SCIENTIFIC PAPERS
OF THE UNIVERSITY OF PARDUBICE
Series B
The Jan Perner Transport Faculty
3 (1997)

MATEMATICKÝ MODEL A ZPŮSOBY ŘEŠENÍ ÚLOHY PŘIDĚLOVÁNÍ PRÁZDNÝCH VOZŮ

Milan PODOLÁK

Katedra technologie a řízení dopravy

ÚVOD

Při jízdě prázdných vozů do místa nakládky jsou důležité dva základní faktory. Faktor času - doba prázdného běhu vozu je součástí doby oběhu vozu. Jeho prodlužování vede ke zvýšené potřebě vozů, která se pak projevuje ve zvýšených investičních nákladech na obnovu či údržbu pracovního parku vozů, nebo zvýšení nájemného za pobyt cizích vozů na síti. Druhým je faktor přímých nákladů, který je přímo závislý na kilometrické vzdálenosti, traťových poměrech, trakci a druhu vlaku, v němž je vůz přepravován.

K těmto okolnostem je třeba ještě uvést fakt, že za přepravu prázdných vozů nezískává dopravce žádné tržby. Proto musí být zájmem všech železničních podniků je organizovat tyto přepravy co nejhospodárněji.

Stále rychlejší rozvoj využívání výpočetní techniky v dopravě, zavádění nových informačních systémů do všech technologických postupů železnice a slušná úroveň matematického aparátu v této problematice, nabízí využití osobních počítačů při této činnosti železnice.

1. MODEL ÚLOHY

1.1 Verbální popis problému

Na dopravní síti existují uzly, které mají přebytečné množství elementů a naopak uzly, kterým se prázdné elementy nedostávají. S ohledem na technické a technologické možnosti existuje mnoho způsobů, jak je možno přepravit prázdné elementy z míst jejich přebytku do míst jejich nedostatku. My máme ze všech možných způsobů vybrat ten, který je pro nás nejvýhodnější. Metoda zvolená pro řešení této úlohy musí splňovat velké množství dalších podmínek:

- co největší pokrytí potřeb elementů,
- preference uspokojení některých požadavků na prázdné elementy,
- možnost vzájemné zastupitelnosti elementů různých typů (různé řady vozů),
- rozhodování o pokrývání potřeb soustředit do minimálního počtu míst,
- zohlednění dynamického pojetí problému,
- respektování propustnosti úseků a uzlů sítě,
- přijatelná doba výpočtu.

Podmínka maximálního pokrytí potřeb musí být splněna výběrem vhodného algoritmu pro řešení problému. Preference uspokojení některých požadavků se týká zejména elementů pro mezinárodní přepravu, potřeb některých zákazníků, vyhlášených vyrovnávkových úkolů, atd. Vozový park se neskládá pouze z jednoho druhu (České dráhy vlastní více než 120 vozových řad). Jejich možné využití, případně zastupitelnost je dána vlastnostmi zásilky. Nutnost soustředění rozhodování do minimálního počtu míst je dána tím, že se se vzrůstajícím počtem těchto míst zhoršuje výsledek optimalizace. Zdola je tento počet omezen přenosovými možnostmi datové sítě a dobou výpočtu. Zohlednění dynamického modelu je nutné proto, že přepravou prázdných elementů nedochází pouze k překonávání vzdáleností, ale i času. Prázdné elementy se přemisťují po úsecích a v uzlech, které mají určené propustnosti. Řešení musí být i z tohoto pohledu uskutečnitelné. Počet stanic obvodu, použitá výpočetní technika a složitost algoritmu určují dobu provedení optimalizačního výpočtu.

1.2 Hodnotící kritéria

Cílem optimalizační úlohy přidělování vozů je minimalizace celkového výsledku, který vzniká z dílčích nákladů na přemísťování vozů. V lineárním modelu se dílčí náklady vyjadřují jako součin hodnotících sazeb a počtu přemísťovaných vozů z daného místa zdroje do místa potřeby. Počty těchto vozů se hledají při řešení, hodnoty sazeb je nutno stanovit před výpočtem.

K reálnému vyjádření minimálního celkového výsledku je žádoucí, aby se v sazbě odrážely náklady na vůz komplexně, tj. ve všech fázích procesu přemísťování z místa zdroje do místa potřeby. To znamená zahrnout do sazby náklady spojené:

- s pobytem vozu v místě zdroje a v místě potřeby vozu,
- se zpracováním v nácestných seřaďovacích stanicích,
- s jízdou na trati mezi místem zdroje a místem potřeby.

