O TORSO-FORMNÍCH VEKTOROVÝCH POLÍCH NA RIEMANNOVÝCH PROSTORECH 2. ŘÁDU

Dagmar Pilařová

Katedra matematiky, Fakulta ekonomicko-správní, Univerzita Pardubice

Josef Mikeš

Katedra algebry a geometrie, Fakulta přírodovědecká, Univerzita Palackého

In this article are showed fundamental relations of torso-forming vector fields on Riemannian spaces order two and a proof of a sentence delivering another results for concircular fields on Riemannian spaces order two.

1. Úvod

Riemannovým prostorem 2. řádu V_n^2 asociovaným s Riemannovým prostorem V_n v bodě $M_o \in V_n$ nazýváme Riemannův prostor s metrickým tenzorem:

$$g_{ij} = \overset{o}{g}_{ij} + \frac{1}{3} \overset{o}{R}_{i\alpha\beta j}\, y^\alpha y^\beta \qquad (1)$$

kde $\overset{o}{g}_{ij}$ a $\overset{o}{R}_{i\alpha\beta j}$ jsou hodnoty komponent metrického a Riemannova tenzoru prostoru V_n v bodě M_o. Soustava souřadnic $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ je Riemannovou ve V_n^2 v bodě $y^h=0$ [1]. V této souřadnicové soustavě mají komponenty Christoffelových objektů tvar:

$$\Gamma_{ijk} = -\frac{1}{3} \overset{o}{R}_{\alpha(ij)k}\, y^\alpha \qquad (2)$$

Souřadnice y^h ve V_n^2 budeme nazývat *kanonickými*. Prostory V_n^2 jsou aproximací Riemannových prostorů V_n druhého řádu vzhledem ke kanonickým souřadnicím.

Vektorové pole λ^h v Riemannovém prostoru V_n nazval K. Yano [2], [3] *torso-formním*, jestliže platí

$$\lambda^h_{,i} = \mu \delta^h_i + \lambda^h a_i \,, \qquad (3)$$

kde "," je kovariantní derivace ve V_n, μ je skalární funkce, a_i je kovektor a δ^h_i je Kroneckerovo delta.

• Práce je napsána v rámci zadání grantu č. 201/99/0265 GA ČR.

Jestliže vektor a_i je gradientní, pak torso-formní pole generuje *koncirkulární* vektorová pole [2]. Tato vektorová pole na Riemannových prostorech 2. řádu V_n^2 studoval K. Esenov [4], [5], [6]. Zde je dokázáno, že když existuje koncirkulární pole ve V_n^2 Riemannův tenzor $\overset{o}{R}_{hijk}$ má formu:

$$\overset{o}{R}_{hijk} = M(\overset{o}{g}_{hj}\overset{o}{g}_{ik} - \overset{o}{g}_{hk}\overset{o}{g}_{ij}), \quad \text{kde } M \text{ je konst.}$$

Přitom tento prostor V_n^2 je subprojektivní prostor ve smyslu Kagana [7].

2. Torso-formní vektorové pole ve V_n^2

Uvedený výsledek K. Esenova se pokusíme zobecnit pro torso-formní vektorová pole. Necht´vektor λ^h je torso-formní ve V_n^2, tj. pro něj platí rovnice (3). Budeme předpokládat, že v kanonických souřadnicích V_n^2 geometrické objekty λ^h, μ, a_i mají třídu hladkosti $\mathbf{C^3}$. Potom platí:

Věta *Jestliže ve V_n^2 (n>8) existuje neizotropní torso-formní vektorové pole λ^h při podmínce $\mu(0)\neq 0$, pak*

$$\overset{o}{R}_{hijk} = \overset{o}{g}_{hj} C_{ik} + \overset{o}{g}_{ik} C_{hj} - \overset{o}{g}_{hk} C_{ij} - \overset{o}{g}_{ij} C_{hk}, \qquad (4)$$

kde $C_{ij} = \alpha \overset{o}{g}_{ij} + \beta \lambda_i \lambda_j$, ($i$, j) *označuje symetrizaci,* α, β *jsou* konst, λ_i *je vektor s konstantními komponentami.*

Další text věnujeme důkazu této věty.

a) Analýza absolutních a lineárních členů rovnic torso-formních polí vzhledem ke kanonickým souřadnicím. Necht´ve V_n^2 existuje torso-formní vektorové pole λ^h. Pak vyjádříme funkce λ^h, μ, a_i ve tvaru řad:

$$\lambda^h = \underset{o}{\lambda}^h + \underset{1}{\lambda}{}^h_k y^k + \underset{2}{\lambda}{}^h_{kl} y^k y^l + \dots, \qquad \mu = \underset{o}{\mu} + \underset{1}{\mu}_k y^k + \underset{2}{\mu}_{kl} y^k y^l + \dots,$$

$$a_i = \underset{o}{a}_i + \underset{1}{a}_{ik} y^k + \underset{2}{a}_{ikl} y^k y^l + \dots \qquad (5)$$

