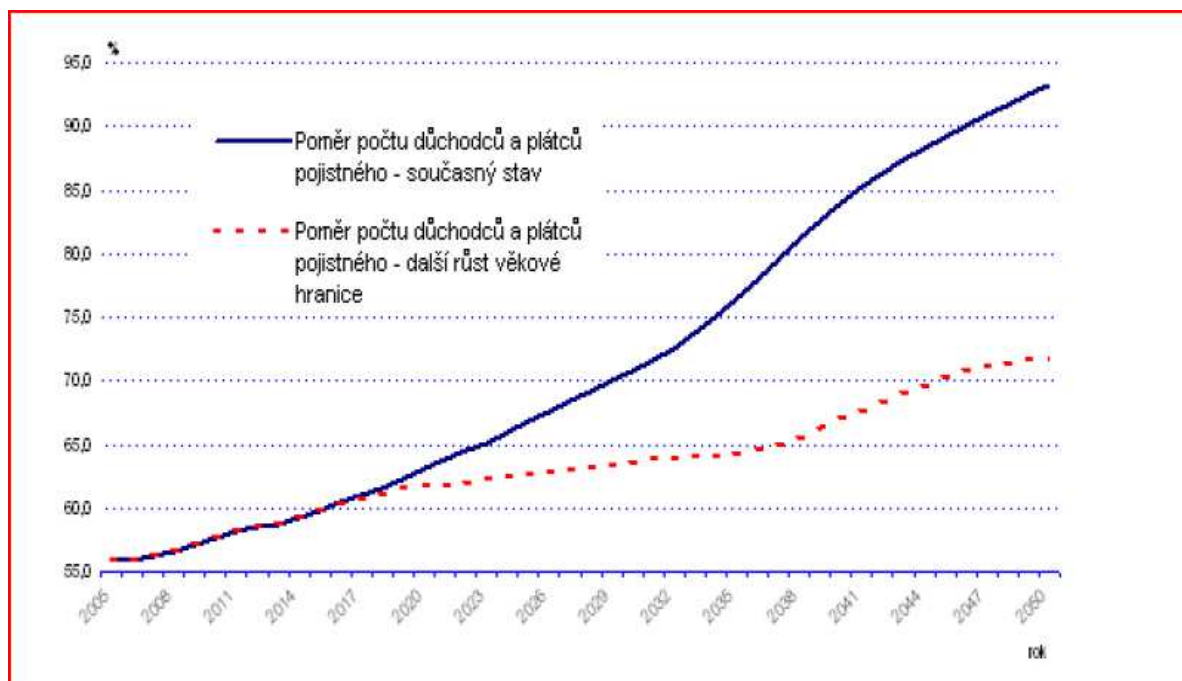
Nejvyšší podíl na výdajích základního důchodového pojištění, které v současné době činí 8,47 % HDP, mají výdaje na starobní důchody. Je to dáno tím, že z celkového počtu důchodců je nejvíce důchodců starobních a že úroveň starobních důchodů je ze všech druhů důchodů nejvyšší. Z celkových výdajů na důchody činí výdaje na starobní důchody 72 %, na invalidní důchody 18 % a na pozůstalostní důchody 10 %. V souvislosti s tím, jak budou v rámci reformních kroků zvyšovány pobídky k delšímu setrvání na trhu práce, lze v budoucnu očekávat, že invalidní důchody budou nabývat na významu jako cesta k předčasnému odchodu z trhu práce. Osoby, které mají nárok na plný invalidní důchod i po splnění podmínek nároku na starobní důchod, nejsou v případě souběhu s výdělečnou činností nijak omezeny. Rozhodující je pouze posouzení zdravotního stavu pojištěnce posudkovým lékařem nositele pojištění. Problém invalidizace má přitom významnou regionální dimenzi, a to proto, že souvisí se situací na trhu práce i s dlouholetou namáhavou a zdraví škodlivou prací a v neposlední řadě i s horším životním prostředím. V současné době pobírá cca 15 % osob ve věku 50 až 64 let invalidní důchod [24].

Změny v českém základním důchodovém pojištění by měly směřovat k vyššímu pracovnímu zapojení starších osob a tím i ke zvýšení reálného věku odchodu do důchodu. V ČR sice došlo ke zvýšení zaměstnanosti osob ve věku od 55 let do 64 let z 36,3 % v roce 2000 na 42,3 % v současné době, ale budou muset být zvážena opatření spočívající v dalším zvýhodnění odloženého odchodu do starobního důchodu, v možnosti přepočítat starobní důchod za pracovní činnost vykonávanou po přiznání tohoto důchodu při jeho pobírání a v dalším pokračování zvyšování věkové hranice pro nárok na starobní důchod. Pokud jde o předčasný odchod do starobního důchodu, nepůsobí současná právní úprava po přijetí opatření v roce 2001 a 2004 jako motivační faktor pro předčasný odchod z trhu práce [24].

Tabulka 3 - Průměrný starobní důchod v Kč v letech 1993-2009 [vlastní]

Rok	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
	3013	3013	3767	4592	5131	5559	5894	6277	6793	6819	7062

Rok	2004	2005	2006	2007	2008	2009
	7270	7747	8187	8747	9638	9968



Obrázek 2 - Vývoj poměru důchodců a plátců pojistného [25]

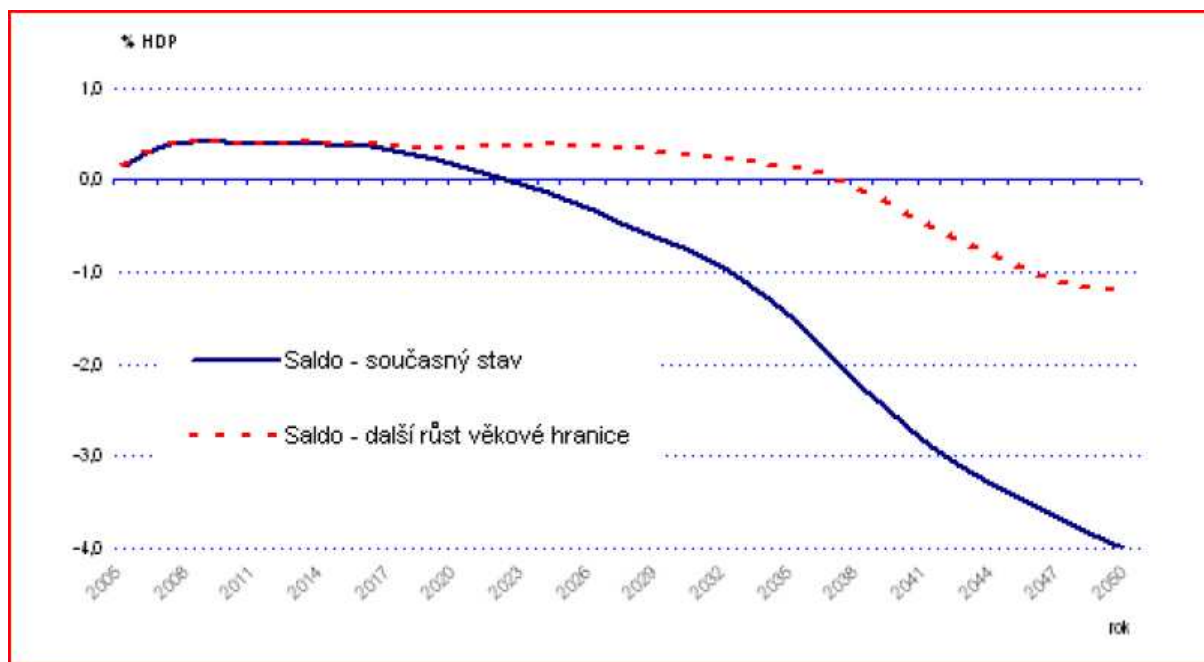
Na základě výše uvedených předpokladů výdaje základního důchodového pojištění z výchozí úrovně těsně nad 8,4 % HDP nejprve krátkodobě klesají na 8 % a poté začínají růst až k hladině 12,5 % HDP v závěru projekce (rok 2050). Krátkodobý mírný pokles výdajů je způsoben zejména přijatým předpokladem o nižší než mzdové valorizaci důchodů (valorizace podle inflace a jedné třetiny růstu průměrné reálné mzdy). V relativním vyjádření k HDP tedy dojde během následujících 50 let k růstu výdajů na důchody přibližně o 50 %.

Vývoj celkových výdajů základního důchodového pojištění je určován především dynamikou výdajů na starobní důchody a z menší části růstem výdajů na důchody invalidní. To je důsledkem očekávaného růstu počtu důchodců v těchto kategoriích. Pokud jde o počet starobních důchodců, předpokládá se růst z 1,95 mil. v roce 2004 až na více než 3 mil. v roce 2050. Pokud jde o invalidní důchodce, očekává se nárůst z 555 tisíc v roce 2004 na 685 tisíc v roce 2035, poté by měl počet invalidních důchodců pozvolna klesat na úroveň zhruba 620 tis. v roce 2050. Celkový počet důchodců základního důchodového pojištění by měl v důsledku výše popsaných trendů vzrůst z 2,6 mil. v roce 2004 na 3,8 mil. v roce 2050 [25].

Vzhledem k předpokládanému vývoji příjmů z pojistného na úrovni 8,4 % HDP dosahuje základní důchodové pojištění do první poloviny dvacátých let mírných finančních přebytků. Kumulovaně mohou tyto přebytky na počátku dvacátých let přesáhnout téměř 6 % HDP. Zvyšování výdajů v relaci k HDP povede nejprve k vyrovnání finanční pozice a poté k postupnému růstu deficitu základního důchodového pojištění, který ke konci projekce

dosáhne úrovně 4 % HDP. Kumulované saldo se přesune z kladné do záporné hodnoty kolem roku 2035 a kolem roku 2050 dosáhne dluh úrovně necelých 50 % HDP, viz obrázek č. 3.

V případě, že by nedošlo v základním důchodovém pojištění k dalším úpravám, které by buď navazovaly na již provedené změny (tj. především postupný růst zákonné věkové hranice pro odchod do starobního důchodu), nebo by významně restrukturalizovaly základní důchodové pojištění, nebyl by tento systém dlouhodobě finančně udržitelný [25].



Obrázek 3 - Vývoj salda důchodového systému [25]

Tabulka 4 - Výdaje na starobní důchody v letech 1993 – 2009 [vlastní]

Rok	1993	1994	1995	1996	1997	1998
	50 864 013	57 758 669	72 034 524	85 063 170	104 198 248	114 605 484
Rok	1999	2000	2001	2002	2003	2004
	123 666 158	130 932 093	140 656 510	150 772 339	156 272 738	163 025 907
Rok	2005	2006	2007	2008	2009	
	175 668 780	188 948 637	203 932 710	222 104 620	247 106 829	

3 Modelování úmrtnosti

Z pojistně-matematického hlediska lze úmrtnost charakterizovat následně [2]:

- jsou zde dva stavy, které označujeme jako „naživu“ a „zemřelý“, přičemž o stavu pojištěného lze jednoznačně rozhodnout,
- přechod mezi stavy může nastat jen jedním směrem, a to úmrtím,
- okamžik úmrtí je náhodný a může být popsán pravděpodobnostními nástroji.

S pomocí pravděpodobnostních nástrojů lze vytvořit pravděpodobnostní model úmrtnosti, který umožňuje odpovědět na otázky typu:

- s jakou pravděpodobností zemře 55letý muž před dožitím věku 60, (kolik úmrtí během 5 let lze očekávat ve vzorku 1000 mužů ve věku 55),
- s jakou pravděpodobností zemře 40letý muž ve věku 55,
- s jakou pravděpodobností bude 30letá žena s 40letým manželem za 15 let vdovou,
- kolik budoucích let života lze očekávat u ženy/ muže ve věku 45,
- jaké pojistné na důchodové pojištění by měla pojišťovna požadovat např. od 25letého muže.

Numerické odpovědi na tyto a ostatní otázky zkombinované s příslušnými finančními výpočty představují výpočetní metodiku pro pojištění osob [2].

Praktický příklad s využitím dat v příloze č. 1 – Úmrtnostní tabulky, Muži, SR 2006.

- *S jakou pravděpodobností se osoba ve věku 20 let dožije 45 let?*

$$x = 20$$

$$n = 25$$

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{45}}{l_{20}} = \frac{94065}{98632} = 0,9537$$

- *S jakou pravděpodobností budou 24leté osoby mrtvé za 41 let (tedy ve věku 65 let, věku nástupu do důchodu)?*

$$x = 24$$

$$n = 41$$

$${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{24} - l_{65}}{l_{24}} = \frac{98259 - 70425}{98259} = 0,2833$$

- *S jakou pravděpodobností se 24letá osoba dožije 65 let a zemře před 66tými narozeninami, tj. během 65tého roku?*

$$q_{x/j} = \frac{d_{x+j}}{l_x} = \frac{d_{65}}{l_{24}} = \frac{2115}{98259} = 0,0215$$

3.1 Úmrtnost (mortalita)

Úmrtnost je definována jako proces vymírání obyvatelstva. Je determinována a ovlivňována biologickými, sociálními a ekonomickými faktory, např: věkem, pohlavím, profesí, bytovými podmínkami, výživou, stravou, životní úrovní, způsobem života a mnohými jinými.

Faktory ovlivňující úmrtnost:

- faktory biologické povahy – věk, pohlaví, rodinný stav atd.,
- faktory sociální a ekonomické povahy – vzdělání, zaměstnání, životní úroveň [15].

Sezónní úmrtnost je sledována podle kalendářních měsíců, je dána klimatickými vlivy a s nimi souvisejícími vlivy epidemií. Např. vliv chřipkových epidemií v podzimních a zimních měsících nebo kardiovaskulární problémy v horkých letních dnech [13].

S analýzou příčin smrti souvisí také rozbor úmrtnosti podle oblastí, jde o regionální rozdíly v úmrtnosti.

Dalším faktorem, který má vliv na úmrtnost, je rodinný stav zemřelých. Při zkoumání tohoto faktoru bylo zjištěno, že vyšší úmrtnost je ve skupině osob žijících mimo manželský svazek. Úmrtnost vzhledem k sociálním skupinám a profesnímu zařazení je velmi složitý faktor. V obou případech intervenuje v analýze celá řada dalších sociálních jevů. Osoby různých povolání jsou vystaveny různému stupni úrazovosti, psychické zátěže, mají různý životní styl a různou životní úroveň atd.

Zvláštní míry jsou určeny pro údaje o úmrtnosti kojenců, tj. dětí do jednoho roku (ve statistické praxi 0-364 dnů) věku. Jsou chronologicky i územně dobře srovnatelné, velmi často jsou publikovány i v mezinárodním porovnání jako jedno z kritérií kulturní a sociální vyspělosti zemí. Vzhledem k charakteru těchto měř navrhují demografové jejich označování jako "kvocienty" (kvocient kojenecké úmrtnosti) [13].

Příčiny kojenecké úmrtnosti:

- exogenní – nemoci a poruchy zdraví, k nimž dochází po narození,
- endogenní – poruchy, které si dítě přináší na svět z nitroděložního vývoje, vady vrozené či poranění vzniklé při porodu.

Díky pokroku dnešní medicíny jsou exogenní příčiny snadno ovlivnitelné, což vede k poklesu kojenecké úmrtnosti na celém světě. Konkrétně ČR je specialistou na pokles kojenecké úmrtnosti. I přes to kojenecká a dětská úmrtnost tvoří nejvýraznější složku celkové úmrtnosti v populaci vedle úmrtnosti ve stáří.

Klasifikace kojenecké úmrtnosti dle stáří dítěte:

- úmrtnost porodní = 0-2 dny života dítěte,
- úmrtnost časná = 0-6 dnů,
- úmrtnost neonatální (novorozenecká) = 0-27 dnů,
- úmrtnost post neonatální (ponovorozenecká) = 28 dní – 1 rok,
- úmrtnost kojenecká = do 1 roku,
- mortalita = mrtvě narození.

Novorozenecká úmrtnost je počet dětí zemřelých do 28 dnů připadajících na 1000 dětí narozených. Kojenecká úmrtnost je počet dětí zemřelých do 1 roku na 1000 narozených.

3.2 Ukazatele úmrtnosti

Hrubá míra (Obecná míra úmrtnosti) M_{t_0} není vhodným ukazatelem, jelikož nerespektuje věkovou strukturu populace [7]. Jde o nejjednodušší charakteristiku úmrtnosti, tedy o počet zemřelých členů populace za určitý časový interval. Demograficky mladá populace bude mít nižší hodnoty hrubé míry úmrtnosti, než populace demograficky stará při stejných intenzitách úmrtností dle věku [2].

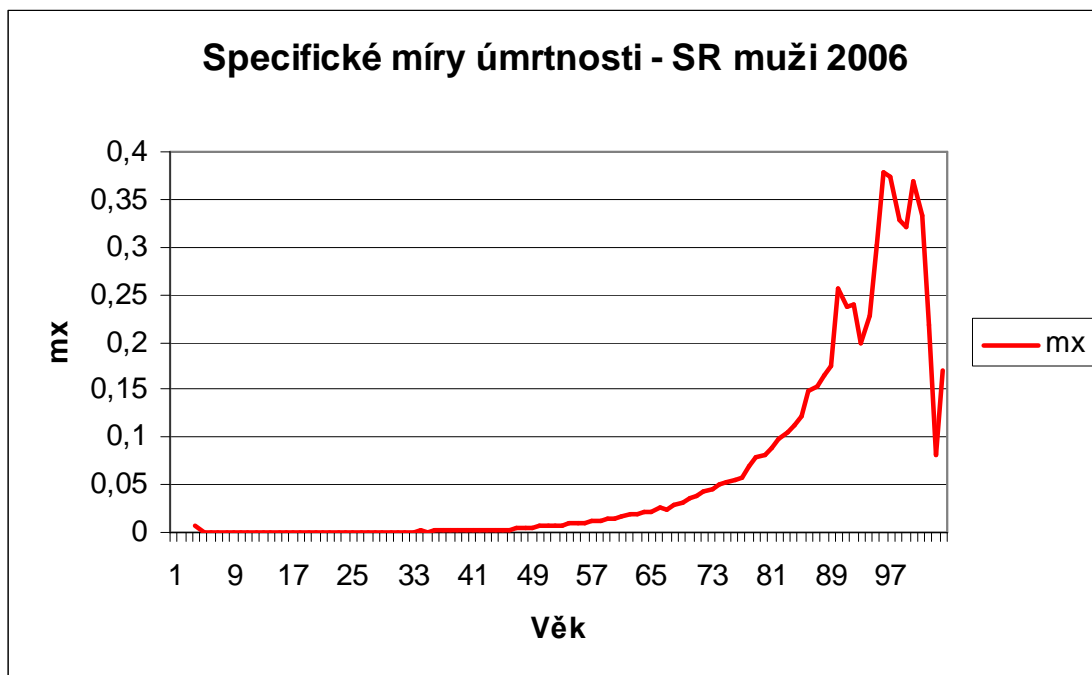
Počítá se: $m = \frac{M}{\bar{S}}$, M je počet zemřelých a \bar{S} je střední stav obyvatel.