Sazbu je možno vyjádřit ve formě **hodnotové** nebo **naturální**.

V prvním případě se sazba vyjádří v peněžních jednotkách a zjistí se prostým součtem nákladů v jednotlivých fázích procesu přidělování vozů. Je nutné poznamenat, že je obtížné tyto náklady stanovit.

V druhém případě se náklady v každé fázi procesu převádějí pro zjednodušení na kilometry.

Základem pro stanovení sazeb v kilometrech v podobě matice jsou vzdálenosti mezi jednotlivými místy zdrojů a potřeb. Mohou to být tarifní nebo skutečné přepravní vzdálenosti, případně vzdálenosti, spojující geometrické středy skupin stanic. Úpravou takto stanovené sazby (pomocí koeficientů či přirážek) lze vyjádřit náklady spojené s nácestným přeřaďováním, zohlednit charakter trati, vyjádřit reálná přemístění (z hlediska technologie, času), výhodnost záměny vozu jinými typy a další vlivy.

Hodnotící sazby v úloze přidělování vozů nemusí být neměnné. V průběhu času je lze upřesňovat, nebo v případě potřeby změnit i hodnotící kritérium (např. při mimořádnostech v dopravě).

Ve stacionárním modelu je možné vyjádřit sazbu ještě převodem nákladů na čas. V dynamickém modelu je čas už zapracován do řešení při libovolném hodnotícím kritériu.

Z hlediska použité metody je lhostejné, která forma sazby se použije. Je to především problém dostupnosti výchozích podkladů.

1.3 Matematický model úlohy

Předpokládejme, že se v daném obvodu sítě nachází m míst $D_1, D_2, \ldots, D_i, \ldots, D_m$ s přebytkem prázdných elementů určitého druhu $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$ a n míst $S_1, S_2, \ldots, S_j, \ldots, S_n$ s potřebou těchto elementů $b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_n$, pro něž platí:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = A = B = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Přepravní náklady jednoho prázdného elementu z místa D_i do místa S_j jsou c_{ij}. Tyto náklady budeme také označovat jako přepravní sazbu.

Problémem je nalézt počet elementů, které má místo s přebytkem vozů zaslat do míst s nedostatkem elementů, aby celkové přepravní náklady byly minimální.

Pro takto formulovaný problém je možné sestavit následující model lineárního programování:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \text{, pro i = 1, 2, ..., m} \tag{1}$$

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \text{, pro j = 1, 2, ..., a} \tag{2}$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{, pro i = 1, 2, ..., m a pro j = 1, 2, ..., n} \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = z\,(\min) \tag{4}$$

Vztahy (1) a (2) omezují nalezená řešení s ohledem na celkový počet prázdných elementů, které jsou k dispozici nebo které jsou potřeba. Vztah (3) je logickou podmínkou reálnosti dosaženého řešení. Účelová funkce (4) nám minimalizuje celkové přepravní náklady na přemístění všech elementů v síti.

2. METODY ŘEŠENÍ

K řešení úlohy přidělování prázdných elementů lze použít:

- soubor metod lineárního programování, které patří v operační analýze k nejpropracovanějším,
- metody teorie grafů.

Soubor metod **lineárního programování** lze rozdělit z hlediska použití na metody:

- univerzální (např. simplexová metoda),
- speciální (např. Dantzigova metoda).

Dalším hlediskem podle kterého je možno metody lineárního programování členit je stupeň přesnosti celkového výsledku. Dle tohoto hlediska se metody dělí na:

- přesné (např. simplexová metoda, Dantzigova metoda),
- přibližné (např. Vogelova aproximační metoda, Habrova frekvenční metoda).

Zapracování doplňujících požadavků do těchto původních metod není bez jejich modifikací možné.

Pomocí metod **teorie grafů** lze splnit základní i doplňující požadavky na řešení úlohy přidělování vozů. Tyto metody se svým pojetím více přibližují podmínkám provozu na železnici a vytváří základ pro řešení úlohy pomocí dynamického lineárního modelu. Zástupcem těchto metod je modifikace metody sestavení cirkulací s minimálními náklady, která byla publikována v literatuře [1].

V další části je uvedena charakteristika Dantzigovy metody.

2.1 Dantzigova metoda

Při této metodě se postupuje v těchto krocích:

- Nalezení výchozího přípustného bázického řešení,
- Provedení testu optimality pro nalezené řešení,
- Postupné vylepšování řešení v případě, že nalezené řešení nesplňuje kritérium optimality.