Rovnice (3) vyjádříme v následujícím tvaru:

$$g_{\alpha j}\partial_i \lambda^\alpha + \lambda^\alpha \Gamma_{\alpha ij} = \mu g_{ij} + \lambda^\alpha g_{\alpha j} a_i, \quad \text{kde} \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Dosaďme (5) do těchto rovnic:

$$(\overset{o}{g}_{\alpha j} + \frac{1}{3}\overset{o}{R}_{\alpha klj} y^k y^l)(\underset{1}{\lambda}{}^\alpha_i + 2\underset{2}{\lambda}{}^\alpha_{ik} y^k + 3\underset{3}{\lambda}{}^\alpha_{ikl} y^k y^l + \dots) +$$

$$+(\underset{o}{\lambda}{}^{\alpha}+\underset{1}{\lambda}{}^{\alpha}_{k}\,y^{k}+\underset{2}{\lambda}{}^{\alpha}_{kl}\,y^{k}y^{l}+\dots)(-\frac{1}{3}\overset{o}{R}{}_{l(\alpha i)j}\,y^{l})=$$

$$=(\underset{o}{\mu}+\underset{1}{\mu}_{k}\,y^{k}+\underset{2}{\mu}_{kl}\,y^{k}y^{l}+\dots)(\overset{o}{g}_{ij}+\frac{1}{3}\overset{o}{R}_{iklj}\,y^{k}y^{l})+ \tag{6}$$

$$+(\underset{o}{\lambda}{}^{\alpha}+\underset{1}{\lambda}{}^{\alpha}_{k}\,y^{k}+\underset{2}{\lambda}{}^{\alpha}_{kl}\,y^{k}y^{l}+\dots)(\overset{o}{g}_{\alpha j}+\frac{1}{3}\overset{o}{R}_{\alpha klj}\,y^{k}y^{l})(\underset{o}{a}_{i}+\underset{1}{a}_{ik}\,y^{k}+\underset{2}{a}_{ikl}\,y^{k}y^{l}+\dots).$$

Z rovnosti absolutních členů v (6) získáme vztah: $g_{\alpha j}\,\underset{1}{\lambda}{}^{\alpha}_{i}=\mu g_{ij}+\lambda_{j}\,a_{i}$, kde

$\lambda_{k}=g_{kj}\,\underset{o}{\lambda}{}^{j}$, zde a dále budeme psát: $a_{i}\equiv\underset{o}{a}_{i}$, $g_{ij}\equiv\overset{o}{g}_{ij}$, $\lambda^{h}\equiv\underset{o}{\lambda}{}^{h}$, $\mu\equiv\underset{o}{\mu}$, $R_{hijk}\equiv\overset{o}{R}_{hijk}$ . .
Odtud vyplývá

$$\underset{1}{\lambda}{}^{h}{}_{i}=\mu\,\delta^{h}_{i}+\lambda^{h}\,a_{i}\,. \tag{7}$$

Z rovnosti koeficientů u y^{k} v (6) získáme vztah:

$$2\,g_{\alpha j}\,\underset{2}{\lambda}{}^{\alpha}{}_{ik}=\frac{1}{3}\lambda^{\alpha}\,R_{j(\alpha i)k}+\underset{1}{\mu}_{k}\,g_{ij}+\lambda_{j}\,\underset{1}{a}_{ik}+\underset{1}{\lambda}{}^{\alpha}_{k}\,g_{\alpha j}\,a_{i}\,, \tag{8}$$

ten kontrahujeme tenzorem g^{jh} $(\|g^{jh}\|=\|g_{ij}\|^{-1})$ a získáme vztah:

$$2\underset{2}{\lambda}{}^{h}_{ik}=\frac{1}{3}\lambda^{\alpha}\,\overset{o}{R}{}^{h}_{(\alpha i)k}+\underset{1}{\mu}_{k}\delta^{h}_{i}+\lambda^{h}\,\underset{1}{a}_{ik}+\underset{1}{\lambda}{}^{h}_{k}\,a_{i}\,. \tag{9}$$