Specifické míry úmrtnosti jsou vhodnější, neboť uvažují věkové difference nebo difference dané pohlavím. Nazýváme je věkově a pohlavně specifické míry úmrtnosti a definujeme jako

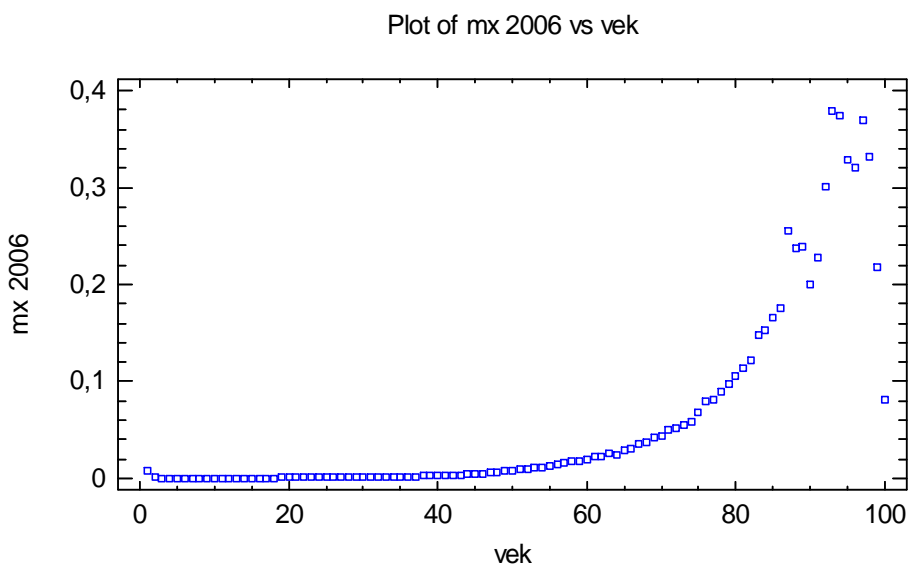
$$m_x = \frac{M_x}{\bar{S}_x},$$

kde M_x je počet zemřelých ve věkové skupině za jeden rok a \bar{S}_x je střední stav obyvatelstva ve věku x let [7].

Ukázku specifických měr úmrtnosti poskytují obrázky č. 4 a č. 5.



Obrázek 4 - Specifická míra úmrtnosti m_x , Muži, SR 2006, MS Excel [vlastní]



Obrázek 5 - Specifická míra úmrtnosti m_x , Muži, SR 2006, STATGRAPHICS Centurion XV [vlastní]

3.3 Ukazatele délky života

Délka života je náhodná veličina T_0 a představuje délku života právě narozeného jedince, tj. dobu mezi věkem 0 a úmrtím. Měří se v rocích, může nabývat i neceločíselných hodnot na spojité časové ose. Lze jí popsat běžnými mírami úrovně [7]:

- průměrem,
- modem,
- mediánem.

Průměrný počet let, které jedinec prožije se rovná celkovému počtu let, které prožije populace

děleno velikostí populace, tedy počtem jedinců: $e^0(0) = \frac{wL_0}{l(0)}$ [7].

Tento ukazatel se nazývá **střední délka života** při narození a je nejběžnějším ukazatelem, kterým se popisuje úmrtnost. Podle něj se soudí jestli se úroveň úmrtnosti zvyšuje nebo snižuje.

Střední délku života lze definovat i pro určitý konkrétní věk x : $e^0(x) = \frac{w-xL_x}{l(x)}$, $x \in < 0, w$). Jedná

se o střední délku zbývajících života. Střední délka života jedince v přesném věku x je $x + e^0(x)$.

Ukazatel $e^0(0) = \frac{wL_0}{l(0)}$ jako charakteristika délky života má jednu nechtěnost a to, že započítává

i úmrtnost kojenců a úmrtí v brzkém věku, jež s obecně s pojmem „délka života“ příliš nesouvisí.

Tabulka 5 - Střední délka života mužů v důchodovém věku (věk nad 65 let) [23]

Země/Rok	1960	1970	1980	1990	2000	2009
ČR	12,5	11,1	11,2	11,6	13,7	13,9
SR	13,2	12,3	12,3	12,2	12,9	13,3
EU	12,7	12,6	13,4	14,6	15,6	16,4
Švýcarsko	14,5	13,8	14,3	15,3	16,9	17,5

Medián délky života se nazývá pravděpodobná délka života a získáme jej vyřešením rovnice

$l(x) = \frac{1}{2} * l(0)$. Pravděpodobná délka života je tedy věk, kterého se dožije polovina lidstva.

Pravděpodobná délka života jednotlivce ve věku y lze definovat $l(x, y) = \frac{1}{2} * l(y)$, $y \in < 0, w$).

Modus délky života se nazývá **normální délka života**. Vypočítám ho jako věk, ve kterém umírá nejvíce osob.

Počet zemřelých za nekonečně malý věkový interval je $l(x)\mu(x)dx$, tudíž hustotu počtu zemřelých určíme jako součin $\delta(x) = l(x) * \mu(x)dx, x \in (0, w)$ [7].

Model úmrtnosti lze založit na náhodné veličině T_0 , jenž představuje délku života právě narozeného jedince. Obvykle se měří v rocích, jde o spojitou náhodnou veličinu, tudíž může nabývat i neceločíselných hodnot na spojitě časové ose. Na délku života jedince v obecném věku x můžeme nahlížet jako na náhodnou veličinu s odhadnutelným pravděpodobnostním rozdělením [2].

Pravděpodobnost rozdělení náhodné veličiny: $F_0(t) = P(T_0 \leq t)$. Někdy se zavádí také funkce přežití jako $S_0(t) = P(T_0 > t) = 1 - F_0(t)$.

Distribuční funkci délky života ve věku x počítáme s pomocí podmíněné pravděpodobnosti:

$$F_x(t) = P(T_x \leq t) = P(T_0 \leq x+t | T_0 > x) = \frac{P(x < T_0 \leq x+t)}{P(T_0 > x)} = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)}$$

Například $F_{50}(1) = 0,006615$ pro muže v ČR v roce 2004 je pravděpodobnost toho, že délka života 50letého muže bude kratší než jeden rok, tedy že se 50letý muž nedožije věku 51.

Matematika životního pojištění zavádí zjednodušující symboly [2]:

- Pravděpodobnost úmrtí ve věku x , tedy pravděpodobnost toho, že se jedinec, který je naživu ve věku x , nedožije věku $x + 1$: $q_x = F_x(1) = P(T_x \leq 1)$.
- Pravděpodobnost dožití ve věku x , pravděpodobnost, že jedinec ve věku x , se dožije věku $x + 1$: $p_x = S_x(1) = P(T_x > 1)$.
- Pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku y , zemře před dosažením věku $x + t$: ${}_t q_y = F_x(t) = P(T_x \leq t)$.
- Pravděpodobnost, že jedinec ve věku x se dožije věku $x + t$: ${}_t p_x = S_x(t) = P(T_x > t)$.
- Pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x , zemře ve věku $x + s$: ${}_s q_x = F_x(s+1) - F_x(s) = P(s < T_x \leq s+1)$
- Pravděpodobnost, že jedinec naživu ve věku x se dožije věku $x + s$, ale zemře před dosažením věku $x + s + t$: ${}_{s|t} q_x = F_x(s+t) - F_x(s) = P(s < T_x \leq s+t)$ [2].

Má-li T_0 hustotu pravděpodobnosti: $f_0(t) = \frac{d}{dt} F_0(t) = -\frac{d}{dt} {}_t p_0$, pak pravděpodobnostní hustota

náhodné veličiny T_x je: $f_x(t) = \frac{d}{dt} F_x(t) = \frac{d}{dt} \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} = -\frac{d}{dt} \frac{{}_{x+t} p_0}{{}_x p_0} = -\frac{d}{dt} {}_t p_x$.

Intenzita úmrtnosti: $\mu(x) = \frac{f_0(x)}{{}_x p_0} = -\frac{1}{{}_x p_0} * \frac{d}{dx} {}_x p_0 = \frac{d}{dx} \ln({}_x p_0)$ charakterizuje úmrtnost

v přesném věku x . Jde o bodovou charakteristiku úmrtnosti [9].

3.4 Zákony úmrtnosti

Problematika zákonů úmrtnosti je motivována snahou modelovat lidskou úmrtnost použitím matematických vzorců. Účinný nástroj pro nejrůznější operace s praktickými úmrtnostními údaji jsou pro nás takové vzorce (křivky úmrtnosti), které se nám podaří zkonstruovat včetně numerického odhadu jejich parametrů, v daném čase a pro danou populaci. Křivky úmrtnosti, odpovídající zákonům úmrtnosti, znamenají velmi úsporný popis velkého množství údajů. Jsou to hladké křivky, jejich použití zároveň přispívá k vyhlazování úmrtnostních tabulek. Přitom různé zákony úmrtnosti jsou charakterizovány svými typickými intenzitami úmrtnosti [2].

3.4.1 Konstantní míra úmrtnosti

Je-li intenzita úmrtnosti konstantní

$$\mu_x = \lambda \text{ pak z } {}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) \text{ plyne } {}_t p_x = e^{-\lambda t}.$$

$F_x(t) = 1 - {}_t p_x = 1 - \exp(-\lambda t)$ je skutečně pravděpodobnostní distribuční funkce.

Tento zákon je nevhodné použít pro lidskou populaci a to z toho důvodu, že funkce přežití ${}_t p_x$ zřejmě nezávisí na věku x [2].

3.4.2 Moivreův zákon úmrtnosti

Rovnoměrné rozdělení délky života s pravděpodobnostní hustotou:

$$f_x(t) = \frac{1}{\omega - x}, 0 < t < \omega - x,$$

kde ω je stanovený nejvyšší věk pro danou populaci. Pak je zřejmě

$${}_t p_x = \frac{\omega - x - t}{\omega - x}, 0 < t < \omega - x$$

a intenzita úmrtnosti $\mu_x = \frac{1}{\omega - x}$, $0 < x < \omega$. Intenzita úmrtnosti je v tomto případě hyperbolicky rostoucí funkce [2].

3.4.3 Gompertzův zákon úmrtnosti

Gompertz využil experimentálně rostoucí intenzitu úmrtnosti $\mu_x = B * c^x$, $B > 0, c > 1$.

Dle ${}_t p_x = \exp(-\int_0^t \mu_{x+s} ds)$ je ${}_t p_x = g^{e^x(e^t-1)}$, kde $g = \exp\{-B/\ln(c)\}$ [2].

3.4.4 Makehamův zákon úmrtnosti

Jde v něm o zobecnění Gompertzovy intenzity úmrtnosti: $\mu_x = A + B * c^x$, $A > 0$.

Pak je ${}_t p_x = s^t * g^{e^x(e^t-1)}$, kde $s = \exp(-A)$. Tuto úmrtnostní křivku je nejvhodnější použít pro modelování úmrtnosti lidské populace. Dává nejlepší výsledky v porovnání s ostatními metodami [2].

3.4.5 Weibullův zákon

Využil polynomicky rostoucí intenzitu úmrtnosti $\mu_x = k * x^n$, $k > 0, n > 0$.

Pak dle ${}_t p_x = \exp(-\int_0^t \mu_{x+s} ds)$ je ${}_t p_x = w^{(x+t)^{n+1} - x^{n+1}}$, kde $w = \exp\{-k/(n+1)\}$. Tento zákon se používá hlavně v rámci teorie spolehlivosti pro ocenění životnosti různých technických zařízení. Nejde o zákon, který se váže k úmrtnosti [2].

4 Úmrtnostní tabulky a jejich konstrukce

Úmrtnostní tabulka je nástroj reprezentující model úmrtnosti praktickým způsobem. Patří k základním nástrojům matematiky životního pojištění. Je specifickou metodou užívanou k charakteristice řádu vymírání určité populace.

Vycházejí z ukazatele pravděpodobnost úmrtí q_x v jednotlivých věkových kategoriích, kde počet zemřelých vztahujeme nikoliv ke střednímu stavu obyvatel, ale k počátečnímu počtu osob vystavených riziku úmrtí (tzn. nejčastěji k začátku roku). Na základě tohoto ukazatele můžeme přejít od reálné populace k fiktivní tabulkové populaci, která vychází ze zaokrouhleného počtu narozených (např. 100000). Aplikací reálných pravděpodobností úmrtí na tabulkovou populaci dostáváme prostřednictvím specifických výpočtů tabulkové počty žijících, zemřelých a zároveň získáváme hlavní výstup úmrtnostní tabulky - střední délku života (naději dožití), definovanou jako průměrný počet let, které zbývá osobě ve věku x ještě prožít. Nejčastěji se tento ukazatel uvádí ve věku 0 let a je označován jako střední délka života při narození [16].

Úmrtnostní tabulky se zpravidla vypočítávají za každé pohlaví samostatně, výjimečně se konstruují pro obě pohlaví dohromady [17].

		<i>kořen tabulky</i>		<i>střední délka života při narození</i>			
2003		Česká republika					
		Muži Males					
věk age	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
0	0,004292	0,995708	100000	429	99605	7202976	72,03
1	0,000402	0,999598	99571	40	99551	7103370	71,34
2	0,000215	0,999785	99531	21	99520	7003820	70,37
3	0,000241	0,999759	99509	24	99497	6904299	69,38
4	0,000162	0,999838	99485	16	99477	6804802	68,40
5	0,000148	0,999852	99469	15	99462	6705324	67,41
6	0,000154	0,999846	99455	15	99447	6605862	66,42
7	0,000174	0,999826	99439	17	99431	6506415	65,43
8	0,000192	0,999808	99422	19	99412	6406985	64,44
.
.
101	0,607427	0,392573	18	11	12	18	1,03
102	0,646236	0,353764	7	5	5	6	0,85
103	1,000000	0,000000	2	2	1	1	0,50

pravděpodobnost úmrtí

Obrázek 6 - Ukázka úmrtnostní tabulky, Muži, ČR 2003 [8]

4.1 Data pro výpočet charakteristik úmrtnosti

Pro výpočet průřezových úplných úmrtnostních tabulek potřebujeme kromě počtu zemřelých i počty žijících osob a pro výpočet charakteristik úmrtnosti v prvním roce života též počty živě narozených.

Potřebujeme tyto data [6]:

- počty zemřelých osob daného pohlaví v daném roce v dané zemi podle jednotek věku,
- počty obyvatel daného pohlaví k 1. červenci daného roku v dané zemi podle jednotek věku, jde o střední stavy obyvatelstva,
- celkový počet živě narozených dětí daného pohlaví v dané zemi v daném roce a v předchozím roce.

Tříděním podle jednotek věku, tj. vyjádření věku v hodnotách dokončeného věku, to je hodnota přesného věku, vyjádřená například v měsících a dnech, zaokrouhlená vždy dolů. Jde tedy o věk dosažený při posledních narozeninách.

Dokončený věk nabývá celočíselné hodnoty $0, 1, 2, \dots, \omega - 1$. Symbolem ω se označuje nejnižší celočíselný věk, kterého se nikdo nedožije.

Jde o rozdělení osob podle přesného věku do jednotlivých věkových intervalů. V datech u velmi starých osob se věk takto podrobně nerozlišuje. Nejvyšší uváděná hodnota věku v úmrtnostních tabulkách bývá často 100+ čímž se rozumí osoby v dokončeném věku 100 a více let.

V některých statistických a demografických tabulkách bývá velmi často věk vyjádřen v pětiletých intervalech, tj. 0 - 4, 5 - 9 atd. Ale pro výpočet úmrtnostních tabulek není vhodné tyto intervaly používat, potřebujeme třídění podle jednotek věku [2].

4.1.1 Zdroje dat pro ČR, SR a pro ostatní země EU

Data vhodná pro vytvoření úmrtnostních tabulek, data tříděná podle jednotek věku pro populaci ČR a SR najdeme v publikaci Pohyb obyvatelstva v České a Slovenské republice. Od počátku roku 2001 byla tato publikace za Českou republiku k dispozici v elektronické podobě na internetových stránkách ČSÚ dostupného z www.cudo.cz. Data za léta 1980 - 1999 pro ČR a za léta 1980 - 2002 pro SR nalezneme na internetových stránkách projektu POPIN, Population Information [6].

Pro země EU lze data nalézt v databázi Eurostatu NexCronos. Do těchto dat se dostaneme z domovské stránky Eurostatu, europa.eu.int/comm/eurostat, volbou položky DATA, FREE

DATA EXPLORER. Také se na tyto data dostaneme z webu ČSU přes sekci Evropská data (ESDS) [6].

4.2 Konstrukce úmrtnostních tabulek

Pojišťovna či penzijní fond má při volbě úmrtnostní tabulky dvě možnosti [2]:

- na základě vlastních dat o úmrtnosti ve svém pojistném kmenu pro něj odhadne příslušné pravděpodobnosti úmrtí a z nich zkonstruuje své vlastní úmrtnostní tabulky. Tento postup není příliš rozšířený, neboť přináší mnoho problémů, jako jsou například nedostatek dat, mnoho práce navíc, neochota některých členů při snaze o konstrukci úmrtnostních tabulek v rámci celé asociaci pojišťoven či penzijních fondů. Odhad pravděpodobností úmrtí se opírá o pozorování daného pojistného kmene za dané období, většinou víceleté (např. od 1.1.2006 do 31.12.2007). Toto období nazýváme období pozorování.
- podle svých potřeb příslušným způsobem upraví globální úmrtnostní tabulky dostupné na serveru ČSU. V rámci takových úprav se zohledňuje předpokládaný budoucí vývoj úmrtnosti, důsledky předpokládané selekce a antiselekce.

Na základě pravděpodobnosti úmrtí a dožití se konstruují jednotlivé funkce úmrtnostní tabulky.

Věk x: vyjadřuje konkrétní ukončený věk osoby

např. $x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 50, 51, 52, \dots, 103$ (v úmrtnostních tabulkách na stránkách Českého i Slovenského statistického úřadu je $\omega = 103$) [2].

Počet dožívajících se věku x označovaný jako l_x

V praxi se na l_x nahlíží jako na počet jedinců, kteří se při daném výchozím stavu l_0 dožijí věku x . Zvolíme si libovolné přirozené číslo l_0 které nazýváme kořen (radix, $l_0 = 100\ 000$) a pro jednotlivá přirozená x definujeme posloupnost l_x jako $l_x = l_0 \cdot {}_x p_0$, pro libovolné přirozené číslo n je $l_{x+1} = l_x \cdot {}_n p_x$.

Z tohoto vztahu vyplývá vzorec pro **pravděpodobnost dožití z věku x do věku x + n**:

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}. \text{ Ekvivalentně platí: } {}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \quad [2].$$

Jestliže l_0 je počet jedinců ve věku 0, pak počet jedinců, kteří přežijí do věku x , je vzhledem k navzájem nezávislému úmrtnostnímu chování jedinců náhodná veličina s binomickým rozdělením $Bi(l_0, {}_x p_0)$. Střední hodnota této veličiny je tedy $l_0 \cdot {}_x p_0 = l_x$ [1]. Proto lze l_x

interpretovat jako střední počet jedinců, kteří se při daném výchozím stavu l_0 dožijí věku x . Platí $l_0 \geq l_1 \geq l_2 \geq \dots$. Vzhledem k tomuto vztahu lze mluvit o dekrementním řádu vymírání populace, neboť ubývání posloupnosti je způsobeno právě úmrtností [2].

Pravděpodobnost úmrtí ve věku x : q_x

je pravděpodobnost, že jedinec žijící ve věku x , zemře před dosažením věku $x + 1$. Tuto pravděpodobnost nazýváme také jako roční míra úmrtnosti.

Platí: $q_x = F_x(1) = P(T_x < 1)$ [2].

Tabulka 6 - Ukázka pravděpodobnosti úmrtí, Muži, SR 2006, MS Excel [vlastní]

Věk muže x	q_x
30	0,001214
50	0,009100
70	0,004692
80	0,103906
98	0,391233
100	0,999999

Pravděpodobnost dožití ve věku x : p_x

označuje pravděpodobnost, že jedinec, který žije ve věku x , se dožije věku $x + 1$. Nazýváme jí roční míra dožití [2].

Platí: $p_x = S_x(1) = P(T_x > 1)$, $p_x = 1 - q_x$, $p_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$, $q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$.