K **určení základního bázického řešení** můžeme využít mnoha metod. Tyto metody bývají nazývány metodami aproximačními. Mají dvojí účel. Jednak byly vypracovány proto, aby při nedostatku výpočetní kapacity na počítači bylo možno ručně či mechanizovaně získat řešení blízké optimálnímu. Druhým účelem je již uvedené získání výchozího řešení. Tyto metody mají rozdílnou složitost výpočtu s ohledem na to, jak přesné řešení požadujeme. Náročnější metoda použitá na určení výchozího řešení nám dá toto řešení bližší optimu (v některých případech i optimální).

Neznámějšími aproximačními metodami jsou:

- severozápadního rohu,
- indexová vzestupná,
- indexová sestupná,
- kombinovaná indexová,
- Habrova frekvenční,
- Vogelova aproximační.

Před vlastním hledáním výchozího přípustného řešení je nutno říci, že všechny metody předpokládají vybilancovanost úlohy, tzn. , že musí platit

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = A = B = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

V případě, že $A > B$, zavedeme fiktivní stanici s potřebou prázdných vozů (vozy ve skutečnosti zůstávají ve stanicích), která se rovná $b_{n+1} = A - B$. Matice přepravních nákladů se doplní o prvky $c_{i,\ +1} = 0$ pro $i = 1,2,..,m$.

V případě, že $A < B$, zavedeme fiktivní stanici s přebytkem prázdných vozů (vozy ve skutečnosti dojíždějí do dané oblasti), která se rovná $a_{m+1} = B - A$. Matice přepravních nákladů se doplní o prvky $c_{m+1,j} = 0$ pro $j = 1,2,..,n$.

Podrobný popis metod je uveden v literatuře [2].

Dalším krokem popisované Dantzigovy metody je **test optimality**.

Dantzig ukázal, že pro libovolné bazické řešení je možné najít takové číslo u_i a v_j, aby pro všechny bazické proměnné platila rovnice $u_i + v_j = c_{ij}$.

Dantzig také ukázal, že když pro nebazické proměnné platí : $u_i + v_j = \bar{c}_{ij}$ a když současně všechny $\bar{c}_{ij} - c_{ij} \leq 0$, pak je bazické řešení optimální.

Zjištění optimality získaného řešení probíhá takto:

- Pro každou bazickou proměnnou sestavíme jednu rovnici $u_i + v_j = c_{ij}$. Řešíme vzniklou soustavu $m + n - 1$ rovnic o $m + n$ neznámých jednoduchým způsobem tak, že si za jednu neznámou dosadíme libovolné číslo a ostatní neznámé dopočítáme ze zbývajících rovnic. Tím nalezneme hodnoty všech u_i a v_j.
- Přesvědčíme se, zda pro všechna $m \times n$ pole tabulky platí vztah $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$.
- Je-li tomu tak, pak je nalezeno optimální řešení zadaného dopravního problému. V opačném případě můžeme nalézt nové řešení s nižší hodnotou účelové funkce.

Při hledání nového a lepšího řešení se postupuje takto:

- Proměnnou vstupující do nového bázického řešení je ta, pro kterou je $u_i + v_j - c_{ij}$ maximální. Proměnné každého bázického řešení (m+n-1 proměnných) tvoří strom. Zařazením nové proměnné vznikne v grafu s m+n vrcholy (proměnné bázického řešení + nová proměnná) kružnice. Vrcholy této kružnice obsazujeme střídavě znaménky + a — tak, že novou proměnnou označíme pomocným znaménkem + a aby v každém sloupci a řádku, kde se nachází pomocné znaménko +, bylo i —.
- Zvolíme hodnotu t, která je rovna minimu z hodnot x_{ij}, které jsou označeny pomocným znaménkem —.
- Provedeme úpravu řešení tak, že provedeme všechny součty, resp. rozdíly $x_{ij} \pm t$ na uzavřeném okruhu podle označení příslušných polí uzavřeného okruhu pomocnými znaménky.
- Provedeme test optimality.

Hodnota nového řešení je $Z_i = Z_0 - t \times (c_{ij}' - c_{ij})$, kde je Z_0 hodnota předcházejícího řešení, c_{ij}' je přepravní sazba představující z řešení vyřazenou proměnnou a c_{ij} je přepravní sazba představující novou proměnnou.