Nyní dosadíme do rovnice (9) za $\underset{1}{\lambda}{}^{\alpha}_{i}$ vztah (7) a provedeme alternaci [*i,k*]. Po úpravách získáme vztah:

$$\lambda^{\alpha}\,R_{\alpha ijk}=g_{ij}\,M_{k}-g_{ik}\,M_{j}+\lambda_{i}\,\underset{1}{a}_{[jk]},\quad \text{kde}\quad M_{i}=\underset{1}{\mu}_{i}-\underset{o}{\mu}\,a_{i}\,. \tag{10}$$

Protože $\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}R_{\alpha\beta jk}=0$, pak po kontrakci (10) vektorem λ^{i} získáme vztah:

$$\underset{1}{a}_{[jk]}=\frac{1}{\lambda}(\lambda_{j}M_{k}-\lambda_{k}M_{j}), \tag{11}$$

kde $\lambda \equiv \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} g_{\alpha\beta} \neq 0$.

Nyní dosadíme (11) do rovnice (10):

$$\lambda^{\alpha} R_{\alpha ijk} = g_{ij} M_k - g_{ik} M_j + \frac{1}{\lambda} \lambda_i (\lambda_j M_k - \lambda_k M_j), \tag{12}$$

a poté formule (8) budou mít formu:

$$2 g_{\alpha j} \underset{2}{\lambda}^{\alpha}{}_{ik} = \frac{2}{3}(g_{ij} M_k + g_{jk} M_i) - \frac{1}{3} g_{ik} M_j + \mu (g_{ij} a_k + g_{jk} a_i) +$$
$$+ \frac{1}{3\lambda}(2\lambda_j \lambda_k M_i - \lambda_i \lambda_j M_k - \lambda_i \lambda_k M_j) + \lambda_j (\underset{1}{a}_{ik} + a_i a_j). \tag{13}$$

b) Analýza členů 2. řádu rovnic torso-formních polí vzhledem ke kanonickým souřadnicím.

Z rovnosti koeficientů u $y^k y^l$ v rovnici (7) získáme vztah:

$$\underset{k,l}{S}\left(3 \overset{o}{g}_{\alpha j} \underset{3}{\lambda}^{\alpha}{}_{ikl} + \frac{1}{3} \underset{1}{\lambda}{}^{\alpha}_{i} \overset{o}{R}_{\alpha klj} - \frac{1}{3} \underset{1}{\lambda}{}^{\alpha}_{l} \overset{o}{R}_{k(\alpha i)j} \right) =$$

$$\underset{k,l}{S}\left(\underset{2}{\mu}_{kl} \overset{o}{g}_{ij} + \frac{1}{3} \underset{o}{\mu} \overset{o}{R}_{iklj} + \lambda_j \underset{2}{a}_{ikl} + \underset{1}{\lambda}{}^{\alpha}_{k} \overset{o}{g}_{\alpha j} \underset{1}{a}_{il} + \frac{1}{3} a_i \underset{o}{\lambda}^{\alpha} \overset{o}{R}_{\alpha klj} + \underset{2}{\lambda}{}^{\alpha}_{kl} \overset{o}{g}_{\alpha j} a_i \right),$$

kde $\underset{k,l}{S}$ značí symetrizaci po indexech *k, l.*

Provedeme tedy symetrizaci dle indexů *k, l* a dosadíme výraz (7), (11), (12) a (13). Tím předchozí rovnici upravíme na tvar:

$$6 g_{\alpha j} \underset{3}{\lambda}^{\alpha}{}_{ikl} = -\frac{\mu}{3} R_{i(kl)j} + g_{ij}(2 \underset{2}{\mu}_{kl} - \frac{1}{3} a_{(k} M_{l)}) - \frac{1}{3} M_j (a_l g_{ki} + a_k g_{li}) +$$
$$+ g_{jk} A_{il} + g_{jl} A_{ik} + \lambda_j A_{ikl} - \frac{1}{3} \lambda_i M_j (a_l \lambda_k + a_k \lambda_l), \tag{14}$$

kde $A_{ik} \equiv \mu \underset{1}{a}_{k} + \frac{2}{3} a_k M_i + a_i M_k + \mu a_i a_k$, A_{ikl} je nějaký tenzor.

Dále výraz (14) alternujeme po i, k a získáme následující vztah:

$$\mu R_{iklj} = g_{ij} C_{kl} - g_{kj} C_{il} + g_{jl} A_{[ik]} + \lambda_j A_{[ik]l} + M_j B_{ikl}, \tag{15}$$

kde $C_{kl} \equiv 2 \underset{2}{\mu}_{kl} - \frac{1}{3} a_{(k} M_{l)} - A_{kl}$, B_{ikl} je určený tenzor.