Tabulka 7 - Ukázka pravděpodobnosti dožití, Muži, SR 2006, MS Excel [vlastní]

Věk muže x	p_x
30	0,998786
50	0,990900
70	0,953079
80	0,896094
98	0,608700
100	0,000001

Počet zemřelých ve věku x označovaný jako d_x

Jde o počet jedinců z l_0 , kteří zemřou v dokončeném věku x [2].

$$\text{Platí: } d_x = l_x - l_{x+1}, \quad q_x = \frac{d_x}{l_x}, \quad l_0 = d_0.$$

Tabulka 8 - Ukázka počtu zemřelých osob, Muži, SR 2006, MS Excel [vlastní]

Věk muže x	d_x
30	119
50	827
70	2740
90	1241

Počet let prožitých osobami ve věku x: L_x

Jde o člověkoroky, tj. roky, které ve věku x prožije l_x osob.

Aproximuje se výrazem: $L_x \cong l_{x+1} + 1/2(l_x - l_{x+1}) = l_{x+1} + 1/2d_x = 1/2(l_x + l_{x+1})$ [2].

Tabulka 9 - Ukázka počtu prožitých let, Muži, SR 2006, MS Excel [vlastní]

Věk muže x	L_x
30	97 597
50	90 482
70	57 053
90	4915

Počet zbylých let života ve věku x: T_x

Jsou to roky, které do konce svého života prožije l_x osob: $T_x = L_x + L_{x+1} + \dots + L_w$.

Platí: $T_x = 1/2l_x + l_x + \dots + l_{x+n-1} + 1/2l_{x+n} = 1/2[l_x + 2l_{x+1} + \dots + 2l_{x+n-1} + l_{x+n}]$ [2].

Tabulka 10 - Ukázka počtu zbylých let, Muži, SR 2006, MS Excel [vlastní]

Věk muže x	T_x
30	4 078 745
50	2 171 430
70	614 592
90	17 748

Střední délka života osoby ve věku x: e_x někdy i e_x^0

značí průměrný počet let, kterých se ještě dožije jedinec ve věku x. Speciálně E_0 je střední délka osoby, ke které se vztahuje dekrementní řád [2].

Platí: $E_x = T_x / l_x$.

Tabulka 11 – Střední délka života, Muži, SR 2006, MS Excel [vlastní]

Věk muže x	e_x
30	41,77
50	23,89
70	10,52
90	3,21

Výpočet všech výše uvedených charakteristik nalezneme pro věky 0 - 103 v příloze č. 1.

Za zemřelou osobu je v demografické statistice považována osoba, za niž vykazující jednotka (obecní nebo městský úřad pověřený vedením matriky) zaslala individuální Statistické hlášení o úmrtí. Vzhledem ke kontrole souladu souborů s matričními záznamy je prakticky vyloučeno, aby soubory zemřelých byly neúplné [11].

Obecně platí, že mužská populace vykazuje ve všech věkových skupinách větší sklon k úmrtnosti než populace ženská. Toto tvrzení potvrzují i úmrtnostní tabulky [13].

5 Graduace úmrtnostních tabulek

Graduací rozumíme vyrovnávání, nebo vyhlazování úmrtnostních tabulek, což je procedura, pomocí níž se z odhadovaných pravděpodobnostních úmrtí nebo jistých úmrtnostních charakteristik eliminují nesystematické nepravidelnosti, které nemají racionální vysvětlení a které vznikly v důsledku toho, že „hladké“ teoretické pravděpodobnosti úmrtí jsou odhadovány statistickými postupy z reálných dat [2].

Graduace měř úmrtnosti je technika používaná pro výpočet modifikovaných posloupností odhadů, které mají vysoký stupeň hladkosti s rozumným přizpůsobením se posloupnosti prvotních odhadů.

Vyrovnávání úmrtnostních tabulek se doporučuje používat tehdy, když si pojišťovny či penzijní fondy vytvářejí svoje vlastní úmrtnostní tabulky na základě relativně malých pojistných kmenů. Ve vyrovnaném tvaru jsou poskytovány národní úmrtnostní tabulky, které vytváří centrální statistické úřady.

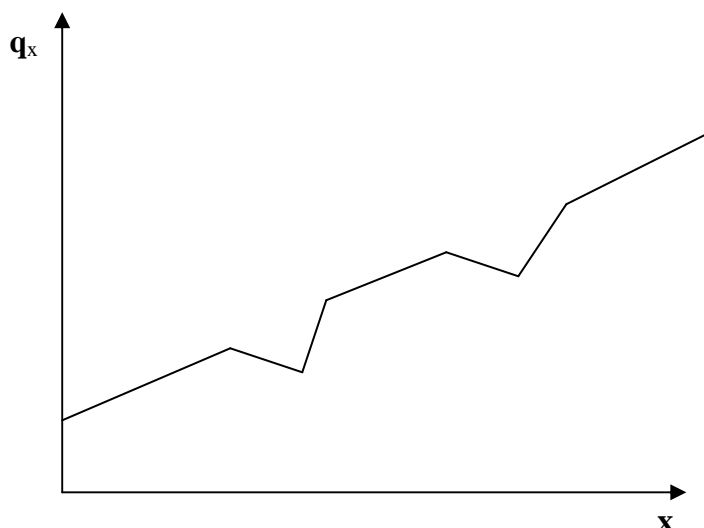
Úmrtnostní tabulky jsou konstruované statisticky na základě údajů o populaci, vypočítané odhady kolísají kolem skutečných hodnot. Někdy vzhledem k nešťastné shodě okolností při výběru dat můžou být odchylky vypočítaných hodnot od skutečnosti značné. Tento negativní jev se odstraňuje právě graduací.

Zkušený demograf či aktuár má základní představu jak má vypadat průběh hodnot q_x pro populaci v daném čase a v daném regionu. Většina aktuárských problémů souvisí s predikcí budoucích měř úmrtnosti a jiných demografických měř. Z praktického hlediska se vyžaduje vhodná aplikace statistických metod graduace, přičemž však v praxi často dochází k určitým nepřesnostem při vyrovnání.

Statistické odhady míry pravděpodobnosti q_x nebo intenzity úmrtnosti μ_x pro jednotlivé roky x , které dostaneme ze známých statistických modelů, jako jsou binomický nebo Poissonův model úmrtnosti se nazývají hrubé pozorování.

Vlastnosti odhadů q_x a μ_x [14]:

- každý odhad je jen jednou z možných hodnot výběrové charakteristiky a je zatížený výběrovou chybou,
- hrubé pozorování se mění rok od roku a jako důsledek nerovnoměrné náhodnosti jsou nepravidelné, tudíž křivka, kterou dostaneme jejich spojením není hladká.



Obrázek 7 - Ukázka hrubých pozorování [14]

Vyrováním docílíme nalezení přijatelně hladké křivky z hrubých odhadů q_x a μ_x , přičemž využijeme všechny statistické informace. Takto upravené odchylky se nazývají graduované míry a označujeme je symbolem \dot{q}_x a $\dot{\mu}_x$.

Cílem graduace je [14]:

- vyrovnat v úmrtnostních tabulkách hrubé pozorování dostatečně hladkou křivkou, vhodnou pro praktické aktuárské výpočty pro životní nebo důchodové pojištění, kde se vyžaduje pravidelný vývoj při přechodu mezi jednotlivými sousedními věky,
- využít informace z odhadů, získaných ze sousedních věků pro zdokonalení odhadů v každém věku x .

Graduované míry jsou přijatelné, platí-li následující podmínky:

- graduace je dostatečně hladká,
- graduované odhady jsou dostatečně přiblížené hrubým odhadům.

5.1 Ověřování přijatelnosti graduace

Přijatelná graduace musí být hladká a musí být přesná. Při dostatečně hladké graduaci se vyrovnané hodnoty měr úmrtnosti málo liší v okolí věku x , se kterým pracují. Dostatečně přesná graduace se vyrovnané hodnoty míry úmrtnosti přijatelně (ne příliš) liší od hrubé míry úmrtnosti v každém věku x [14].

5.1.1 Ověřování hladkosti graduovaných údajů

Přesné matematické definice hladkosti vyžaduje existenci derivací libovolného řádu vyrovnávací funkce. Tato definice připouští graduace, které nejsou přijatelné z hlediska praktického, a to polynomy vyššího jak třetího řádu. Základním kritériem hladkosti je to, aby třetí diference graduovaných odhadů byla co nejmenší a její průběh byl pravidelný.

Na posouzení hladkosti graduace měř q_x vypočítáme [14]:

- první diferenci $\Delta 1 = \Delta \dot{q}_x = \dot{q}_x - \dot{q}_{x-1}$,
- druhou diferenci $\Delta 2 = \Delta^2 \dot{q}_x = \Delta \dot{q}_x - \Delta \dot{q}_{x-1}$,
- třetí diferenci $\Delta 3 = \Delta^3 \dot{q}_x = \Delta^2 \dot{q}_x - \Delta^2 \dot{q}_{x-1}$.

Avšak definitivní závěr o dostatečné hladkosti graduace nelze jednoznačně utvořit, protože posouzení skutečnosti, zda jsou třetí diference dostatečně malé a pravidelné je značně subjektivní [14].

Z tohoto důvodu se třetí diference využívají častěji při porovnání výsledků graduace pomocí vícero metod. Vypočítají se součty absolutních hodnot třetích diferencí graduovaných měř

$Abs = \sum_x |\Delta^3 q_x|$ pomocí každé zvolené metody a nejlepší graduace z hlediska posouzení

hladkosti je ta, při které je tato suma minimální.

Veškeré graduované míry v této práci byly získány graduací měř úmrtnosti pomocí funkce klouzavých průměrů pro 3 (tabulka č. 12) a 9 hodnot (příloha č. 3) a dále pomocí funkce Wittsteina (příloha č. 4) a Spensera (příloha č. 5, 6).

Tabulka 12 - Graduace pomocí funkce klouzavých průměrů pro 3 hodnoty, Muži, SR 2006, MS Excel

[vlastní]

mv 1 - 3b			
$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	Abs
0,00015785			
7,9118E-05	-7,87302E-05		
0,00016047	8,13554E-05	0,00016009	0,000160086
5,124E-05	-0,000109234	-0,00019059	0,000190589
1,552E-05	-3,57202E-05	7,3514E-05	7,35138E-05
0,00033624	0,000320719	0,00035644	0,000356439
0,0003397	3,46328E-06	-0,00031726	0,000317255
0,00045125	0,000111546	0,00010808	0,000108083
5,0182E-05	-0,000401065	-0,00051261	0,000512612
0,00022163	0,00017145	0,00057252	0,000572515
5,7586E-05	-0,000164046	-0,0003355	0,000335495
0,00061318	0,000555596	0,00071964	0,000719642
0,00043391	-0,000179268	-0,00073486	0,000734864
0,00067353	0,000239616	0,00041888	0,000418885
0,00052184	-0,000151691	-0,00039131	0,000391307
0,00057249	5,06527E-05	0,00020234	0,000202343
0,00101236	0,000439869	0,00038922	0,000389217
0,00054212	-0,000470238	-0,00091011	0,000910108
0,00093342	0,000391292	0,00086153	0,00086153
0,0006281	-0,000305315	-0,00069661	0,000696608
			0,007951092

Tabulka 13 - Výsledky jednotlivých funkcí graduací

Abs mv1 - 3b	0,007951
Abs mv1 - 9b	0,000582
Abs mv1 - Witt	0,000222
Abs mv1 - Sp.15b	0,000314
Abs mv1 - Sp.21b	0,000129

Z tabulky č. 13 je zřejmé, že nejhladší jsou graduované míry úmrtnosti pomocí neparametrické metody Spenserovy 21 bodové.

5.1.2 Testování přesnosti graduovaných údajů

V praxi se často používá binomický model pro údaje q_x a Poissonův model pro hodnoty μ_x . Binomický model řeší reálnou situaci, kdy předpokládáme pozorování n_x osob. Platí, že úmrtnost těchto osob je nezávislá, dále předpokládáme, že všechny pozorované osoby dosáhli na začátku pozorování věk přesně x roků. Pozorování trvá jeden rok. V případě, že osoba z tohoto souboru zemře v době pozorování, toto úmrtí se zaznamená. Teda na konci období bude k dispozici výsledný počet úmrtí $d_x \in (0, 1, 2, \dots, n_x)$ [14].

Pravděpodobnost přežití v tomto pozorovaném období označujeme q_x , kde x je věk dané osoby na začátku pozorování. Pravděpodobnost, že daná osoba přežije alespoň jeden rok je $1 - q_x$. Můžeme předpokládat, že D - náhodná proměnná počtu úmrtí má binomické rozdělení pravděpodobnosti s parametry n_x a q_x . Pravděpodobnost nastání d_x úmrtí po dobu jednoho roku je:

$$\text{je: } P(D = d_x) = \binom{n_x}{d_x} q_x^{d_x} (1 - q_x)^{n_x - d_x}, \text{ kde } d_x = 0, 1, 2, \dots, n_x.$$

Binomický model umožňuje odhadnout pravděpodobnosti nastání určitého počtu úmrtí tehdy, když je známá pravděpodobnost úmrtí q_x , popřípadě přežití $1 - q_x$.

Poissonův model má široké uplatnění při odhadu pravděpodobností počtu takových škod, ke kterým dochází po určité časové období a to na základě údajů výběrového souboru s velkým rozsahem. Je jím možno odhadovat přiměřený počet úmrtí v souboru velkého počtu osob, které mají stejný věk. Zakládá se na Poissonovém rozdělení pravděpodobnosti s parametrem λ [14].

$$\text{Pravděpodobnostní funkce: } P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \text{ kde } x = 0, 1, 2, \dots$$

Při testování dostatečného přiblížení měř úmrtnosti se ptáme, zda počet pozorovaných zemřelých D_x v každé věkové skupině je blízký očekávanému počtu na základě graduace. Při dostatečně velkém počtu pozorovaných osob na základě Moivre-Laplaceovy centrální limitní věty mají pozorování D_x přibližné normální rozdělení. Normovaná proměnná Z_x má normované normální rozdělení se střední hodnotou $E(D_x) = E_x * q_x$ a rozptylem $V(D_x) = E_x * q_x * p_x$.

Jestliže pro odhad q_x použijeme graduovanou hodnotu \dot{q}_x , proměnná Z_x má tvar [14]:

$$Z_x = \frac{D_x - E_x \dot{q}_x}{\sqrt{E_x \dot{q}_x (1 - \dot{q}_x)}} \text{ a platí } Z_x \sim N(0, 1).$$

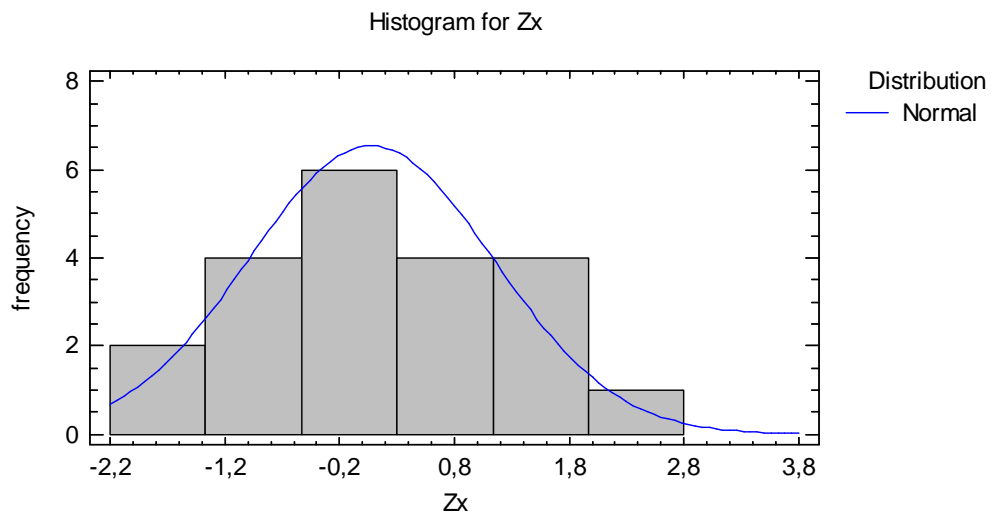
Tabulka 14 - Ukázka testování přesnosti graduovaných údajů, Muži, SR 2006, MS Excel [vlastní]

Věk	q Sp.21b	Dx	Lx	dg	Vd	Sd	Z _x
30	0,001173529	66	47484	55,72384	55,65845	7,460459	1,377416
31	0,001253406	55	46649	58,47013	58,39684	7,641782	-0,4541
32	0,001356401	64	45270	61,40426	61,32097	7,830771	0,331479
33	0,00148562	68	42682	63,40925	63,31505	7,957075	0,576939
34	0,001642794	66	40247	66,11751	66,0089	8,124586	-0,01446
35	0,001825102	61	38378	70,04377	69,91594	8,361575	-1,08159
36	0,002028848	62	37431	75,94182	75,78774	8,705616	-1,60147
37	0,002249892	96	36090	81,19861	81,01593	9,000885	1,644437
38	0,002488904	94	35301	87,86078	87,64211	9,361736	0,655777
39	0,002749793	112	36165	99,44627	99,17282	9,958555	1,260597
40	0,00304246	108	37427	113,8701	113,5237	10,65475	-0,55094
41	0,0033793	128	38619	130,5052	130,0642	11,40457	-0,21966
42	0,003775302	124	39016	147,2972	146,7411	12,11367	-1,92322
43	0,004241938	178	38072	161,4991	160,814	12,68125	1,301208
44	0,004783461	176	37895	181,2692	180,4022	13,43139	-0,39231
45	0,00539434	202	38554	207,9734	206,8515	14,38233	-0,41533
46	0,006061301	242	38445	233,0267	231,6143	15,21888	0,589615
47	0,006769347	250	38874	263,1516	261,3702	16,16695	-0,81349
48	0,007504916	336	40095	300,9096	298,6513	17,28153	2,030515
49	0,008260873	322	40834	337,3245	334,5379	18,29038	-0,83785
50	0,009034608	369	40706	367,7628	364,4402	19,09032	0,064809

Pro graduované míry úmrtnosti v tabulce č. 14 jsme vypočítali za účelem testování kvality graduace příslušnou hodnotu normované proměnné Z_x.

Uncensored Data - Z_x	
Data variable: Z _x	
21 values ranging from -1,92322 to 2,03052	
Fitted Distributions	
<i>Normal</i>	
mean =	0,0727801
standard deviation =	1,06775

Obrázek 8 - Střední hodnota a odchylka pro Z_x, STATGRAPHICS Centurion XV [vlastní]



Obrázek 9 - Histogram četnosti pro Z_x, STATGRAPHICS Centurion XV [vlastní]

Normalitu náhodné veličiny Z_x s maximálně věrohodným odhadem parametrů jsme otestovali Kolmogorovým-Smirnovovým testem (viz. obrázek č.10).

Kolmogorov-Smirnov Test	
	<i>Normal</i>
DPLUS	0,097002
DMINUS	0,105123
DN	0,105123
P-Value	0,974441

Obrázek 10 - Výsledek Kolmogorova-Smirnova testu, STATGRAPHICS Centurion XV [vlastní]

Základním testem pro ověření nulové hypotézy o dostatečné shodě mezi graduovanými a hrubými odhady je:

- χ^2 - test

Při testování přesnosti graduace využíváme χ^2 - statistiku reprezentovanou vztahem:

$$\chi^2 = \sum_x \frac{(D_x - E_x \dot{q}_x)^2}{E_x \dot{q}_x (1 - \dot{q}_x)},$$

která má rozdělení pravděpodobnosti $\chi^2(n)^8$, kde počet stupňů volnosti n je počet všech věkových skupin n . Vypočítanou hodnotu χ^2 statistiky nejčastěji porovnáváme s kvantilem $\chi_{0,95}^2$.