Problém přidělování vozů je tématem disertační práce autora. Tento problém chce řešit Dantzigovou metodou. Z důvodu nutnosti zahrnout do řešení podmínky uvedené v kapitole 1.1., je potřeba tuto metodu modifikovat. V následujícím seznamu je uvedeno několik těchto změn a nastíněny problémové okruhy řešení:

- Vychází se ze základní matice vzdáleností mezi stanicemi s přebytky a nedostatky vozů (matice sazeb).
- Zastupitelnost vozových řad - souhrnné přebytky a požadavky v jednotlivých stanicích se rozčlení nejen podle stanic, ale i podle řad vozů. Tím se rozroste matice sazeb. Každému požadavku se přiřadí množina řad vozů, které ho mohou uspokojit. Dojde k úpravě prvků této matice. Neshoduje-li se řada vozu, který je k dispozici s prvkem množiny řad vozů u požadavku, přiřadí se dané sazbě nekonečno. V opačném případě zůstane sazba zachována, eventuelně dojde k její změně podle míry zastupitelnosti vozových řad.
- Preference při uspokojení některých požadavků - Předmětem dalšího řešení bude, zda je výhodnější jít cestou snížení sazeb ve sloupcích preferovaných požadavků, nebo cestou dvoustupňové optimalizace(nejdříve uspokojení preferovaných a poté ostatních požadavků).
- Zohlednění dynamické pojetí - Ke každému přebytku (požadavku) je známa nebo je možno odhadnout dobu, kdy bude vůz k dispozici (kdy jej potřebujeme). Z těchto dob a Plánu vlakotvorby je možno zjistit, zda je přeprava reprezentovaná danou sazbou uskutečnitelná. Pokud není, změní se tato na nekonečno. Případně je možné tuto sazbu zvětšit o určitou hodnotu vypovídající o počtu přeřazení na přepravní cestě. Předpokladem je jízda nákladních vlaků podle grafikonu vlakové dopravy.
- Respektování propustnosti tratí a stanic - Tento požadavek je asi nejproblémovější a předmětem dalších prací bude jednak analýza možnosti zapracování tohoto požadavku do řešení a způsob zjištění hodnot kapacit těchto prvků sítě využitelných pro přepravu prázdných vozů.

Ve všech bodech, kromě posledního, se vlastně jedná pouze o změnu původní matice sazeb.

Lektoroval: Doc.RNDr. Bohdan Linda, CSc.
Předloženo v lednu 1998.

Literatura

[1] Mojžíš, V. : Technologie a řízení železniční dopravy, habilitační práce, Pardubice 1994

[2] Podolák, M. : Možnosti automatizace práce vozového dispečera, diplomová práce, Pardubice 1996

Resumé

MATEMATICKÝ MODEL A ZPŮSOBY ŘEŠENÍ ÚLOHY PŘIDĚLOVÁNÍ PRÁZDNÝCH VOZŮ

Milan PODOLÁK

Příspěvek se zabývá úlohou přidělování prázdných vozů k nakládce. Je uveden verbální a matematický model problému. Pro posouzení kvality jednotlivých variant je provedena analýza a výběr hodnotících kritérií. Jsou zmíněny možné způsoby řešení. Podrobně je popsána Dantzigova metoda a jsou nastíněny možnosti modifikace původního algoritmu.

Summary

MATHEMATICAL MODEL AND METHODS TO FIND SOLUTION OF PROBLEM OF ALOCATION OF EPTY WAGONS

Milan PODOLÁK

The article deals with the problem of allocation of empty wagons for loading. Verbal and mathematical models of this problems are stated. For consideration of the quality the respective solution variants are analysed and valuation criteria are chosen. The possible mathematical methods to find solutions are presented. The Dantzig's metod is presented in detail. The possibilities of modification of original algorithm is sketched.

Zusammenfassung

DAS MATHEMATISCHE MODELL UND LÖSUNGSWEISE DER AUFGABE ÜBER AUFTEILUNG DER LEERWAGONEN

Milan PODOLÁK

Der Beitrag befasst sich mit der Aufgabe der Zuteilung der leeren Wagen zur Ladung. Ist hier ein Verbal- und Mathematikmodel von Problem angeführt. Für die Beurteilung der Qualität der einzelnen Varianten der Lösung wurde die analyse und Wahl der bewertenden Kriterien durchgeführt. Sind hier einige möglichen Lösungsmethoden angeführt. Ist hier ausführlich eine Dantzigsmethode beschreibt. Zugleich einige Modifikationsmöglichheiten von originellen Algorithmus.