Symetrizací (15) po l a j se přesvědčíme, že platí

$$g_{ij}C_{kl} - g_{kj}C_{il} + g_{il}C_{kj} - g_{kl}C_{ij} + 2g_{jl}A_{[ik]} + \\ + \lambda_j A_{[ik]l} + M_j B_{ikl} + \lambda_l A_{[ik]j} + M_l B_{ikj} = 0, \qquad (16)$$

Jestliže $A_{[ik]} \neq 0$ pak existuje bivektor $\varsigma^i \xi^k$ tak, že platí $\varsigma^i \xi^k A_{[ik]} \neq 0$. Kontrahujeme (16) s tímto bivektorem. Lehce se přesvědčíme, že $\text{Rang}\, g_{ij} \leq 8$, což je spor s předpokladem, že n>8. Tudíž náš předpoklad byl nesprávný. Tedy $A_{[ik]} = 0$. Na základě analýzy formulí, které definují A_{ik} zjistíme, že $\underset{1}{a}_{[jk]} = 0$ a pak z (11) vyplývá $\lambda_j M_k - \lambda_k M_j = 0$. Odsud plyne:

$$M_k = M\lambda_k, \qquad (17)$$

kde M je některé číslo. Formule (10) nabývají formu:

$$\lambda^\alpha R_{\alpha ijk} = M(g_{ij}\lambda_k - g_{ik}\lambda_j). \qquad (18)$$

Podobně se zjednoduší formule (15) takto:

$$R_{iklj} = g_{ij}C_{kl} - g_{kj}C_{il} + \lambda_j A_{[ik]l}, \qquad (17)$$

kde C_{kl} je některý symetrický tenzor, A_{ijk} je některý tenzor.

Srovnáním (18) a výsledku kontrakce (17) s λ^l zjistíme, že $C_{kl}\lambda^l = M\lambda_k$ a také $A_{[ik]l}\lambda^l = 0$.

Symetrizací (17) po l a j se přesvědčíme, že platí

$$g_{ij}C_{kl} - g_{kj}C_{il} + g_{il}C_{kj} - g_{kl}C_{ij} + \lambda_j A_{[ik]l} + \lambda_l A_{[ik]j} = 0. \qquad (19)$$

Kontrakcí (19) s λ^l získáme, že $A_{[ik]j} = \frac{1}{\lambda}(\lambda_k(C_{ij} - Mg_{ij}) - \lambda_i(C_{kj} - Mg_{kj}))$. Po vyloučení těchto výrazů kontrakcí (19) s g^{ij} se přesvědčíme, že $C_{kl} \equiv \chi g_{kl} + \varepsilon\lambda_k\lambda_l$.

Dosazením do (17) se přesvědčíme o správnosti formulí (4) a tímto je uvedená věta dokázána úplně.

Poznámka: Při detailnější analýze lze podmínku na dimenzi prostoru zmírnit.

Literatura

1. Покасъ С. М.: *Об одном классе римановых пространств.* Одесский гос. ун.-т. Одеса, 1977, стр. 21 Рукописъ депонирована в ВИНИТИ 10. 5. 77. N 1833-77
2. Yano K.: *On torse-forming directions in Riemannian spaces*. Proc. Imp. Acad. Tokyo. 1944, 20, 701–705.
3. Yano K., Bochner S.: *Curvature and Betti numbers*. Princeto, New Jersey, 1953.
4. Эсенов К. Р., Микеш Й.: *К теории пространств второго порядка.* Республиканская научно-методическая конф. Одесса. 1992, часть I, Тезисы докл. стр. 101.
5. Эсенов К. Р.: *О субпроективных пространствах второго порядка.* Межд. научн. конф. Лобачевский и современная геометрия., Казанъ, 1992, часть I, Тезисы сообщ. стр. 119.
6. Эсенов К. Р.: *О метрике обобщенно эквидистантных пространств.* Научн. конф. Математиков, посвященная 60 летию Киргосуниверситета. Тезисы докладов, Бишкек, 1993, стр. 67
7. Каган В. Ф.: *Субпроективные пространства*. Москва, Физматиз 1961, 220 стр.

Kontaktní adresa:

Dagmar Pilařová

Katedra matematiky, Fakulta ekonomicko-správní, Univerzita Pardubice,
Studentská 84, 532 10 Pardubice,
e-mail: Dagmar.Pilarova@upce.cz

Josef Mikeš

Katedra algebry a geometrie, Fakulta přírodovědecká, Univerzita Palackého,
Tomkova 40, 77900 Olomouc
e-mail: Mikes@upol.cz

Recenzoval: prof.RNDr.Jiří Rachůnek,DrSc., KAG, FP, Univerzita Palackého Olomouc