Goodness-of-Fit Tests for Zx					
Chi-Squared Test					
	Lower	Upper	Observed	Expected	
	Limit	Limit	Frequency	Frequency	Chi-Squared
at or below		-0,533333	6	5,99	0,00
	-0,533333	0,3	6	6,28	0,01
	0,3	1,133333	4	5,36	0,35
above	1,133333		5	3,37	0,79

Chi-Squared = 1,15277 with 1 d.f. P-Value = 0,282967

Since the smallest P-value amongst the tests performed is greater than or equal to 0,05, we can not reject the idea that Zx comes from a normal distribution with 95% confidence.

Obrázek 11 - χ^2 - test, STATGRAPHICS Centurion XV [vlastní]

Jelikož $p\text{-Value} \geq 0,05$, usuzujeme, že nulovou hypotézu nezamítáme, tedy neodmítáme předpoklad, že Z_x pochází z normálního rozdělení pravděpodobností s jistotou 95%. Tuto graduaci teda považujeme za dostatečně hladkou.

χ^2 - test není vždy dostatečně spolehlivý pro určení zda je graduace vyhovující. Některé vzniklé chyby není schopný odhalit.

Jde například o [14]:

- levostranné nebo pravostranné zešikmení rozdělení Δ_x ,
- nadměrné seskupení pozitivních nebo negativních odchylek Δ_x ,
- velký počet velmi malých odchylek a malý počet velmi velkých odchylek Δ_x , co zpochybňuje nezávislost odchylek Δ_x .

Pokud je výsledkem χ^2 - testu zamítnutí normality rozdělení Δ_x , respektive Z_x důvodem může být:

- existence několika velmi vysokých odchylek, nevyvážených velkým počtem malých odchylek,
- vysoká kumulativní odchylka části nebo celého věkového intervalu,

- přebytek velkých kladných nebo záporných odchylek v části nebo v celém věkovém intervalu,
- nadměrné seskupení odchylek stejného znaménka.

Na odhalení těchto nedostatků při graduaci využíváme dodatečné testy a těmi jsou [14]:

- znaménkový test,
- test kumulativních odchylek,
- test změny znamének,
- test seskupení znamének nebo-li Stevensův test.

5.1.3 Znaménkový test

Pokud normované odchylky Z_x nejsou levostranně nebo pravostranně zešikmené, potom libovolná hodnota odchylky Z_x by měla být kladná s pravděpodobností 0,5 a záporná také s touto pravděpodobností. Celkový počet kladných odchylek Z_x má binomické rozdělení pravděpodobnosti $Bi(n;0,5)$.

Graduaci na zvolené hladině významnosti α nepovažujeme za přijatelnou, pokud hodnota Z_x překročí kritické hodnoty, kterými jsou 2,5% a 97,5%-ní kvantily rozdělení $Bi(n;0,5)$.

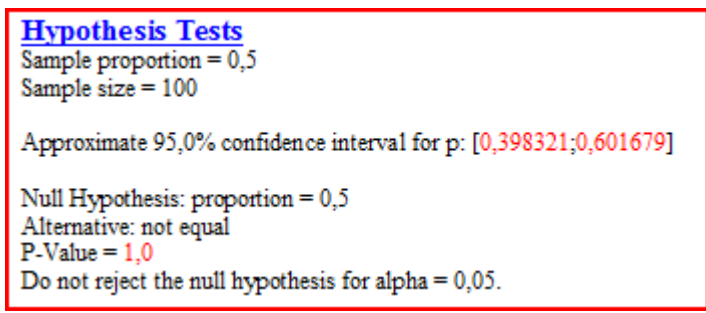
Test odhaluje nedostatky graduace při velkém počtu kladných, či záporných odchylek Z_x [10].

Z tabulky č. 14 jsme zjistili, že platí:

Tabulka 15 – Hodnoty znaménkového testu [vlastní]

Znaménkový test	
$Z+$	10
π	0,47619

Počet kladných hodnot $Z+$ dle tabulky č. 14 je 10 a $\pi = Z+/n$. N je celkový počet hodnot, tedy 21.



Obrázek 12 - Znaménkový test pro ověření binomického rozdělení, STATGRAPHICS Centurion XV [vlastní]

Na obrázku č. 12 jsme ověřili pomocí znaménkového testu, že počet kladných znamének má při této metodě binomické rozdělení pravděpodobností $Bi(n; 0,05)$. Protože $P\text{-Value} \geq 0,05$, nulovou hypotézu, která zní: „kladné znaménka mají $Bi(n; 0,05)$ “, nezamítáme.

5.1.4 Test kumulativních odchylek

Jestliže odchylky $\Delta_x = D_x - E_x \hat{q}_x$ mají normální rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou $E(\Delta_x) = 0$ a $V(\Delta_x) = E_x \hat{q}_x (1 - \hat{q}_x)$, pak kumulativní odchylky mají normální rozdělení pravděpodobnosti $N = \left[0; \sum_x (E_x \hat{q}_x (1 - \hat{q}_x)) \right]$. Výsledek graduace na hladině významnosti α

přijmeme pokud absolutní normované kumulované odchylky nepřesáhnou hodnoty kvantilu $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Tento test odhaluje nepřijatelnost graduace v důsledku velkých kumulativních odchylek

$\sum_x \Delta_x$ v části nebo v celém věkovém intervalu [10].

Hodnoty testovacího kritéria jsme si vypočítali v tabulce č. 14. Dle uvedené nerovnosti pro kritické hodnoty $z_{0,95} = 1,96$ a $-z_{0,95} = -1,96$ na hladině významnosti 0,05 je tato graduace přijatelná. Kumulativní odchylky mají normální rozdělení pravděpodobností.

5.1.5 Test změny znamének

Jsou-li normované odchylky Z_x nezávislé a mají-li normální rozdělení pravděpodobností $N(0, 1)$, pak s pravděpodobností 0,5 bude znaménko s pořadím $(x+1)$ stejné jako znaménko x -té odchylky. Celkový počet znaménkových změn bude mít $Bi(n-1; 0,5)$ rozdělení pravděpodobnosti.

Graduaci na hladině významnosti α nepřijmeme, pokud počet znaménkových změn překročí $(1-\alpha)*100$ -tý percentil rozdělení $Bi(n-1; 0,5)$ [10].

5.1.6 Stevensův test seskupení znamének

Odhaluje nadměrné seskupení stejných znamének odchylek $\Delta_x = D_x - E_x \dot{q}_x$. Předpokládá, že z odchylek Δ_x je n_1 kladných a n_2 záporných, přičemž $n_1 + n_2 = n$. Také předpokládá, že existuje t skupin kladných znamének.

Potom [1]:

- počet způsobů, kterými můžeme rozdělit n_1 kladných znamének do t skupin je:

$$\binom{n_1 - 1}{t - 1},$$

- počet způsobů, kterými můžeme rozdělit n_2 záporných znamének do t skupin je:

$$\binom{n_2 + 1}{t},$$

- celkový počet způsobů uspořádání n_1 a n_2 je:

$$\binom{n_1 + n_2}{n_1},$$

- výslednou hypergeometrickou pravděpodobnost toho, že dostaneme t skupin kladných znamének při počtu n_1 a n_2 vyjadřuje vztah:

$$\frac{\binom{n_1 - 1}{t - 1} * \binom{n_2 + 1}{t}}{\binom{n}{n_1}}.$$

Když Stevensova statistika: $\sum_t \frac{\binom{n_1 - 1}{t - 1} * \binom{n_2 + 1}{t}}{\binom{n}{n_1}} \leq 0,05$ graduaci nepovažujeme za přijatelnou.

Můžeme ji považovat za přijatelnou, když statistika přesáhne hodnotu 0,05 [10].

Střední hodnota M^+ a rozptyl V^+ počtu g seskupení kladných znamének má tvar:

$$M^+ = \frac{n_1 * (n_2 + 1)}{n},$$

$$V^+ = \frac{(n_1 * n_2)^2}{n^3}.$$

Rozhodnutí potom můžeme na hladině významnosti α přibližně udělat porovnáním hodnoty testovacího kritéria:

$$G = \frac{g - M^+}{\sqrt{V^+}},$$

s kvantilem $-z_{1-\alpha}$ normovaného normálního rozdělení.

Pokud platí, že $G \leq -z_{1-\alpha}$, graduace na hladině významnosti α není přijatelná.

Tabulka 16 - Hodnoty Stevensonova testu [vlastní]

Stevensonův test			
n1	10	M+	5,71429
n2	11	V+	1,30655
g	7	G	1,12481
n	21	$Z_{0,95}$	1,64485

V tabulce č. 16 můžeme vidět, že $G \geq -z_{1-\alpha}$, tedy je zřejmé, že je graduace přijatelná.

6 Metody graduace a jejich aplikace

Metody graduace můžeme rozdělit do následujících skupin [1]:

- **grafické metody**, které spočívají v nalezení hladké křivky v grafu vypočítaných hodnot q_x a μ_x grafickými metodami,
- **analytické (parametrické) metody**, spočívají ve statistickém odhadu parametrů vhodné hladké křivky vyjádřené analytickým vzorcem,
- **splínové metody** využívající několik různých křivek, které na sebe hladce navazují, ve smyslu derivací příslušného řádu v místě spojů,
- **graduace pomocí standardních tabulek**, při kterých se standardní tabulky měr úmrtnosti q_x^s považují za základní křivku hrubých měr q_x a graduované hodnoty \dot{q}_x dostaneme jako regresní funkce q_x^s ,
- **mechanické (neparametrické) vyrovnávání**, používá jednoduchý postup, kdy se graduovaná hodnoty \dot{q}_x pro daný věk x získá zprůměrováním hodnot z vhodné zvolené okolí věku x na principu klouzavých průměrů [14].

6.1 Grafická metoda graduace

Patří mezi nejrozšířenější techniky vyrovnávání. Předností je to, že je jednoduchá a poskytuje dobré výsledky i tehdy, když nemáme zcela úplné údaje. Posloupnost hrubých měr se zpřesní vyrovnáním pomocí diferencí, čímž získáme graduované míry, které splňují hladkost a pravdivost údajů. Tento proces se nazývá hand-polishing.

Míry úmrtnosti se počítají z dostupných údajů a graficky se znázorňují pomocí bodů. Načrtneme hladkou křivku, jejíž sklon naznačuje poloha bodů, co nejvíc přiblíženou k daným bodům [14].

Při této graduaci je vhodné naznačit do grafu i 95%-ní interval spolehlivosti pro pozorované hodnoty v každém věku. Hranice 95%-ního intervalu pro odhad q_x a μ_x získáme: $\dot{q}_x \pm 2 \frac{\sqrt{D_x}}{E_x}$

resp. $\dot{\mu}_x \pm 2 \frac{\sqrt{D_x}}{E_x}$.

Spojnice pozorovaných hodnot a horní a dolní hranice nám poskytují návod pro konstrukci hladké křivky pro graduaci. Křivka hladkosti by neměla překračovat přes hranice intervalu

spolehlivosti víckrát než jednou za 20 pozorování. Těsný úsek mezi intervaly spolehlivosti naznačuje velké hodnoty E, které mají nejvyšší vliv na hladkost křivky [14].

6.2 Analytické metody graduace

Může existovat analytická funkce, které všeobecný tvar odpovídá reálným údajům, které chceme graduovat. Taková křivka bude spojitá a hladká, takže otázkou zde není, zda je křivka dostatečně hladká, ale zda tvar zvolené křivky dostatečně vyhovuje reálným údajům. Mezi nejznámější metody graduace matematickou funkcí patří vyrovnání Gompertz-Makehamovou funkcí.

Gompertz ukázal na fyziologických základech, že interval úmrtnosti má konstantní růst ve věkových intervalech $(x, x+1)$. Pro míru úmrtnosti proto navrhl exponenciální růst dle vztahu: $q_x = B * c^x$, kde $B > 0, c > 1$, B, c jsou parametry.

Makeham zevšeobecnil Gompertzův vzorec na: $q_x = A + B * c^x$. Kde zavedl parametr $A > 0$ a exponenciálně rostoucí složku intenzity úmrtnosti na zdůraznění dvou rozdílných způsobů úmrtí. Těmi jsou náhodná a přirozená složka úmrtí. Makehamův zákon úmrtnosti v porovnání s ostatními úmrtnostními funkcemi dává nejlepší výsledky [14].

Pokud Gompertzův zákon platí, pak platí vztah: $-\ln(-\ln p_x) = \ln \left[\frac{\ln c}{B(c-1)} \right] - x \ln c$.

Grafem funkce $-\ln(-\ln p_x) = -\ln[-\ln(1-\dot{q}_x)]$ je přímka, která se dá využít na grafické ověření kvality graduace pomocí Gompertzova zákona.

Body $[x, \dot{q}_x]$, znázorňující graduované míry úmrtnosti pro věky x, leží přibližně na této přímce.

Odhady parametrů c a B můžeme získat z jejich směrnice k a průsečíku $y_{(x=0)}$ s osou y podle

vztahu: $\hat{c} = \exp(-k)$, $\hat{B} = \frac{\ln \hat{c}}{(\hat{c}-1)} \exp(-y_{(x=0)})$.

V Makehamově zákonu je konstanta A vždy malé kladné číslo a odhadujeme ji ze vztahu $\hat{A} = q_x - \hat{B} * \hat{c}^x$, kde za x vezmeme některou hodnotu středního věku, která pro hodnotu y, leží na přímce $y = -\ln[-\ln(1-\dot{q}_x)]$.

Graduovanou míru úmrtnosti \dot{q}_x můžeme počítat: $\dot{q}_x = 1 - \exp \left[-\hat{A} - \frac{\hat{B}(\hat{c}-1)}{\ln \hat{c}} * \hat{c}^x \right]$.

Zásadním problémem aplikace uvedených vztahů pro graduaci úmrtnostních tabulek analytickými metodami byl odhad parametrů. Moderní výpočtová technika umožňuje jejich odhad pomocí statistických metod, které zaručují jejich optimální vlastnosti. Jimi jsou [14]:

- metoda maximální věrohodnosti,
- metoda nejmenších čtverců,
- minimalizace statistiky χ^2 .

6.2.1 Metoda maximální věrohodnosti

Odhady parametrů touto metodou mají mnoho výhod. Z tohoto důvodu je tato metoda nepoužívanější. Princip spočívá v tom, že na odhad by se měla používat ta hodnota, která maximalizuje funkci věrohodnosti [14].

Když je E_x vystavení se riziku ve věku x a q_x je pravděpodobnost úmrtí v tomto věku, pak pozorovaný počet úmrtí D_x má binomické rozdělení pravděpodobností s parametry E_x a q_x .

Funkce věrohodnosti je dána vztahem: $L = \prod_x \binom{E_x}{D_x} q_x^{D_x} p_x^{E_x - D_x}$, kde E_x a D_x jsou známé hodnoty. Pravděpodobnost úmrtí ve věku x , tedy q_x a pravděpodobnost dožití se věku x , p_x jsou neznámé parametry.

Odhady neznámých parametrů metodou maximální věrohodnosti jsou hodnoty, které maximalizují vztah $L = \prod_x \binom{E_x}{D_x} q_x^{D_x} p_x^{E_x - D_x}$. Tyto hodnoty maximalizují i logaritmus tohoto

výrazu: $\ln L = \sum_x \left[\ln \binom{E_x}{D_x} + D_x \ln q_x + (E_x - D_x) p_x \right]$.

Protože první člen pravé strany je známý a konstantní, můžeme předpokládat, že odhady jsou ty hodnoty, které maximalizují výraz: $\Lambda = \sum_x \left[D_x \ln q_x + (E_x - D_x) p_x \right]$. Systém rovnic pro odhady neznámých parametrů získáme tak, že první parciální derivace Λ (podle parametrů) položíme rovno nule. Výsledné rovnice jsou komplikované a proto byly vytvořené algoritmy na využití výpočtové techniky na jejich řešení [14].

6.2.2 Metoda nejmenších čtverců

Funkce $\dot{q}_x = Q(x)$ obsahuje neznámé parametry a, b, c, \dots .

Metoda zaručuje, že vzdálenost mezi vyrovnanými a pozorovanými hodnotami jsou minimální.

Minimalizuje součet čtverců těchto vzdáleností, tedy $\sum_x [q_x - \hat{q}_x]^2 = \min$.

Podmínkou použití je konstantní rozptyl hodnot q_x pro všechny věky x , což však reálně neplatí. Proto tuto metodu musíme modifikovat na váženou metodu nejmenších čtverců. Když je rozptyl pozorování q_x proporcionální hodnotě w_x , pak $\sum_x w_x [q_x - \hat{q}_x]^2 = \min$, kde w_x jsou váhy.

Všechny rozsáhlejší počítačové systémy mají programové balíky, které jsou schopny řešit vyhlazení křivek pomocí metody nejmenších čtverců a umožňují použít na vyrovnání i složité funkce, např. polynomy vyšších stupňů, funkce, které se nedají linearizovat [14].

6.3 Graduace použitím splínové metody

V praxi je velice důležité a užitečné, když při graduaci použijeme několik různých funkcí, které na sebe hladce navazují. Funkce takto používané mohou být v jednoduchém tvaru, jako jsou polynomy. Při použití metody při použití vysokého stupně polynomu, rozdělíme interval trvání lidského života na několik úseků a pro každý tento úsek použijeme na graduaci polynom nižšího stupně. Hladká funkce vznikne spojením dílčích funkcí z jednotlivých úseků. Dostatečná hladkost v bodech spojitosti se zabezpečí požadavkem na existenci oboustranných derivací příslušného stupně jednotlivých funkcí. Systém STATGRAPHICS Centurion XV neobsahuje proceduru na aplikaci této metody [14].

6.4 Graduace pomocí standardních tabulek

Pokud chceme vyhlazovat relativně malý počet údajů q_x (resp. μ_x), je možné použít informace ze standardních tabulek, které jsou založené na velkém počtu údajů. Odhadované (graduované) hodnoty \hat{q}_x dostaneme jako jednoduché regresní funkce standardizovaných tabulkových měř q_x^s , tedy $\hat{q}_x = f(q_x^s)$, tak aby byla splněna podmínka metody nejmenších čtverců [14]:

$$\sum_x [q_x - f(q_x^s)]^2 = \min.$$

Tyto funkce mohou mít tvar:

- $\hat{q}_x = a * q_x^s$,
- $\hat{q}_x = a * q_x^s + b$,

- $\hat{q}_x = (ax+b) \cdot q_x^s$,
- $\hat{q}_x = q_{x+k}^s$,
- $\hat{q}_x = aq_x^s + bq_x^s$.

Prvním krokem pro použití této metody je výběr vhodných standardních tabulek, například pro životní nebo důchodové pojištění.

V dalším kroku najdeme vhodný funkční vztah mezi \hat{q}_x a q_x^s a odhadneme parametry.

Předpokládejme, že chceme odhadnout vyrovnané míry úmrtnosti \hat{q}_x dle funkce $\hat{q}_x = a \cdot q_x^s + b$.

Obě dvě strany rovnosti vynásobíme hodnotou E_x a dostaneme:

$$E_x \hat{q}_x = E_x q_x^s a + b E_x.$$

Protože $D_x = E_x \hat{q}_x$, platí $D_x = E_x q_x^s a + b E_x$ pro všechny x . Potom:

$$\sum_x D_x = a \sum_x E_x q_x^s + b \sum_x E_x.$$

Přitom $E_x q_x^s$ je očekávaný počet úmrtí ve věku x podle standardních tabulek a $E_x \hat{q}_x$ je očekávaný počet úmrtí ve věku x podle odhadované úmrtnostní tabulky.

