Jak definovat zkřivení křivky

Jaromír Zahrádka
Ústav matematiky, Fakulta ekonomicko-správní, Univerzita Pardubice

Abstrakt.
The first, the second and the total distortions of the curve of finite length are quontities that are defined as the path integrals of functions of the first, the second, and the third curvature over the all points of the given curve. The middle first, the middle second, and the middle total distortions of the curve are quotients that are defined as the first, the second, and the total distortions divided by length of the given curve.

Úvod

Uvažujme regulární křivku κ v prostoru, která má konečnou délku a je zadána parametrickými rovnicemi pro jednotlivé kartézské souřadnice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ (viz $[1]$), kde $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ jsou funkce definované a spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle t_0 ; t_1 \rangle$.

V každém bodě křivky, který přísluší parametru t, jsou v souladu s $[1]$ definovány první křivost (flexe) $k_1(t)$, druhá křivost (torze) $k_2(t)$. Odvozené vztahy pro $k_1(t)$ a $k_2(t)$ podle $[2]$ jsou

$$k_1(t) = \frac{\sqrt{(\dot{x}.\ddot{y} - \ddot{x}.\dot{y})^2 + (\dot{x}.\ddot{z} - \ddot{x}.\dot{z})^2 + (\dot{y}.\ddot{z} - \ddot{y}.\dot{z})^2}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{(\dot{x}.\ddot{y} - \ddot{x}.\dot{y})^2 + (\dot{x}.\ddot{z} - \ddot{x}.\dot{z})^2 + (\dot{y}.\ddot{z} - \ddot{y}.\dot{z})^2} .$$

Ve vztazích jsou $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ první derivace, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ druhé derivace a $\dddot{x}$, $\dddot{y}$, $\dddot{z}$ třetí derivace prametrických rovnic $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ podle parametru t.

Pro každý bod křivky lze zavést také třetí (totální) křivost, tj. veličinu, na jejíž hodnotě se podílí flexe i torze. Třetí křivost (viz $[3]$) je definována vztahem

$$k_3(t) = \sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}} .$$

Chceme-li zavést veličiny, které budou charakterizovat zkřivení křivky, můžeme vyjít z hodnot první, druhé, resp. třetí křivosti v jednotlivých bodech a provést jejich integrální součet podél uvažované křivky.

Flexní zkřivení křivky

Zkřivení křivky κ způsobené flexí lze charakterizovat křivkovým integrálem z první křivosti podél dané křivky,

$$k_1(\kappa)=\int_{\kappa} k_1.ds\,,$$

kde ds je diferenciál oblouku křivky,

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\;.dt\;\;.$$

Pro parametricky zadanou křivku je zmíněný křivkový integrál

$$k_1(\kappa)=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\sqrt{(\dot{x}.\ddot{y}-\ddot{x}.\dot{y})^2+(\dot{x}.\ddot{z}-\ddot{x}.\dot{z})^2+(\dot{y}.\ddot{z}-\ddot{y}.\dot{z})^2}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}.dt$$

Flexní zkřivení křivky lze geometricky interpretovat jako „délku křivky“, kterou nakreslí tečna křivky na sféře, když její dotykový bod proběhne všechny body prostorové křivky κ. Tutéž křivku na sféře vytvoří také řídící kuželová plocha prostorové křivky. „Délka křivky“ na sféře je vyjádřena v míře obloukové, tj. v radiánech.

Torzní zkřivení křivky

Zkřivení křivky κ způsobené torzí lze charakterizovat křivkovým integrálem z druhé křivosti podél dané křivky,

$$k_2(\kappa)=\int_{\kappa} k_2.ds\,.$$

Pro parametricky zadanou křivku je

$$k_2(\kappa)=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z}\end{vmatrix}}{(\dot{x}.\ddot{y}-\ddot{x}.\dot{y})^2+(\dot{x}.\ddot{z}-\ddot{x}.\dot{z})^2+(\dot{y}.\ddot{z}-\ddot{y}.\dot{z})^2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}.dt$$

Torzní zkřivení křivky lze geometricky interpretovat jako „délku křivky“ (v radiánech), kterou nakreslí binormála křivky na sféře, když určující bod binormály proběhne všechny body prostorové křivky.

Totální zkřivení křivky

Totální zkřivení křivky, na němž se podílí jak flexe , tak torze, lze zavést jako křivkový integrál z totální křivosti křivky $k_3(t)$ podél dané křivky

$$k_3(\kappa)=\int_{\kappa}\sqrt{k_1^2+k_2^2}.ds\,.$$

Totální zkřivení křivky lze interpretovat jako „délku křivky“ (v radiánech), kterou nakreslí normála křivky na sféře.

Střední flexní zkřivení křivky

Střední flexní zkřivení křivky κ lze definovat jako hodnotu flexního zkřivení, která připadá na jednotkovou délku křivky,

$$\bar{k}_1(\kappa) = \frac{\int_\kappa k_1 . ds}{\int_\kappa 1 . ds}.$$

Střední torzní zkřivení křivky

Střední torzní zkřivení křivky κ lze definovat jako hodnotu torzního zkřivení, která připadá na jednotkovou délku křivky,

$$\bar{k}_2(\kappa) = \frac{\int_\kappa k_2 . ds}{\int_\kappa 1 . ds}.$$

Střední zkřivení křivky

Střední zkřivení křivky κ lze definovat jako podíl totálního zkřivení křivky a její celkové délky,

$$\bar{k}_3(\kappa) = \frac{\int_\kappa \sqrt{k_1^2 + k_2^2} . ds}{\int_\kappa 1 . ds}.$$

Závěr

Zavedené veličiny ukazují, jak lze definovat zkřivení prostorových křivek konečné délky z hlediska flexe, torze a totální křivosti.

Kontaktní adresa:

RNDr. Jaromír Zahrádka, Ph. D.
Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, Ústav matematiky
Studentská 84, 532 10 Pardubice
e-mail: jaromir.zahradka@upce.cz
tel: 420 466 036 047

Literatura :

1. Budinský, B. *Analytická a diferenciální geometrie*, Praha, SNTL, 1983, (296)
2. Zahrádka, J. *Matematická podpora obrábění tvarových ploch na frézovacích strojích s nekonvenčním kinematickým uspořádáním,* Praha, Disertační práce na ČVUT, 2003, (260)
3. http://mathworld.wolfram.com/TotalCurvature.html

Recenzovala: doc. RNDr. Ludmila Machačová, CSc., ÚM, FES, UPa