V každém věku můžeme vypočítat parciální sumy D_x , $E_x q_x^s$ a E_x ve tvaru:

$$\sum_{y \leq x} D_y, \sum_{y \leq x} E_y q_y^s, \sum_{y \leq x} E_y.$$

Potom dostáváme systém rovnic:

$$\sum_{y \leq x} D_y = a \cdot \sum_{y \leq x} E_y q_y^s + b \cdot \sum_{y \leq x} E_y$$

$$\sum_x \sum_{y \leq x} D_y = a \cdot \sum_x \sum_{y \leq x} E_y q_y^s + b \cdot \sum_x \sum_{y \leq x} E_y.$$

Použití této metody v praxi není vždy optimální, ale je jednoduché, pokud je počet parametrů menší nebo roven třem, (tedy ≤ 3) [14].

6.5 Neparametrické metody graduace

Pro neparametrické metody graduace se v literatuře používá i název mechanické vyrovnávání úmrtnostních tabulek. Pro svoji výpočtovou jednoduchost patří k nepoužívanějším metodám vyhlazování.

Vyrovnanou míru úmrtnosti \hat{q}_x (resp. $\hat{\mu}_x$) pro daný věk x pomocí neparametrických metod získáme vytvořením průměru hrubých měr úmrtnosti q_x z vhodně zvoleného okolí věku x . Přitom většinou jde o vážený průměr, který přikládá zprůměrovaným hodnotám tím menší

váhu, čím jsou vzdálenější od věku x , tj. od středu příslušného okolí. Váhy jsou obyčejně symetrické okolo svého středu a jejich součet je vždy rovný hodnotě 1 [14].

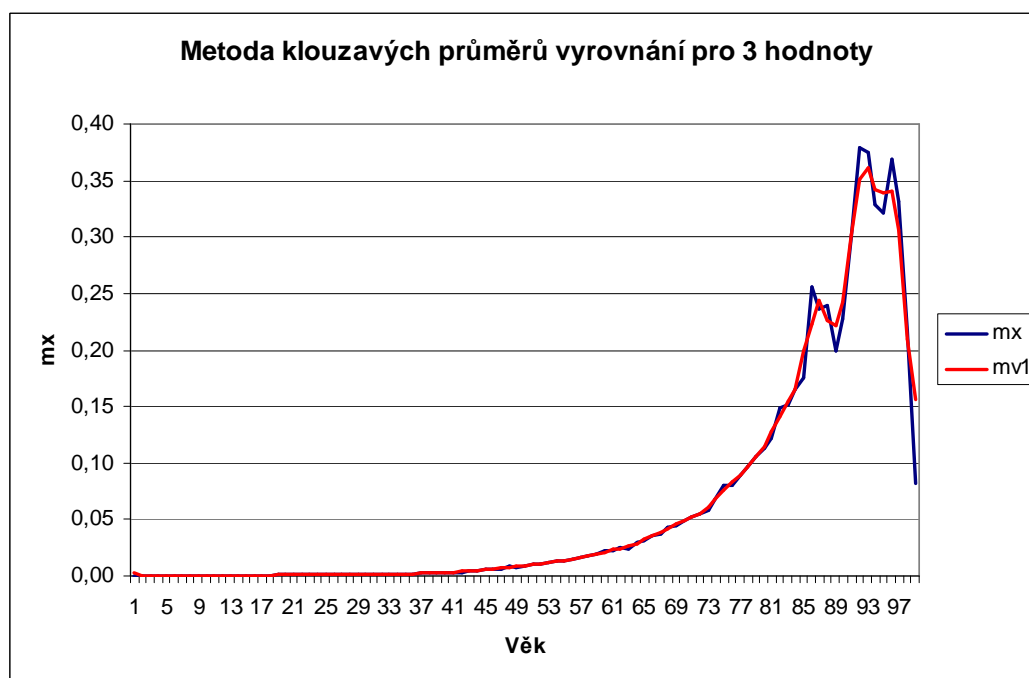
6.5.1 Vyrovnání jednoduchými klouzavými průměry

Vzorců pro výpočet klouzavých průměrů je celá řada. Tvar závisí na počtu hodnot zahrnutých do zvoleného okolí klouzavého průměru. Zpravidla jde o lichý počet hodnot, kterými vyrovnáváme prostřední hodnotu. Váhy pro vážený průměr lze zvolit libovolně a jejich suma musí být rovna jedné.

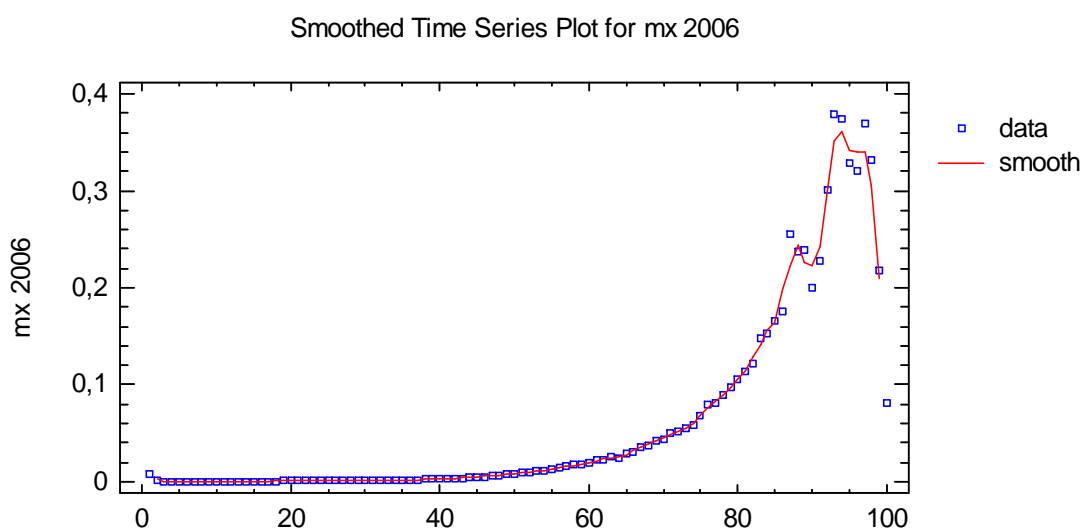
Nejjednodušším průměrem je **prostý klouzavý průměr ze 3 hodnot** [6]:

$$\tilde{m}_x^{(3)} = \frac{m_{x-1} + m_x + m_{x+1}}{3},$$

pro $x \in \langle 3; z-1 \rangle$, kde z je nejvyšší věk, pro který máme vypočtenou specifickou míru úmrtnosti. Vyrovnanou hodnotu počítáme jako průměr specifických měr úmrtnosti osob o rok mladších, osob v daném věku a osob o rok starších. Tento vzorec tedy není vhodné použít pro osoby ve věku 1 rok. Úmrtnost nula letých je značně vyšší než úmrtnost pro další jednotky dětského věku. Vzorec není vhodný pro příliš nízké ani vysoké věky [14].



Obrázek 13 - Prostý klouzavý průměr délky 3, Muži, SR 2006, MS Excel [vlastní]



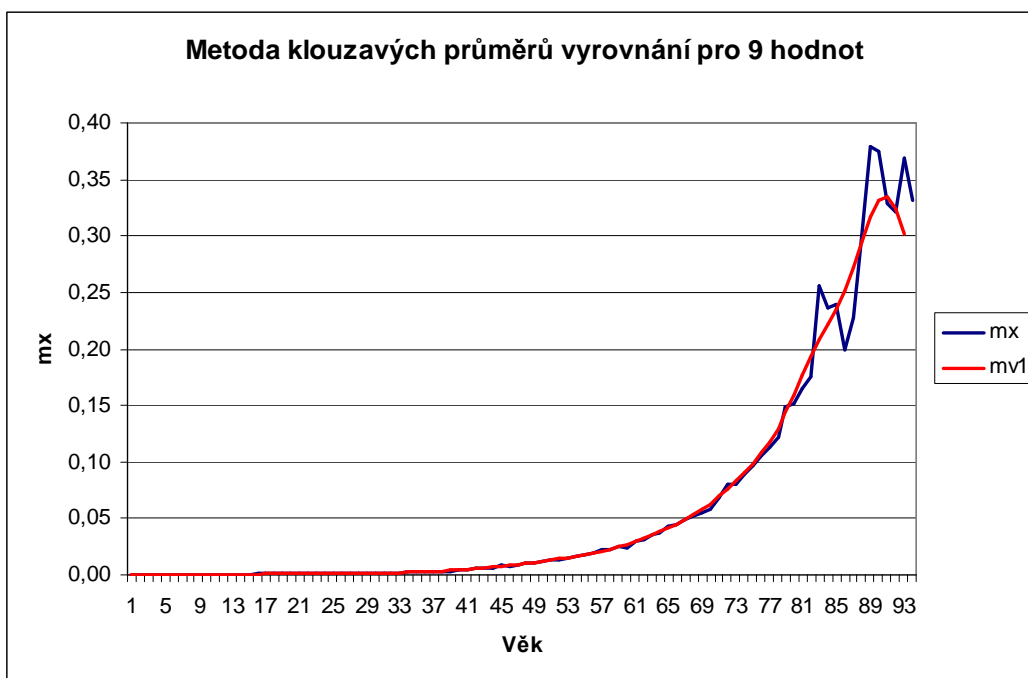
Obrázek 14 - Prostý klouzavý průměr délky 3, Muži, SR 2006, STATGRAPHICS Centurion XV [vlastní]

Vážený klouzavý průměr pro 3 hodnoty jsme použili pro vyrovnání měr úmrtnosti m_x z úmrtnostní tabulky v příloze č. 1 (tedy pro úmrtnostní tabulku Muži, SR 2006). Byla využita procedura *Smoothing* v panelu *Describe, Time series* v systému STATGRAPHICS Centurion XV. V kolonce *Length of Moving Average* byla nastavena hodnota 3. Graduované míry jsou označeny jako *smooth*. Grafický průběh hodnot m_x a graduovaných měr *smooth* můžeme vidět na obrázku 14. Na ose x leží data m_x a na ose y jsou hodnoty věku.

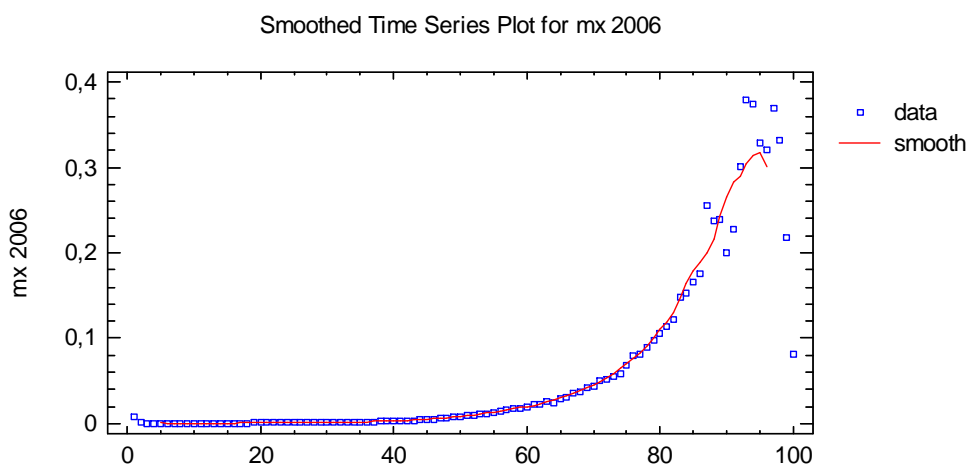
Vážený klouzavý průměr z 9 hodnot:

$$\tilde{m}_x^{(9)} = 0,2 * m_x + 0,16 * (m_{x-1} + m_{x+1}) + 0,12 * (m_{x-2} + m_{x+2}) + 0,08 * (m_{x-3} + m_{x+3}) + 0,04 * (m_{x-4} + m_{x+4}),$$

pro $x \in \langle 6; z-4 \rangle$, kde z je nejvyšší věk, pro který máme vypočítanou specifickou míru úmrtnosti. Buňky v souboru Excel pro věk 0 až 4 let zůstanou prázdné, do buňky pro věk 5 let zapíšeme příslušný vzorec [6].



Obrázek 15 –Vážený klouzavý průměr pro 9 hodnot, Muži, SR 2006, MS Excel [vlastní]



Obrázek 16 - Vážený klouzavý průměr pro 9 hodnot, Muži, SR 2006, STATGRAPHICS Centurion XV [vlastní]

Vážený klouzavý průměr pro 9 hodnot je graficky znázorněn na obrázku č. 16. Vyrovnávali jsme hodnoty m_x z úmrtnostní tabulky v příloze č. 1. Opět byla využita procedura *Smoothing* v panelu *Describe, Time series* v systému STATGRAPHICS Centurion XV. V kolonce *Lenght of Moving Average* byla nastavena hodnota 9. Graduované míry jsou označené jako *smooth*. Na ose x leží data m_x a na ose y jsou hodnoty věku.

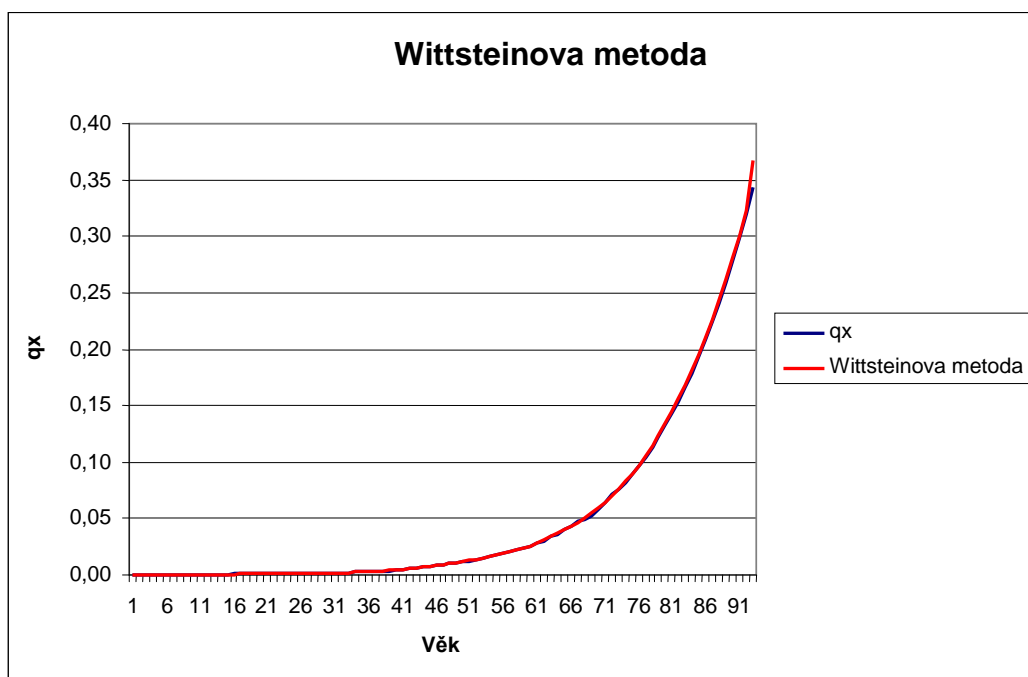
6.5.2 Wittsteinova metoda

Je to jedna z nejpoužívanějších metod tohoto typu, kdy se vyrovnaná hodnota počítá jako vážený průměr:

$$\dot{q}_x^w = \frac{1}{25} [5q_x + 4(q_{x-1} + q_{x+1}) + 3(q_{x-2} + q_{x+2}) + 2(q_{x-3} + q_{x+3}) + (q_{x-4} + q_{x+4})].$$

Vyrovnání podle tohoto vzorce je ekvivalentní postupu, při kterém se dvakrát za sebou aplikuje jednoduché aritmetické průměrkování délky 5 tvaru [14]:

$$\frac{1}{5}(q_{x-2} + q_{x-1} + q_x + q_{x+1} + q_{x+2}).$$



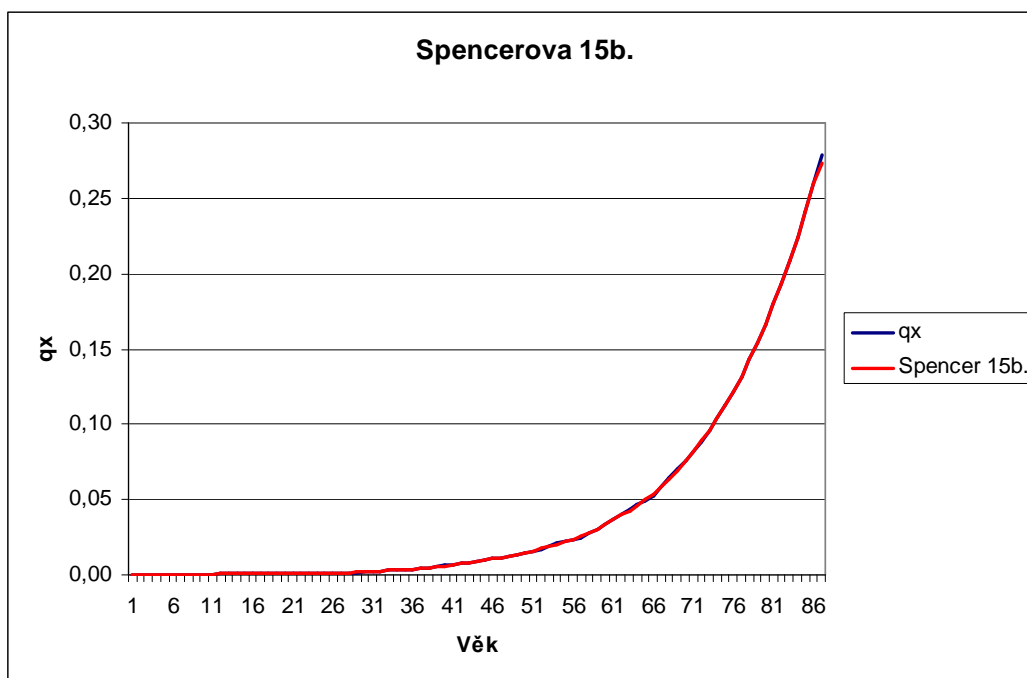
Obrázek 17 - Wittsteinova metoda, Muži, SR 2006, MS Excel [vlastní]

Tato metoda nelze provést pomocí STATGRAPHICS Centurion XV.

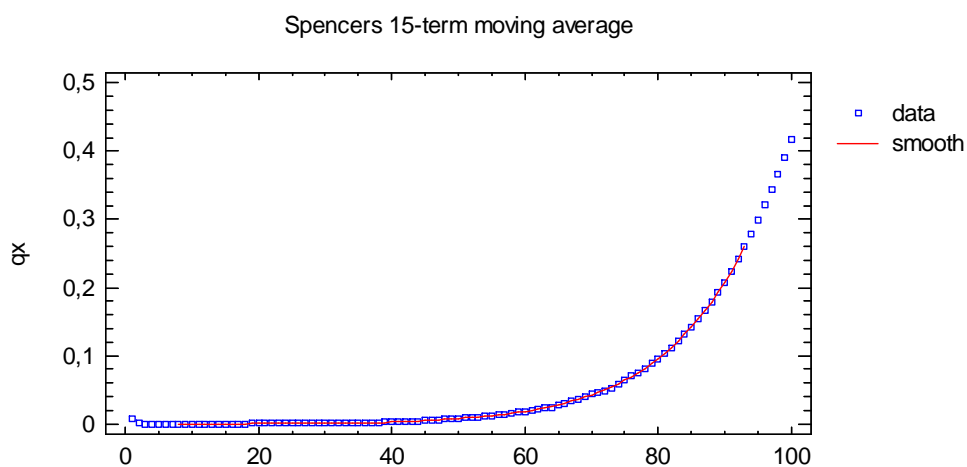
6.5.3 Spenserova metoda 15 bodová

Vyrovnávání pomocí této metody je vlastně aplikace metody vážených klouzavých průměrů délky $2m+1=15$, kde vyrovnanou hodnotu míry úmrtnosti pro věk x dostaneme podle vztahu [14]:

$$\dot{q}_x^{s(15)} = \frac{1}{320} \left[74q_x + 67(q_{x-1} + q_{x+1}) + 46(q_{x-2} + q_{x+2}) + 21(q_{x-3} + q_{x+3}) + 3(q_{x-4} + q_{x+4}) - \right. \\ \left. -5(q_{x-5} + q_{x+5}) - 6(q_{x-6} + q_{x+6}) - 3(q_{x-7} + q_{x+7}) \right].$$



Obrázek 18 - Spenserova metoda (15 bodová), Muži, SR 2006, MS Excel [vlastní]



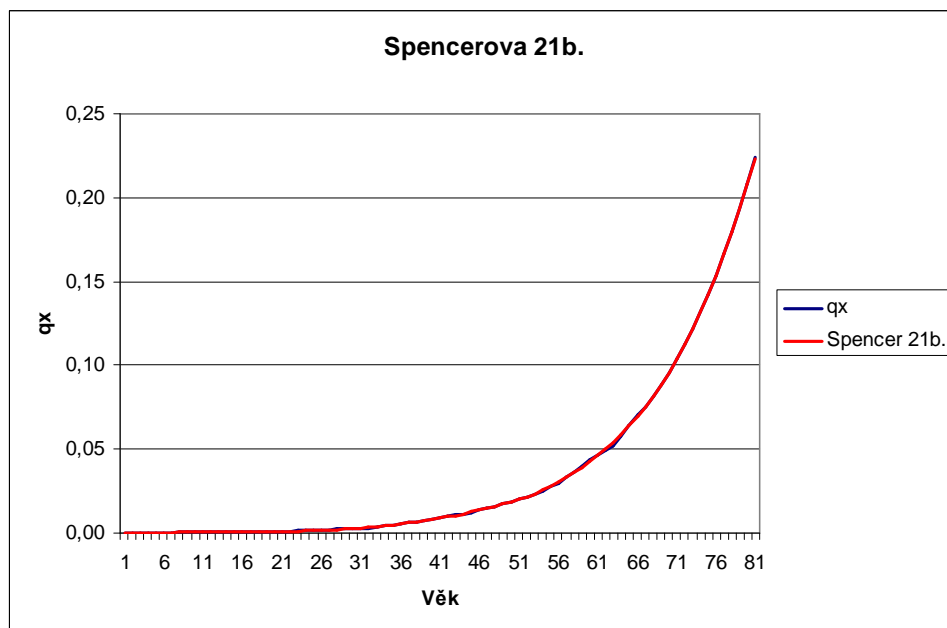
Obrázek 19 - Spenserova metoda (15 bodová), Muži, SR 2006, STATGRAPHICS Centurion XV [vlastní]

Spenserovu 15 bodovou metodu graduace jsme též použili na vyrovnání měr úmrtnosti Muži, SR 2006 pomocí procedury *Smoothing* v systému STATGRAPHICS Centurion XV. Graduované míry jsou popsány jako *smooth* a jejich grafický průběh spolu s vyrovnávanými mírami úmrtností q_x můžeme vidět na obrázku č. 19. Na ose x je q_x a na ose y pozorujeme věk.

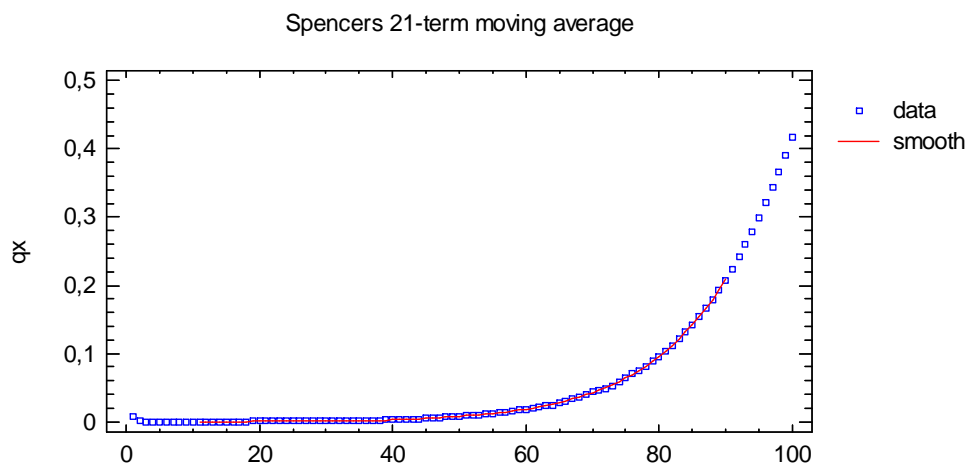
6.5.4 Spenserova metoda 21 bodová

Pomocí této metody je pro vyrovnání měř úmrtnosti použitá metoda vážených klouzavých průměrů délky $2m + 1 = 21$. Vyrovnanou hodnotu míry úmrtnosti pro věk x dostaneme podle vztahu [14]:

$$\dot{q}_x^{s(21)} = \frac{1}{350} \left[\begin{array}{l} 60q_x + 57(q_{x-1} + q_{x+1}) + 47(q_{x-2} + q_{x+2}) + 33(q_{x-3} + q_{x+3}) + 18(q_{x-4} + q_{x+4}) + \\ + 6(q_{x-5} + q_{x+5}) - 2(q_{x-6} + q_{x+6}) - 5(q_{x-7} + q_{x+7}) - 5(q_{x-8} + q_{x+8}) - 3(q_{x-9} + q_{x+9}) - \\ - (q_{x-10} + q_{x+10}) \end{array} \right].$$



Obrázek 20 - Spenserova metoda (21 bodová), Muži, SR 2006, MS Excel [vlastní]



Obrázek 21 - Spenserova metoda (21 bodová), Muži, SR 2006, STATGRAPHICS Centurion XV [vlastní]

Také Spenserovu 21 bodovou metodu graduace jsme použili na vyrovnání měr úmrtnosti pro Muže, SR 2006 pomocí procedury *Smoothing* v systému STATGRAPHICS Centurion XV. Graduované míry *smooth* i jejich grafický průběh spolu s vyrovnávanými mírami úmrtností q_x můžeme vidět na obrázku č. 21. Na ose x je q_x a na ose y pozorujeme věk.

6.5.5 Hendersonova metoda

Při této neparametrické metodě se váhy klouzavých průměrů hledají pomocí optimalizace.

Nechť $q = \{q_{x_0}, q_{x_0+1}, \dots, q_{x_0+n}\}'$ označuje sloupcový vektor odhadnutých pravděpodobností úmrtí délky $n+1$ a necht' $\dot{q} = \{\dot{q}_{x_0}, \dot{q}_{x_0+1}, \dots, \dot{q}_{x_0+n}\}'$ označuje hladký vektor vyrovnaných měr úmrtnosti.

Metoda spočívá v optimalizační proceduře [14]:

$$\min \left\{ \sum_{k=0}^n w_k * (\dot{q}_{x_0+k} + \dot{q}_{x_0+k})^2 + g \sum_{k=0}^{n-d} (\Delta^d \dot{q}_{x_0+k})^2 \right\}$$

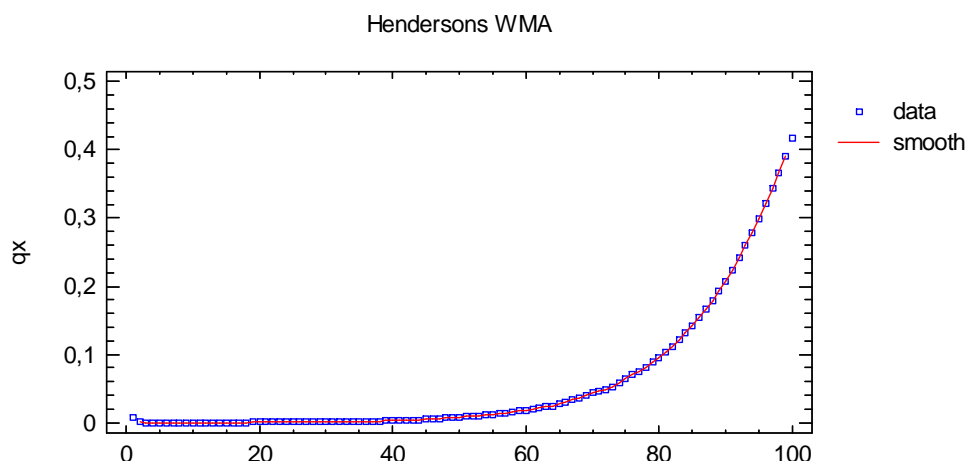
pomocí které hledáme vektor q vyrovnáním původního vektoru q metodou nejmenších čtverců s přihlédnutím ke stupni hladkosti vyrovnaných hodnot, vyjádřených pomocí součtu čtverců d -tých diferencí

$$\Delta^d \dot{q}_{x_0+k} = \Delta^{d-1} \dot{q}_{x_0+k} - \Delta^{d-1} \dot{q}_{x_0+k+1} = \dots = \sum_{i=0}^d (-1)^i \binom{d}{i} \dot{q}_{x_0+k+i}.$$

Přitom w_0, w_1, \dots, w_n jsou předem zvolené kladné váhy, například typu:

$$w_k = \frac{L_{x_0+k}}{\sum_{j=0}^n L_{x_0+j}},$$

kde L_{x_0+k} je uvažovaný počet $(x_0 + k)$ -ročních v daném pojistném kmeni a g je další dopředu zvolený kladný koeficient, který řadí stupeň hladkosti vyrovnaných hodnot [14].



Obrázek 22 - Hendersonova metoda, Muži, SR 2006, STATGRAPHICS Centurion XV [vlastní]

Míry úmrtnosti q_x jsme vyrovnali i pomocí Hendersonovy neparametrické metody v systému STATGRAPHICS Centurion XV za použití funkce *Smooth*. Graduované míry označené jako *smooth* a hodnoty vyrovnávaných dat q_x jsou na obrázku č. 22.

6.5.6 Schärtlingova 9 bodová metoda

Tato metoda je dalším příkladem mechanického vyrovnávání úmrtnostních tabulek pomocí klouzavých průměrů, které mají obecně tvar:

$$\hat{q}_x = \sum_{k=-r}^s a_k * q_{x+k} .$$

Pro vhodný systém vah $\{a_k\}$. V případě Schärtlingovy 9-ti bodové metody se konkrétně jedná o vzorec:

$$\hat{q}_x = \frac{1}{27} (-q_{x-4} + 2q_{x-2} + 8q_{x-1} + 9q_x + 8q_{x+1} + 2q_{x+2} - q_{x+4}) .$$

Označení 9-ti bodová metoda je dáno tím, že klouzavý průměr je aplikován na „okno“ vstupních hodnot $\{q_{x-4}, q_{x-3}, \dots, q_{x+3}, q_{x+4}\}$ o délce 9 bez ohledu na to, že váhy u q_{x-3} a q_{x+3} jsou nulové [14].

7 Konstrukce úmrtnostní tabulky pro vysoké věky

Ve většině literatury se uvádí, že specifické míry úmrtnosti má smysl určovat zhruba do věku 85 let. Tedy, že intenzity úmrtnosti můžeme odhadovat zhruba do věku 85 let. Vystává otázka, jak odhadovat intenzity úmrtnosti pro vyšší věky.

Už v roce 1825 Benjamin Gompertz řekl: „Schopnosti jedince odolávat destrukci ubývá s věkem úměrně velikosti této schopnosti. Gompertzův výrok můžeme zapsat jako

$$\frac{d\left(\frac{1}{\mu(x)}\right)}{dx} = -h * \frac{1}{\mu(x)}, h > 0,$$

chápeme-li „odolnost vůči destrukci“ jako úmrtnost a měříme-li jí převrácenou hodnotou intenzity úmrtnosti. Na levé straně je úbytek „odolnosti vůči destrukci“ za infinitezimální časový interval a na pravé je tento úbytek vyjádřen jako poměrná část ze své hodnoty. Předpokládáme kladnou konstantu úměrnosti, proto je úbytek vyznačen znaménkem mínus. Jde o jednoduchou diferenciální rovnici, kterou řešíme tak, že se formálně oddělí proměnné x a $\mu(x)$, a obě strany se integrují [7]:

$$\int \frac{d\left(\frac{1}{\mu(x)}\right)}{\frac{1}{\mu(x)}} = \int -h dx + konst.$$

Primitivní funkce na obou stranách:

$$\ln\left(\frac{1}{\mu(x)}\right) = -h * x + konst$$

Z tohoto vztahu vyvodíme, že konstanta musí být kladná. Kdyby byla menší nebo rovna nule, musela by být levá strana záporná, tedy podíl $1/\mu(x)$ by musel být menší než jedna a tedy $\mu(x) > 1$, a to pro všechna x . Taková intenzita úmrtnosti je nesmyslná, znamenalo by to, že každý rok by umíralo tolik osob, kolik odpovídá střednímu stavu.

Po úpravě :

$$\mu(x) = e^{-konst * x}.$$

Pro jednoduchost označíme e^{-konst} písmenem b a e^h písmenem c , tedy: $\mu(x) = bc^x$.

Při aplikaci tohoto jednoduchého modelu dosáhl Gompertz mnohem lepších výsledků. V roce 1887 přišel William Matthew Makeham na myšlenku rozdělit příčiny smrti na příčiny, které souvisí s věkem a na ty, které s věkem nesouvisí. Tímto rozdělením přibyl v rovnici další parametr pro tato s věkem nesouvisící úmrtí [7]:

$\mu(x) = a + bc^x$, platí $c > 1$, $0 < b < 1$.

Ani při aplikaci tohoto modelu nedosáhneme příliš dobrého vyrovnání, pokud se budeme snažit vyrovnat úmrtnost v celém věkovém rozpětí. Tento vzorec je vhodné pro aplikaci graduace úmrtnosti jen pro vyšší věky, kdy se prosazuje „přírodní“ charakter úmrtnosti. Lze říci, že úmrtnost pro vyšší věky tato funkce popisuje téměř dokonale.

Otázkou je, které věky lze považovat za vyšší. Z empirických údajů se dá vyčíst, že zhruba od 60tého roku stoupá úmrtnost rychleji a průběh úmrtnosti nabývá jiného charakteru. Z tohoto důvodu jsou za vyšší věky považovány věky nad 60 let.

Specifické úmrtnosti můžeme spolehlivě určit asi až do 85 let, proto máme přibližně 25 hodnot, ze kterých určujeme parametry a , b a c z předchozí funkce. Toto tvrzení potvrzuje i obrázek č. 24.

Parametry by měly být odhadovány co nejpřesněji, jelikož je tato funkce citlivá i na malé změny parametrů. Na druhou stranu je odhad úmrtnosti ve vyšších věcích už není tak důležitý, takže se často spokojíme s méně kvalitním odhadem [7].

7.1 Vyrovnání vyšších věků pomocí Gompertz-Makehamovy funkce

Ze specifických měr úmrtnosti pro věk 60 a více let je vidět, že hodnoty jsou pochybné. Nejen empirické, ale i vyrovnané hodnoty se výrazně odchyľují od trendu předchozích hodnot – exponenciálního růstu.

Nejpoužívanější metodou eliminace náhodných chyb je graduace analytickou funkcí. Pokud bychom prováděli takovéto vyrovnání pro celé věkové rozmezí, ukazují zkušenosti z výzkumů ČSU, že závislost míry úmrtnosti je natolik složitá, že ji nelze žádnou jednoduchou funkcí dobře vyjádřit.

Tato funkce dobře charakterizuje hodnoty intenzity úmrtnosti pro věk od 60 let výše, kdy lze předpokládat, že $\mu(x) = a + b * c^x$. Za předpokladu $m_x \sim \mu(x+1/2)$ dostáváme pro specifické

míry úmrtnosti $m_x \sim a + b * c^{x+\frac{1}{2}}$, kde a , b a c jsou neznámé parametry. Je třeba provést odhad těchto parametrů. Tato funkce není lineární v parametrech, ani ji nelze na lineární funkci transformovat logaritmováním. Odhad tedy provedeme postupem obvyklým pro řešení úloh nelineární regrese. Nalezneme počáteční odhad parametrů a postupujeme jeho následným zpřesněním minimalizací nějaké funkce, charakterizující odchylky empirických hodnot od hodnot funkčních [6].

7.2 Počáteční odhad parametrů G-M funkce

Výpočet počátečního odhadu parametrů funkce provedeme následovně [6]:

1. Zvolíme počátek prvního intervalu x_0 a délku intervalu k .

Za x_0 můžeme dosadit např. hodnotu 60 a za k hodnotu 8. Tak vytvoříme součty do 60 do 67 let, od 68 do 75 let a od 76 do 83 let a využijeme téměř celé věkové rozpětí od 60 do 84 let, za něž můžeme určit specifické úmrtnosti [7].

2. Vypočítáme součty empirických specifických měr úmrtnosti v jednotlivých intervalech, tedy G_1, G_2, G_3 .

Funkce $\mu(x) = a + bc^x$, platí $c > 1$, $0 < b < 1$ má tři parametry, proto stačí k jejich určení pouze 3 hodnoty (body). Jelikož volbou tří ne zcela typických bodů bychom mohli dostat nevyhovující výsledek zvolíme si jakési „souhrnné“ body, aby pravděpodobnost jejich vychýlení byla menší.

$$G_1 = \sum_{x=x_0}^{x_0+k-1} m_x = \sum_{x=x_0}^{x_0+k-1} \left(a + bc^{x+\frac{1}{2}} \right),$$

$$G_2 = \sum_{x=x_0}^{x_0+2k-1} m_x = \sum_{x=x_0+k}^{x_0+2k-1} \left(a + bc^{x+\frac{1}{2}} \right),$$

$$G_3 = \sum_{x=x_0}^{x_0+3k-1} m_x = \sum_{x=x_0+2k}^{x_0+3k-1} \left(a + bc^{x+\frac{1}{2}} \right).$$

Upravíme předchozí vzorce, tak že provedeme součty na pravých stranách a vytkneme konstanty nezávisle na x , vyjde [6]:

$$G_1 = k * a + bc^{x_0+\frac{1}{2}} * \sum_{i=0}^{k-1} c^i,$$

$$G_2 = k * a + bc^{x_0+\frac{1}{2}+k} * \sum_{i=0}^{k-1} c^i,$$

$$G_3 = k * a + bc^{x_0+\frac{1}{2}+2k} * \sum_{i=0}^{k-1} c^i.$$

3. Vypočítáme c^k a díky tomuto vyjádření se zbavíme jednotlivých parametrů. Když odečteme G_1 od G_2 a G_2 od G_3 , tím vyloučíme parametr a :

$$G_2 - G_1 = bc^{x_0 + \frac{1}{2}} \sum c^i * (c^k - 1),$$

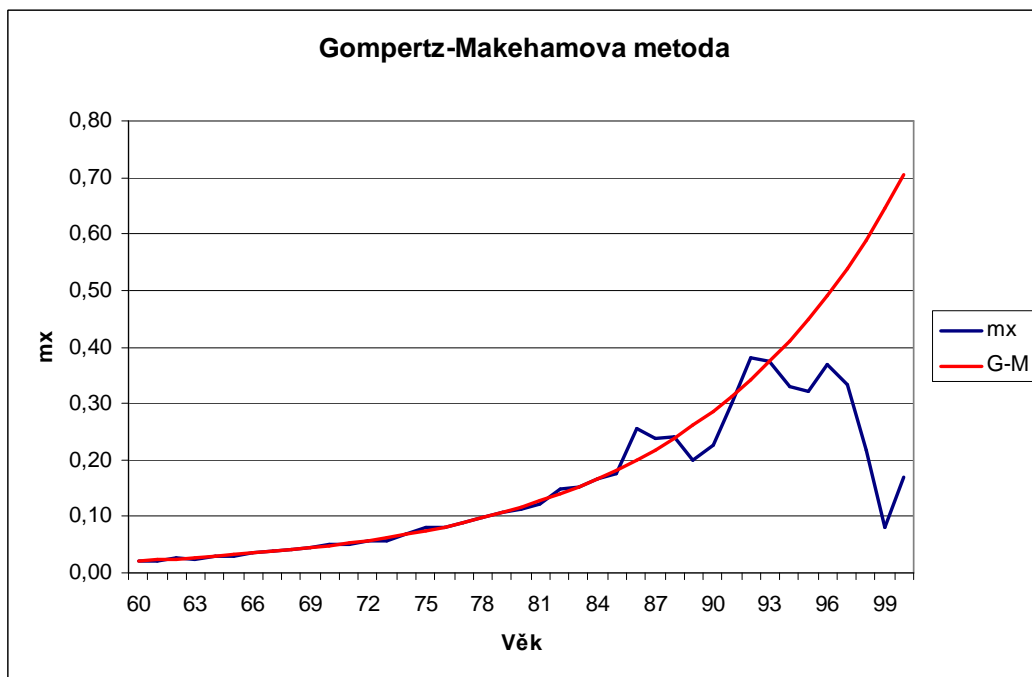
$$G_3 - G_2 = bc^{x_0 + \frac{1}{2} + k} \sum c^i * (c^k - 1).$$

Tyto dvě rovnice podělíme a dostaneme rovnici pro jednu neznámou:

$$c^k = \frac{G_3 - G_2}{G_2 - G_1}.$$

4. Vypočítáme hodnotu pomocného výrazu: $K_c = c^{x_0 + \frac{1}{2}} * (1 + c + \dots + c^{k-1}) = c^{x_0 + \frac{1}{2}} * \frac{c^k - 1}{c - 1}$

5. Pak parametry a, b: $b = \frac{G_2 - G_1}{K_c * (c^k - 1)}$, $a = \frac{G_1 - b * K_c}{k}$ [6].



Obrázek 23 – Gompertz-Makehamova metoda, Muži, SR 2006, MS Excel [vlastní]

Na obrázku č. 23 jsme vyhladily uvedeným postupem hodnoty m_x pomocí Gompertz-Makehamovy metody graduace a potvrdili jsme teorii, že G-M metoda je vhodná pouze pro věky 60-85 let.

8 Závěr

Diplomová práce je zaměřena na splnění cílů, které byly uvedeny v úvodu. Jsou to modelování úmrtnosti pro potřeby důchodového pojištění, popis konstrukce úmrtnostních tabulek a graduace těchto úmrtnostních tabulek pomocí vhodně zvolených metod.

Ve druhé kapitole práce bylo nutné objasnit problém stárnutí obyvatelstva a jeho vliv na ekonomiku, konkrétně na vývoj budoucího důchodového pojištění s prognózami do roku 2050. Bylo zjištěno, že podíl seniorů se bude neustále zvyšovat na úkor snižování podílu osob v produktivním věku. To je způsobeno poklesem úmrtnosti, tedy prodloužením střední délky života a zároveň i poklesem porodnosti, dokonce i plodnosti. To bude znamenat silné ekonomické zatížení státu v podobě výdajů na sociální a zdravotní péči. Předpokládaný růst starobních důchodců je z 1,95 mil. Kč v roce 2004 na více jako 3 mil Kč v roce 2050. Pokud nedojde k ráznému zásahu ze strany státu v podobě zvyšování zaměstnanosti obecně a zejména pak starších osob (osob důchodového věku), nebo posunutí věkové hranice odchodu do důchodu, nebo významnou restrukturalizací základního důchodového pojištění, bude tento systém dlouhodobě neudržitelný. Kumulované saldo základního důchodového pojištění se přesune z kladné do záporné hodnoty kolem roku 2030 a kolem roku 2050 dosáhne dluh úrovně necelých 50% HDP.

V kapitole 3 bylo nutné vysvětlit pojmy z oblasti modelování úmrtnosti, jako jsou úmrtnost, ukazatele úmrtnosti, intenzita úmrtnosti, délka života, zákony úmrtnosti, data potřebné pro vytvoření úmrtnostních tabulek a poskytnout návod, kde tyto data můžeme nalézt a popsat konstrukce úmrtnostních tabulek. Následovala praktická ukázka konstrukce úmrtnostních tabulek pro Muže, SR 2006.

V další kapitole byl vysvětlen pojem graduace úmrtnostních tabulek, popis metod, používaných ke graduaci a uvedena praktická ukázka aplikace těchto metod v programech MS Excel a STATGRAPHICS Centurion XV.

Byly použity ukázky klouzavých průměrů pro různé hodnoty parametrů a neparametrických metod graduace. Těmi jsou Wittsteinova metoda, Spenserova metoda 15 bodová a 21 bodová, Hendersonova metoda. Jako nejvhodnější metoda graduace úmrtnostních tabulek byla vyhodnocena Spenserova 21 bodová metoda.

Dále byla otestována hladkost a přesnost graduace Spenserovy 21 bodové metody graduace. Spenserova metoda byla vyhodnocena jako dostatečně přesná a hladká.

V poslední kapitole diplomové práce byly popsány problémy spojené s konstrukcí úmrtnostních tabulek pro vysoké, resp. důchodové věky (od 65 let). Graduace takovýchto věků se provádí pomocí Gompertz-Makehamovy metody. Aplikací této metody na reálních datech byla potvrzena teorie, že specifické míry úmrtnosti pomocí této metody lze spolehlivě určit pouze do věku přibližně 85 let.

9 Použitá literatura

- [1] Benjamin, B., Pollard, S. H.: *The analysis of Mortality and other acturial statistics*. Institute of Actuaries, Scotland, London 1993.
- [2] Cipra, T.: *Pojistná matematika – teorie a praxe*. Praha: Ekopress, 2006. 411 stran. ISBN 80-86929-11-6.
- [3] Čejková, V., Nečas, S., Řezáč, F.: *Pojistná ekonomika*. 1.vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2003. 145 stran. ISBN 80-210-32-88-X
- [4] Daňhel, J.: *Kapitoly z pojistné teorie*. Praha: Vysoká škola ekonomická, 2002. ISBN 80-245-0306-9
- [5] Ducháčková, E.: *Principy pojištění a pojišťovnictví*. 2.vydání. Praha: Ekopress, 2005. 178 stran. ISBN 80-86119-92-0.
- [6] Fiala, T.: *Výpočty aktuárské demografie v tabulkovém procesoru*. Praha: Oeconomica, 2005, 177 stran. ISBN 80-245-0821-4
- [7] Koschin, F.: *Aktuárská demografie*. Praha: VŠE, 1997. 123 stran. ISBN 80-7079-112-8.
- [8] Kahoun, V., Vurm, V., Kučerová, B.: *Vybrané kapitoly z pojišťovnictví*. Praha: Triton, 2008. 87 stran. ISBN 978-80-7387-130-7.
- [9] Koschin, F.: *Vybrané demografické modely*. Praha: VŠE, 1995. 49 stran. ISBN 80-7079-761-4
- [10] Pacáková, V. *Aplikovaná poistná statistika*. Bratislava: Iura Edition, 2004. ISBN 80-8087-004-8.
- [11] Roubíček, V.: *Základní problémy obecné a ekonomické demografie*, 1. vydání: Vysoká škola ekonomická v Praze 1996. 271 s. ISBN 80-7079-188-8.
- [12] Řezanková, H., Altová, M.: *Statgraphics*. 1. vydání: Vysoká škola ekonomická v Praze 1996. 57 s. ISBN 80-7079-306-6.
- [13] Sekerka, B. *Matematicko–statistické metody v pojišťovnictví*. Praha: Profess Conzulting ISBN 80-7259-017-0.
- [14] Sivašová, D.: *Aktuárska demografia v prostredí konkurenčného poistného trhu*. Bratislava: EKONÓM, 2008. 98 stran. ISBN 978-80-225-2509-1.
- [15] Veselá, R.: *Základy demografie*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2008. 98 stran. ISBN 978-80-225-2509-1.

- [16] Webhouse. *Demopaedia* [online]. 2000-2007 [cit. 2010-02-14]. Dostupný na: <http://www.demografie.info/?cz_umrtnosttabulky=&PHPSESSID=dccb9f08e8cd6c53567572514dcb43>.
- [17] Webhouse. *Demopaedia* [online]. 2000-2007 [cit. 2010-02-14]. Dostupný na: <<http://cs-ii.demopedia.org/wiki/43>>.
- [18] Webhouse. *Finance.cz* [online]. 2000-2010 [cit. 2010-02-14]. Dostupný na: <<http://www.finance.cz/finance/34699-pohled-do-budoucnosti-tvrda-realita/>>.
- [19] Webhouse. *Demografie, demografický informační portál* [online]. 2004-2009 [cit. 2010-02-23]. Dostupný na: <http://demografie.info/?cz_starnuti=>.
- [20] Webhouse. *eStranky.cz* [online]. 2005-2008 [cit. 2010-02-23]. Dostupný na: <http://www.jirifranc.estranky.cz/archiv/vekove_pyramidy>.
- [21] Webhouse. *Český statistický úřad* [online]. 2009 [cit. 2010-01-22]. Dostupný na: <www.czso.cz/csu/katalog.nsf/>.
- [22] Webhouse. *Portál ministerstva práce a sociálních věcí* [online]. 2005-2008 [cit. 2010-02-24]. Dostupný na: <http://www.mpsv.cz/files/clanky/3482/sbornik_diskriminace.pdf>.
- [23] Langhamrová, J.: *Demografie. Učební text pro předmět U017*. Vysoká škola ekonomická v Praze určený pro Univerzitu třetího věku, 2007.
- [24] Webhouse. *Portál ministerstva práce a sociálních věcí: Národní strategická zpráva o přiměřených a udržitelných důchodech připravená pro EU v roce 2005* [online]. 2005-2008 [cit. 2010-02-12]. Dostupný na: <<http://www.mpsv.cz/cs/1449>>.
- [25] Webhouse. *Portál ministerstva práce a sociálních věcí: Pojistně matematická zpráva o sociálním pojištění* [online]. 2005-2008 [cit. 2010-02-12]. Dostupný na: <http://www.mpsv.cz/files/clanky/5886/zprava_2008_cz.pdf>.

SEZNAM ZKRATEK

Bi – Binomické rozdělení pravděpodobnosti

ČR – Česká republika

ČSSZ – Česká správa sociálního zabezpečení

ČSÚ – Český statistický úřad

EU – Evropská Unie

HDP – Hrubý domácí produkt

Kč – Koruna česká

OSN – Organizace spojených národů

SR – Slovenská republika

Věk	Střed věk. intervalu	Zemřelí Mx	Žijící	Střední stav populace St	qx	px	lx	dx	Lx	Tx	ex	mx
0	0,5	204	27686	27662	0,007341	0,992659	100000	734	99633	7040540	70,41	0,007375
1	1,5	20	27638	27278	0,000723	0,999277	99266	72	99230	6940907	69,92	0,000733
2	2,5	8	26917	26515	0,000297	0,999703	99194	29	99179	6841677	68,97	0,000302
3	3,5	5	26113	26087	0,000191	0,999809	99165	19	99155	6742497	67,99	0,000192
4	4,5	11	26060	26496	0,000264	0,999736	99146	26	99133	6643342	67,01	0,000415
5	5,5	6	26931	27463	0,000261	0,999739	99119	26	99107	6544210	66,02	0,000218
6	6,5	10	27994	28344	0,000274	0,999726	99094	27	99080	6445103	65,04	0,000353
7	7,5	6	28693	29001	0,000255	0,999745	99066	25	99054	6346023	64,06	0,000207
8	8,5	6	29308	29789	0,000211	0,999789	99041	21	99031	6246969	63,07	0,000201
9	9,5	9	30269	30647	0,000232	0,999768	99020	23	99009	6147939	62,09	0,000294
10	10,5	2	31024	31687	0,000203	0,999797	98997	20	98987	6048930	61,10	0,000063
11	11,5	13	32349	33826	0,000261	0,999739	98977	26	98964	5949942	60,11	0,000384
12	12,5	5	35303	36331	0,000217	0,999783	98951	21	98941	5850978	59,13	0,000138
13	13,5	10	37359	37930	0,000233	0,999767	98930	23	98918	5752038	58,14	0,000264
14	14,5	9	38500	39226	0,000229	0,999771	98907	23	98895	5653119	57,16	0,000229
15	15,5	9	39951	40185	0,000261	0,999739	98884	26	98871	5554224	56,17	0,000224
16	16,5	15	40418	40742	0,000321	0,999679	98858	32	98842	5455353	55,18	0,000368
17	17,5	17	41065	41423	0,000465	0,999535	98827	46	98804	5356510	54,20	0,000410
18	18,5	25	41780	42309	0,000674	0,999326	98781	67	98747	5257707	53,23	0,000591
19	19,5	41	42838	43682	0,000836	0,999164	98714	83	98673	5158959	52,26	0,000939
20	20,5	41	44526	44830	0,000915	0,999085	98632	90	98586	5060287	51,30	0,000915
21	21,5	40	45134	45203	0,000959	0,999041	98541	95	98494	4961700	50,35	0,000885
22	22,5	48	45271	45600	0,000961	0,999039	98447	95	98399	4863206	49,40	0,001053
23	23,5	42	45929	46136	0,000951	0,999049	98352	93	98305	4764807	48,45	0,000910
24	24,5	42	46342	46490	0,001001	0,998999	98259	98	98210	4666501	47,49	0,000903
25	25,5	53	46638	47234	0,001051	0,998949	98160	103	98109	4568292	46,54	0,001122
26	26,5	50	47830	48120	0,001028	0,998972	98057	101	98007	4470183	45,59	0,001039
27	27,5	47	48410	48314	0,000963	0,999037	97956	94	97909	4372176	44,63	0,000973
28	28,5	48	48217	48268	0,001017	0,998983	97862	100	97812	4274267	43,68	0,000994
29	29,5	47	48318	47901	0,001085	0,998915	97762	106	97709	4176455	42,72	0,000981
30	30,5	66	47484	47067	0,001214	0,998786	97656	119	97597	4078745	41,77	0,001402
31	31,5	55	46649	45960	0,001273	0,998727	97538	124	97476	3981148	40,82	0,001197
32	32,5	64	45270	43976	0,001442	0,998558	97414	140	97344	3883672	39,87	0,001455
33	33,5	68	42682	41465	0,001546	0,998454	97273	150	97198	3786329	38,92	0,001640
34	34,5	66	40247	39313	0,001510	0,998490	97123	147	97050	3689131	37,98	0,001679
35	35,5	61	38378	37905	0,001643	0,998357	96976	159	96897	3592081	37,04	0,001609
36	36,5	62	37431	36761	0,001934	0,998066	96817	187	96723	3495185	36,10	0,001687
37	37,5	96	36090	35696	0,002456	0,997544	96630	237	96511	3398461	35,17	0,002689
38	38,5	94	35301	35733	0,002688	0,997312	96392	259	96263	3301951	34,26	0,002631
39	39,5	112	36165	36796	0,002959	0,997041	96133	284	95991	3205688	33,35	0,003044
40	40,5	108	37427	38023	0,002911	0,997089	95849	279	95709	3109697	32,44	0,002840
41	41,5	128	38619	38818	0,003233	0,996767	95570	309	95415	3013988	31,54	0,003297
42	42,5	124	39016	38544	0,003612	0,996388	95261	344	95089	2918573	30,64	0,003217

Věk	Střed věk. intervalu	Zemřelí Mx	Žijící	Střední stav populace St	qx	px	lx	dx	Lx	Tx	ex	mx
43	43,5	178	38072	37984	0,004244	0,995756	94917	403	94715	2823484	29,75	0,004686
44	44,5	176	37895	38225	0,004744	0,995256	94514	448	94290	2728769	28,87	0,004604
48	48,5	336	40095	40465	0,007689	0,992311	92358	710	92003	2354704	25,50	0,008304
49	49,5	322	40834	40770	0,008207	0,991793	91648	752	91272	2262702	24,69	0,007898
50	50,5	369	40706	40309	0,009100	0,990900	90896	827	90482	2171430	23,89	0,009154
51	51,5	403	39912	39493	0,009849	0,990151	90068	887	89625	2080948	23,10	0,010204
52	52,5	418	39073	38866	0,010699	0,989301	89181	954	88704	1991323	22,33	0,010755
53	53,5	445	38658	38326	0,011582	0,988418	88227	1022	87716	1902619	21,57	0,011611
54	54,5	488	37993	37125	0,012485	0,987515	87205	1089	86661	1814903	20,81	0,013145
55	55,5	488	36257	34836	0,013564	0,986436	86116	1168	85532	1728242	20,07	0,014008
56	56,5	490	33415	32337	0,014765	0,985235	84948	1254	84321	1642710	19,34	0,015153
57	57,5	519	31259	30556	0,015885	0,984115	83694	1329	83029	1558388	18,62	0,016985
58	58,5	508	29852	28261	0,017253	0,982747	82365	1421	81654	1475359	17,91	0,017976
59	59,5	497	26669	24916	0,018742	0,981258	80944	1517	80185	1393705	17,22	0,019947
60	60,5	499	23162	22650	0,020905	0,979095	79427	1660	78596	1313519	16,54	0,022031
61	61,5	481	22137	21807	0,021825	0,978175	77766	1697	76918	1234923	15,88	0,022058
62	62,5	540	21476	20859	0,023593	0,976407	76069	1795	75172	1158005	15,22	0,025889
63	63,5	472	20241	19924	0,024722	0,975278	74274	1836	73356	1082834	14,58	0,023690
64	64,5	571	19607	19315	0,027788	0,972212	72438	2013	71432	1009478	13,94	0,029563
65	65,5	569	19022	18426	0,030033	0,969967	70425	2115	69368	938046	13,32	0,030881
66	66,5	617	17829	17063	0,033470	0,966530	68310	2286	67167	868679	12,72	0,036160
67	67,5	595	16297	15726	0,036321	0,963679	66024	2398	64825	801512	12,14	0,037837
68	68,5	626	15154	14757	0,040164	0,959836	63626	2555	62348	736687	11,58	0,042422
69	69,5	630	14359	14186	0,043328	0,956672	61070	2646	59747	674339	11,04	0,044412
70	70,5	683	14012	13797	0,046921	0,953079	58424	2741	57053	614592	10,52	0,049505
71	71,5	685	13581	13298	0,049201	0,950799	55683	2740	54313	557539	10,01	0,051513
72	72,5	713	13014	12900	0,052308	0,947692	52943	2769	51558	503226	9,51	0,055273
73	73,5	727	12785	12554	0,057695	0,942305	50174	2895	48726	451667	9,00	0,057910
74	74,5	815	12323	11878	0,064579	0,935421	47279	3053	45752	402941	8,52	0,068617
75	75,5	877	11432	10980	0,070661	0,929339	44226	3125	42663	357189	8,08	0,079876
76	76,5	812	10527	10049	0,075374	0,924626	41101	3098	39552	314525	7,65	0,080804
77	77,5	810	9571	9119	0,081715	0,918285	38003	3105	36450	274973	7,24	0,088830
78	78,5	807	8666	8290	0,088560	0,911440	34897	3091	33352	238523	6,83	0,097346
79	79,5	789	7914	7444	0,095945	0,904055	31807	3052	30281	205171	6,45	0,105999
80	80,5	746	6973	6579	0,103906	0,896094	28755	2988	27261	174890	6,08	0,113400
81	81,5	722	6184	5915	0,112482	0,887518	25767	2898	24318	147629	5,73	0,122063
82	82,5	792	5646	5351	0,121713	0,878287	22869	2783	21477	123311	5,39	0,148010
83	83,5	719	5056	4726	0,131641	0,868359	20086	2644	18764	101833	5,07	0,152137
84	84,5	650	4396	3925	0,142308	0,857692	17441	2482	16200	83070	4,76	0,165626
85	85,5	538	3453	3056	0,153757	0,846243	14959	2300	13809	66869	4,47	0,176047
86	86,5	543	2659	2127	0,166031	0,833969	12659	2102	11608	53060	4,19	0,255349
87	87,5	291	1594	1228	0,179175	0,820825	10557	1892	9612	41452	3,93	0,236971
88	88,5	193	862	806	0,193231	0,806769	8666	1675	7829	31840	3,67	0,239603
89	89,5	148	749	743	0,208240	0,791760	6991	1456	6263	24011	3,43	0,199327
90	90,5	171	736	753	0,224242	0,775758	5535	1241	4915	17748	3,21	0,227243

Věk	Střed věk. intervalu	Zemřelí Mx	Žijící	Střední stav populace St	qx	px	lx	dx	Lx	Tx	ex	mx
91	91,5	217	769	722	0,241274	0,758726	4294	1036	3776	12833	2,99	0,300762
92	92,5	224	674	591	0,259367	0,740633	3258	845	2836	9057	2,78	0,379340
93	93,5	162	507	433	0,278551	0,721449	2413	672	2077	6221	2,58	0,374566
94	94,5	101	358	307	0,298844	0,701156	1741	520	1481	4144	2,38	0,328990
95	95,5	71	256	222	0,320262	0,679738	1221	391	1025	2664	2,18	0,320542
96	96,5	59	187	160	0,342806	0,657194	830	284	687	1638	1,97	0,368750
97	97,5	38	133	115	0,366470	0,633530	545	200	445	951	1,74	0,331878
98	98,5	29	96	134	0,391233	0,608767	345	135	278	506	1,46	0,217228
99	99,5	16	171	197	0,417060	0,582940	210	88	166	228	1,08	0,081218
100	100,5	19	223	112	1,000000	0,000000	123	123	61	61	0,50	0,170404

Příloha 2 **Graduace úmrtnostní tabulky, Muži, SR 2006**

Vyrovnání úmrtnostní tabulky							
Metody klouzavých průměrů				Jiné vyrovnávací metody			
Vyrovnání pro 3 hodnoty		Vyrovnání pro 9 hodnot		Wittsteinova metoda	Spenserova metoda (15 bodová)	Spenserova metoda (21 bodová)	Gompertz-Makeham
mv1	mv2	mv1	mv2				
0,002803							
0,000409	0,001172						
0,000303	0,000329						
0,000275	0,000302	0,000605455		0,000574012			
0,000329	0,000288	0,000295726		0,000270654			
0,000259	0,000281	0,000266033		0,000248192			
0,000254	0,000249	0,000252817		0,000243224	0,000169328		
0,000234	0,000225	0,000240622	0,000259411	0,00023844	0,000232457		
0,000186	0,000222	0,000230526	0,000239322	0,000233735	0,000229554		
0,000247	0,000209	0,000222721	0,000235983	0,000230151	0,000223368	0,000189986	
0,000195	0,000235	0,000227564	0,000239956	0,000231195	0,000217341	0,000206534	
0,000262	0,000222	0,000230502	0,000252838	0,000235126	0,000213877	0,000210599	
0,000210	0,000237	0,000247121	0,000277892	0,000250482	0,000217862	0,0002288	
0,000239	0,000241	0,000274341	0,00031792	0,000282606	0,000240444	0,000268484	
0,000274	0,000282	0,000332496	0,000374944	0,000339165	0,00029385	0,000332244	
0,000334	0,000355	0,000411842	0,000447414	0,000419563	0,000384879	0,000418702	
0,000456	0,000479	0,000512503	0,000531818	0,000523072	0,000507438	0,000521886	
0,000647	0,000639	0,000627941	0,00062228	0,000636482	0,000643543	0,000632868	
0,000815	0,000791	0,000743069	0,000711137	0,000743328	0,000771222	0,000740729	
0,000913	0,000893	0,000828422	0,000790797	0,000832482	0,000872399	0,000835161	
0,000951	0,000938	0,000894453	0,000857466	0,00090093	0,000939714	0,000908523	
0,000949	0,000952	0,00094598	0,000909864	0,000946626	0,000977159	0,00095776	
0,000955	0,000961	0,000968626	0,000948726	0,000972586	0,00099399	0,000984953	
0,000979	0,000985	0,000981856	0,000978589	0,00099015	0,000998992	0,000996891	
0,001022	0,001015	0,000999605	0,001005629	0,001004485	0,000999281	0,00100354	
0,001045	0,001023	0,001020261	0,001035464	0,001019863	0,001002116	0,001014053	
0,001002	0,001010	0,001041057	0,001072586	0,001042277	0,001016921	0,001034286	
0,000983	0,001037	0,001084346	0,001121428	0,001083777	0,001051964	0,001066679	
0,001126	0,001101	0,001150091	0,001184673	0,001143755	0,001110847	0,001112387	
0,001193	0,001224	0,001240632	0,00126338	0,001217359	0,001187246	0,001173529	
0,001351	0,001325	0,001328246	0,001357875	0,001301668	0,001272281	0,001253406	
0,001431	0,001458	0,001429151	0,001470472	0,001402645	0,001361277	0,001356401	
0,001591	0,001555	0,001560117	0,001604221	0,00152501	0,001466299	0,00148562	
0,001643	0,001631	0,001704891	0,001759537	0,001671885	0,001607495	0,001642794	
0,001658	0,001765	0,001876355	0,001938332	0,001859729	0,001798424	0,001825102	
0,001995	0,001996	0,002088782	0,002141688	0,002081057	0,002034701	0,002028848	
0,002336	0,002373	0,002346048	0,002369173	0,002327881	0,002293973	0,002249892	
0,002788	0,002654	0,002575059	0,002619463	0,002580394	0,002552013	0,002488904	
0,002838	0,002896	0,002846668	0,002898834	0,002849501	0,002796717	0,002749793	
0,003061	0,003006	0,003126102	0,003213206	0,003132051	0,003047227	0,00304246	
0,003118	0,003304	0,00345255	0,003571714	0,003458442	0,003337446	0,0033793	

Vyrovnání úmrtnostní tabulky							
Metody klouzavých průměrů				Jiné vyrovnávací metody			
Vyrovnání pro 3 hodnoty		Vyrovnání pro 9 hodnot		Wittsteinova metoda	Spenserova metoda (15 bodová)	Spenserova metoda (21 bodová)	Gompertz-Makeham
mv1	mv2	mv1	mv2				
0,003734	0,003674	0,003833055	0,003983771	0,003849462	0,003706352	0,003775302	
0,004169	0,004250	0,004317032	0,004457832	0,00432341	0,004174806	0,004241938	
0,004846	0,004795	0,004863477	0,004995037	0,004872883	0,0047426	0,004783461	
0,005370	0,005387	0,005479243	0,005592737	0,005489456	0,00538921	0,00539434	
0,005946	0,006094	0,00615505	0,006246178	0,006164572	0,006085944	0,006061301	
0,006965	0,006807	0,006870152	0,006949194	0,006871156	0,006811945	0,006769347	
0,007511	0,007643	0,007637613	0,007696247	0,007602867	0,007551384	0,007504916	
0,008452	0,008350	0,008392679	0,008484638	0,008352524	0,008300583	0,008260873	
0,009086	0,009192	0,009225876	0,009320051	0,009134792	0,0090631	0,009034608	
0,010038	0,009993	0,010096942	0,010207182	0,009942532	0,009853288	0,009835034	
0,010857	0,010911	0,011008158	0,011155167	0,010798862	0,010684405	0,010675575	
0,011837	0,011872	0,011991655	0,012174635	0,011708299	0,01156711	0,011576491	
0,012921	0,012953	0,013097434	0,0132768	0,012688853	0,012522397	0,012550704	
0,014102	0,014135	0,014265447	0,01446156	0,013748582	0,013567615	0,013610569	
0,015382	0,015396	0,015560206	0,015731459	0,01492341	0,014724693	0,014754599	
0,016705	0,016797	0,016933216	0,01708174	0,016184019	0,015995643	0,015982915	
0,018303	0,018331	0,018413138	0,018514508	0,01754557	0,017365192	0,017285143	
0,019985	0,019878	0,019867054	0,020031077	0,018979027	0,018796843	0,018669304	
0,021345	0,021552	0,021433499	0,021660562	0,020524	0,020271562	0,020150526	0,021067846
0,023326	0,022850	0,023033017	0,023433937	0,022140483	0,021815597	0,021775846	0,022818142
0,023879	0,024528	0,024920445	0,025400238	0,023940343	0,023498806	0,023589998	0,024735454
0,026381	0,026101	0,026929659	0,027590601	0,025940959	0,025428458	0,025643116	0,02683572
0,028045	0,028876	0,029459576	0,030039476	0,028260511	0,027698301	0,027945218	0,029136399
0,032202	0,031735	0,032198789	0,032733427	0,030839854	0,030355106	0,030493148	0,031656613
0,034959	0,035322	0,035328981	0,035661748	0,033729576	0,033328784	0,033250508	0,034417312
0,038806	0,038441	0,038509208	0,038802571	0,036782704	0,03647958	0,036191039	0,037441442
0,041557	0,041936	0,041908991	0,042163842	0,039966203	0,03966333	0,039290957	0,040754142
0,045446	0,045160	0,045179009	0,045766605	0,043233232	0,042839004	0,042573335	0,044382947
0,048477	0,048673	0,04882332	0,049701433	0,046728711	0,046100092	0,046085059	0,04835802
0,052097	0,051824	0,052937497	0,054058406	0,050498244	0,04966576	0,049903026	0,052712403
0,054899	0,055865	0,057609165	0,058910701	0,054685504	0,053755852	0,054092059	0,057482291
0,060600	0,061433	0,062925637	0,064308044	0,059409566	0,058463905	0,058707815	0,062707332
0,068801	0,068611	0,069200051	0,070298356	0,064667013	0,063751619	0,063781083	0,068430958
0,076432	0,076135	0,076001496	0,076872297	0,070329044	0,069492599	0,069324286	0,074700745
0,083170	0,082865	0,082929052	0,084028932	0,076371277	0,075566199	0,075323476	0,081568809
0,088994	0,089852	0,090335323	0,091822631	0,082850895	0,081938104	0,081764416	0,089092238
0,097392	0,097322	0,098766489	0,100439009	0,089754158	0,08870348	0,08865606	0,09733357
0,105581	0,105598	0,107811837	0,110055134	0,097146049	0,095986606	0,096035937	0,106361307
0,113820	0,115742	0,117747036	0,120889536	0,105137834	0,103885303	0,103960686	0,11625049
0,127824	0,127460	0,128847188	0,133069153	0,113793884	0,112450615	0,112493505	0,127083321
0,140736	0,141273	0,143628465	0,146614452	0,123107607	0,121698498	0,121695815	0,138949845
0,155258	0,153533	0,159601008	0,161129956	0,133119892	0,131638439	0,131616939	0,151948698
0,164603	0,172956	0,176880539	0,17625134	0,14387254	0,142306787	0,142294446	0,16618793

Vyrovnání úmrtnostní tabulky							
Metody klouzavých průměrů				Jiné vyrovnávací metody			
Vyrovnání pro 3 hodnoty		Vyrovnání pro 9 hodnot		Wittsteinova metoda	Spenserova metoda (15 bodová)	Spenserova metoda (21 bodová)	Gompertz-Makeham
mv1	mv2	mv1	mv2				
0,199007	0,195467	0,193122979	0,19161028	0,155407947	0,153757587	0,153757559	0,1817859
0,222789	0,221924	0,20890734	0,207110557	0,167768719	0,166034404	0,166042757	0,198872263
0,243974	0,230688	0,221176761	0,222806562	0,180997194	0,179180728	0,179195065	0,217589045
0,225300	0,230444	0,235582498	0,239217246	0,195134875	0,193239423	0,193260731	0,238091822
0,222057	0,229934	0,251888159	0,256434575	0,210221754	0,208252069	0,208281396	0,260551019
0,242444	0,255650	0,27203235	0,273983119	0,226295524	0,224258188	0,222707766	0,285153321
0,302448	0,298816	0,293860694	0,290434984	0,243390668	0,241294347		0,312103229
0,351556	0,338323	0,316592021	0,303819722	0,261537418	0,25939312		0,341624756
0,360965	0,351296	0,331730121		0,280760582	0,273368459		0,373963292
0,341366	0,347253	0,33517615		0,301078247			0,409387641
0,339427	0,340394	0,323524757		0,322500345			0,448192259
0,340390	0,328590	0,302135867		0,367271186			0,490699698
0,305952	0,285483						0,53726329
0,210108	0,224115						0,588270082
0,156283							0,644144053
							0,705349641



G1	0,228109	
G2	0,449529	
G3	0,908588	
G3-G2	0,459059	
G2-G1	0,221420	
c	1,0954222	1,073
kc	2790,8425	
b	7,392E-05	
a	0,0027252	
	0,125	

**Ověření hladkosti graduace pomocí funkce klouzavých průměrů
pro 9 hodnot, Muži, SR 2006**

mv 1 - 9b			
$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	Abs
8,75021E-05			
0,000100766	1,32635E-05		
0,000130771	3,00054E-05	1,67419E-05	1,67419E-05
0,000144537	1,37661E-05	-1,6239E-05	1,62393E-05
0,000171158	2,66209E-05	1,28549E-05	1,28549E-05
0,000212006	4,08477E-05	1,42268E-05	1,42268E-05
0,000256697	4,4691E-05	3,84326E-06	3,84326E-06
0,000228448	-2,82485E-05	-7,2939E-05	7,29394E-05
0,000270874	4,24259E-05	7,06743E-05	7,06743E-05
0,000278601	7,7266E-06	-3,4699E-05	3,46993E-05
0,000325376	4,67755E-05	3,90489E-05	3,90489E-05
0,000379121	5,37449E-05	6,96936E-06	6,96936E-06
0,000482009	0,000102888	4,91428E-05	4,91428E-05
0,000543943	6,19339E-05	-4,0954E-05	4,09538E-05
0,00061259	6,86472E-05	6,71337E-06	6,71337E-06
0,000671887	5,92973E-05	-9,3499E-06	9,34991E-06
0,00071046	3,85734E-05	-2,0724E-05	2,0724E-05
0,000761913	5,14529E-05	1,28796E-05	1,28796E-05
0,000749039	-1,28743E-05	-6,4327E-05	6,43272E-05
0,000825888	7,68493E-05	8,97236E-05	8,97236E-05
			0,0005821

mv 1 - Witt.			
$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	Abs
8,42027E-05			
0,000100841	1,66386E-05		
0,000122186	2,13447E-05	4,7061E-06	4,70607E-06
0,00014664	2,44545E-05	3,1098E-06	3,10981E-06
0,000187512	4,08719E-05	1,6417E-05	1,64174E-05
0,000220892	3,33799E-05	-7,4919E-06	7,49195E-06
0,000246281	2,53885E-05	-7,9914E-06	7,99144E-06
0,000251894	5,6129E-06	-1,9776E-05	1,97756E-05
0,000268378	1,64841E-05	1,0871E-05	1,08711E-05
0,000281706	1,33283E-05	-3,1558E-06	3,15575E-06
0,000325317	4,36112E-05	3,0283E-05	3,02829E-05
0,000389594	6,42767E-05	2,0665E-05	2,06655E-05
0,000472016	8,24219E-05	1,8145E-05	1,81452E-05
0,000546953	7,49369E-05	-7,485E-06	7,48498E-06
0,000613387	6,64341E-05	-8,5028E-06	8,50278E-06
0,000671194	5,78071E-05	-8,627E-06	8,62704E-06
0,000701993	3,07993E-05	-2,7008E-05	2,70077E-05
0,000726435	2,44419E-05	-6,3574E-06	6,35742E-06
0,0007437	1,72656E-05	-7,1763E-06	7,17627E-06
0,000775458	3,17573E-05	1,4492E-05	1,44916E-05
			0,000222261

mv 1 - Sp.15b			
$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	Abs
8,49306E-05			
8,88794E-05	3,94878E-06		
0,000104874	1,59943E-05	1,20455E-05	1,20455E-05
0,000140979	3,61054E-05	2,01111E-05	2,01111E-05
0,000190604	4,96252E-05	1,35197E-05	1,35197E-05
0,000235824	4,522E-05	-4,40517E-06	4,40517E-06
0,000258712	2,28875E-05	-2,23325E-05	2,23325E-05
0,000257415	-1,29696E-06	-2,41844E-05	2,41844E-05
0,000244051	-1,33642E-05	-1,20672E-05	1,20672E-05
0,000249779	5,7289E-06	1,90931E-05	1,90931E-05
0,000289293	3,95139E-05	3,3785E-05	3,3785E-05
0,000367609	7,83156E-05	3,88017E-05	3,88017E-05
0,000466613	9,90036E-05	2,0688E-05	2,0688E-05
0,000565267	9,86546E-05	-3,4896E-07	3,4896E-07
0,000643343	7,80754E-05	-2,05792E-05	2,05792E-05
0,000692748	4,94058E-05	-2,86696E-05	2,86696E-05
0,000721334	2,85859E-05	-2,08199E-05	2,08199E-05
0,000734147	1,28129E-05	-1,57731E-05	1,57731E-05
0,000743285	9,13746E-06	-3,67543E-06	3,67543E-06
0,000755925	1,26403E-05	3,50285E-06	3,50285E-06
			0,000314402

mv 1 - Sp.21b			
$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	Abs
7,97801E-05			
0,000102861	2,30806E-05		
0,000129036	2,61756E-05	3,09505E-06	3,09505E-06
0,000156927	2,78912E-05	1,71563E-06	1,71563E-06
0,000181993	2,50653E-05	-2,8259E-06	2,8259E-06
0,000203354	2,13609E-05	-3,70448E-06	3,70448E-06
0,000220572	1,7218E-05	-4,14285E-06	4,14285E-06
0,000238446	1,78739E-05	6,55869E-07	6,55869E-07
0,000260207	2,17617E-05	3,88779E-06	3,88779E-06
0,00029182	3,16127E-05	9,85105E-06	9,85105E-06
0,00033576	4,39401E-05	1,23274E-05	1,23274E-05
0,000394589	5,88287E-05	1,48886E-05	1,48886E-05
0,000464769	7,01797E-05	1,1351E-05	1,1351E-05
0,000539085	7,43163E-05	4,13662E-06	4,13662E-06
0,000607778	6,86934E-05	-5,62288E-06	5,62288E-06
0,000663152	5,53735E-05	-1,33199E-05	1,33199E-05
0,000703518	4,03664E-05	-1,50071E-05	1,50071E-05
0,000730338	2,68195E-05	-1,35469E-05	1,35469E-05
0,000750022	1,96846E-05	-7,13492E-06	7,13492E-06
0,000767073	1,70506E-05	-2,63399E-06	2,63399E-06
			0,000129848